

УДК 539.3

Н. Гембара¹, Й. Лучко², докт. техн. наук

¹Українська академія друкарства

²Львівська філія Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка Лазоряна

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ОБОЛОНОК З ДВОСТОРОННІМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ

Резюме. З метою визначення температурного поля в оболонках з двостороннім багатошаровим покриттям побудовано модель, за якою вплив багатошарових покриттів на розподіл температури в оболонці зводиться до узагальнених умов теплообміну із зовнішніми середовищами на поверхні оболонки. Розглянуто довільну оболонку з двосторонніми тонкими багатошаровими покриттями, поверхні якої омиваються зовнішніми середовищами з різними температурами. Матеріали оболонки та покриттів мають різні теплофізичні характеристики. На контактних поверхнях оболонки і шарів та між шарами виконуються умови ідеального теплового контакту. На зовнішніх поверхнях покриттів відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Вважаючи товщини покриттів малими в порівнянні з товщиною оболонки, шляхом граничного переходу та введенням приведених теплопровідностей і термоопорів шарів покриття, отримано узагальнені умови теплообміну із зовнішніми середовищами на поверхнях оболонки через багатошарові покриття.

Як приклад, розглянуто осесиметричне температурне поле в циліндричній оболонці з однаковими двосторонніми покриттями.

Ключові слова: теплопровідність, оболонка, багатошарові покриття.

N. Hembara, J. Lucko

MODELING OF HEAT-CONDUCTION OF SHELLS WITH BILATERAL MULTILAYER COATING

Summary. To determine the temperature field in the shells with bilateral multilayer coating the model, in which the influence of multilayer coatings on the temperature distribution in the shell is reduced to the generalized heat transfer conditions with the external environment on the shell surface, has been built. Any shell with bilateral thin multilayer coatings, the surface of which is washed by the external environment with different temperatures, is being examined. Materials of the shell and coatings possess different thermo-physical characteristics. On the contact surfaces of the shell and layers and between the layers the conditions of ideal thermal contact are being provided. On the external surfaces of the coating a heat exchange with the external environment according to the Newton's law occurs. Treating the thickness of coatings small as compared with that of the shell, by boundary transition and introduction of summarized heat conduction and thermal resistance of the coating layers the generalized conditions of heat exchange with the environment on the surface of shell through the multilayer coating, have been obtained. The solution of the heat-conduction equation for a shell has been written as the integral temperature characteristics taking advantage of the operator method. The temperature characteristics are determined from the system of two differential equations of the infinite high order. The approximate system of differential equations of the fourth order has been presented.

As the example the axisymmetric non-stationary temperature field in a thin cylindrical shell with similar in thickness and thermo-physical parameters of the bilateral multilayer coatings with the initial constant temperature is being examined. Ambient temperature, that surrounds the shell, is accepted as the function of the axial coordinate and time. The research of regularities of the heat-conduction process in the system shell-bilateral multilayer coating basing on the obtained solution of the heat equation, has been carried out. When the thickness of the shell increases and the coefficient of the heat conductivity decreases, the increase of the

temperature field non-uniformity along the cylindrical shell occurs. Increase of the heat transfer coefficients from the coating surfaces causes the increase of the temperature gradient along the surface of the cylindrical shell.

Key words: heat-conduction, shell, multi-layer coating.

Постановка проблеми. Тонкостінна оболонка, що поєднує високу міцність і малу вагу, простоту і технологічність виготовлення, стала однією з найпоширеніших конструкцій у різних галузях сучасної техніки. Перш за все, це корпусні елементи в ракетній та авіаційній техніці, корабле- та автомобілебудуванні, промислового і цивільному будівництві, хімічному машинобудуванні. Це надзвичайно цікава тема, яка досить активно розвивається (наприклад, видобування нафти в морі і пов'язане з цим будівництво величезних морських бурових платформ ставить перед теорією оболонок нові цікаві задачі), та добре висвітлена в науково-технічній літературі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Велику увагу вивченню термодинамічного стану тонкостінних елементів конструкцій оболонкового типу приділяв академік Я.С. Підстригач. Результати досліджень з термомеханіки тонкостінних елементів опубліковані у низці монографій Я.С. Підстригача та його учнів [1 – 12].

У деяких галузях особливо актуальною є проблема захисту тонкостінних елементів конструкцій від дії низько- або високотемпературних теплових впливів. Одне з ефективних інженерних вирішень цієї проблеми – нанесення захисного ізоляційного покриття. З метою аналізу й прогнозування працездатності виробів з покриттям у вигляді захисного шару важливого значення набуває побудова відповідних математичних моделей і методів їхньої реалізації [13 – 20].

Метою роботи є побудова математичної моделі для визначення розподілу температури в довільній оболонці з двостороннім багат шаровим покриттям.

Матеріали та методика досліджень. Розглянемо (рис. 1) тонку оболонку товщиною $2h_0$ в ортогональній системі координат $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ з двостороннім покриттям. На поверхню $\gamma_0 = h_0$ оболонки нанесено багат шарове покриття з товщинами $2h_1^+, 2h_2^+, \dots, 2h_n^+$, а на поверхню $\gamma_0 = -h_0$ оболонки нанесено багат шарове покриття з товщинами $2h_1^-, 2h_2^-, \dots, 2h_m^-$ і різними теплофізичними характеристиками. Кожен шар покриття вважаємо тонкою оболонкою відповідної товщини покриття.

З поверхонь $\gamma_n^+ = h_n^+$ і $\gamma_m^- = -h_m^-$ відбувається теплообмін з оточуючим середовищем за законом Ньютона.

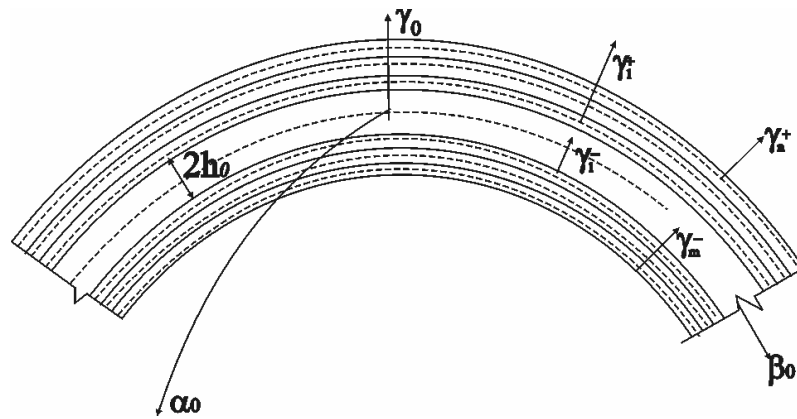


Рисунок 1. Розрахункова схема оболонки з двостороннім багат шаровим покриттям

Figure 1. Calculation scheme of the shell with bilateral multi-coating

Приймаємо, що на контактних поверхнях оболонки і шарів та між шари виконуються умови ідеального теплового контакту.

Граничні умови на торцевих поверхнях, що обмежують оболонку і покриття, приймаємо першого – третього роду. Для нестационарної задачі теплопровідності задаємо початковий розподіл температури.

Таким чином задача теплопровідності оболонки з двостороннім покриттям зводиться до розв’язання системи $n + m + 1$ диференціальних рівнянь [1]

$$p_0^2 t_0 + \frac{\partial^2 t_0}{\partial \gamma_0^2} = 0, \quad (1)$$

$$p_{i+}^2 t_i^+ + \frac{\partial^2 t_i^+}{\partial \gamma_i^+} = 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$p_{j-}^2 t_j^- + \frac{\partial^2 t_j^-}{\partial \gamma_j^-} = 0, j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Тут $p_0^2 = \Delta - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau}$, $a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0}$, $p_{i+}^2 = \Delta - \frac{1}{a_{i+}} \frac{\partial}{\partial \tau}$, $a_{i+} = \frac{\lambda_{i+}}{c_{i+}}$,

$p_{j-}^2 = \Delta - \frac{1}{a_{j-}} \frac{\partial}{\partial \tau}$, $a_{j-} = \frac{\lambda_{j-}}{c_{j-}}$, a_0, a_{i+}, a_{j-} – коефіцієнти теплопровідності;

$\lambda_0, \lambda_{i+}, \lambda_{j-}$ – коефіцієнти теплопровідності; c_0, c_{i+}, c_{j-} – питома теплоємність матеріалу оболонки і шарів покриття відповідно.

Вважаючи товщини покриття малими в порівнянні з товщиною оболонки, шляхом граничного переходу при $h_i^+ \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $h_j^- \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) і введенням приведених теплопровідностей $\lambda_{i+}^* = \lambda_{i+} \cdot 2h_i^+$, $\lambda_{j-}^* = \lambda_{j-} \cdot 2h_j^-$ і термоопорів

$r_{i+} = \frac{2h_i^+}{\lambda_{i+}^*}$, $r_{j-} = \frac{2h_j^-}{\lambda_{j-}^*}$ шарів покриття, отримуємо умови теплообміну із зовнішніми

середовищами на поверхні оболонки через багат шарові покриття у вигляді [9]

$$\lambda_{0n} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma_0} + \alpha_{0n} t_0 = \alpha_n t_n^c \text{ при } \gamma_0 = h_0, \quad (4)$$

$$\lambda_{0m} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma_0} - \alpha_{0m} t_0 = \alpha_m t_m^c \text{ при } \gamma_0 = -h_0. \quad (5)$$

Тут

$$\lambda_{0n} = \lambda_o (1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_{i+}), \quad (6)$$

$$\alpha_{0n} = \alpha_n - \sum_{i=1}^n \lambda_{i+}^* \cdot p_{i+}^2, \quad (7)$$

$$\lambda_{0m} = \lambda_o (1 + \alpha_m \sum_{i=1}^n r_{i-}), \quad (8)$$

$$\alpha_{0m} = \alpha_m - \sum_{i=1}^n \lambda_{i-}^* \cdot p_{i-}^2. \quad (9)$$

Тут a_n і a_m – коефіцієнти теплообміну із зовнішніми середовищами зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки.

Отже, задача теплопровідності для оболонки з двостороннім покриттям зведена до розв'язання диференціального рівняння (1) за граничних умов (4) і (5).

За допомогою символічного методу [1] розв'язок рівняння (1) запишемо у вигляді

$$t_0 = \frac{p_0 h_0 \cos p_0 \gamma_0}{\sin p_0 h_0} \cdot T_1 + \frac{1}{3} \frac{p_0^2 h_0^2 \sin p_0 \gamma_0}{\sin p_0 h_0 - p_0 h_0 \cos p_0 h_0} \cdot T_2, \quad (10)$$

де

$$T_1 = \frac{1}{2h_0} \int_{-h_0}^{h_0} t_0 d\gamma_0, \quad T_2 = \frac{3}{2h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} t_0 \gamma_0 d\gamma_0 \quad (11)$$

– інтегральні характеристики температури, через які виражається напружено-деформований стан оболонки.

Підставляючи (10) в умови (4) і (5), після елементарних перетворень отримаємо систему диференціальних рівнянь для визначення інтегральних характеристик T_1 і T_2

$$p_0^2 h_0^2 \cdot T_1 - \varepsilon_0 p_0 h_0 \operatorname{ctg} p_0 h_0 \cdot T_1 - \frac{\varepsilon_0^*}{3} \frac{p_0^2 h_0^2}{1 - p_0 h_0 \operatorname{ctg} p_0 h_0} \cdot T_2 = -(\varepsilon t_c + \varepsilon^* t_c), \quad (12)$$

$$p_0^2 h_0^2 \cdot T_2 - (1 - \varepsilon_0) \frac{p_0^2 h_0^2}{1 - p_0 h_0 \operatorname{ctg} p_0 h_0} \cdot T_2 - 3\varepsilon_0 p_0 h_0 \operatorname{ctg} p_0 h_0 \cdot T_2 = -3(\varepsilon t_c^* + \varepsilon_0^* t_c), \quad (13)$$

де $\varepsilon_0 = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}} + \frac{\alpha_{0m}}{\lambda_{0m}} \right)$, $\varepsilon_0^* = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}} - \frac{\alpha_{0m}}{\lambda_{0m}} \right)$, $t_c = \frac{1}{2} (t_m^c + t_n^c)$, $t_c^* = \frac{1}{2} (t_m^c - t_n^c)$,

$$\varepsilon = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\alpha_n}{\lambda_{0n}} + \frac{\alpha_m}{\lambda_{0m}} \right), \quad \varepsilon^* = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\alpha_n}{\lambda_{0n}} - \frac{\alpha_m}{\lambda_{0m}} \right). \quad (14)$$

Якщо T_1 і T_2 знайдені, то температура може бути визначена за формулою (10).

Якщо обмежитися першими членами розкладу операторів $ctgp_0 h_0$ і $(1 - p_0 h_0 ctgp_0 h_0)$, то матимемо наближену систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} h_0^2 p_0^2 \cdot T_1 - \varepsilon_0 T_1 - \varepsilon_0^* T_2 &= -(\varepsilon t_c + \varepsilon^* t_c^*), \\ h_0^2 p_0^2 \cdot T_2 - 3(1 + \varepsilon_0) \cdot T_2 - 3\varepsilon_0^* T_1 &= -3(\varepsilon t_c^* + \varepsilon^* t_c). \end{aligned} \quad (15)$$

Розв'язок задачі теплопровідності для циліндричної оболонки з двостороннім покриттям. Розглянемо осесиметричне температурне поле в тонкостінній циліндричній оболонці з однаковими двосторонніми покриттями з початковою нульовою температурою, яка ззовні нагрівається шляхом конвективного теплообміну із середовищем. Температуру зовнішнього середовища, що оточує оболонку, вважаємо функцією осьової координати $x = z/h_0$ і часу $f = \frac{\lambda_0}{h_0^2 c_0} \cdot \tau$:

$$t_c = \varphi(x, f). \quad (16)$$

Розв'язок відповідного рівняння теплопровідності (15) отримуємо, використовуючи перетворення Фур'є. Для безмежно довгої циліндричної оболонки маємо

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_0^f \varphi(\zeta, \tau) e^{-(\zeta^2 + \varepsilon)(f - \tau)} e^{-i\zeta x} d\tau. \quad (17)$$

У випадку, коли функція φ не залежить від часу,

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2 + \varepsilon} (1 - e^{-(\zeta^2 + \varepsilon)f}) e^{-i\zeta x} d\zeta. \quad (18)$$

Для стаціонарного поля

$$T_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2 + \varepsilon} e^{-i\zeta x} d\zeta. \quad (19)$$

При $\varphi(x, f) = \delta(x)$ маємо $\varphi(\zeta, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta^2 + \varepsilon} (1 - e^{(\zeta^2 + \varepsilon)f}) e^{-i\zeta x} d\zeta. \quad (20)$$

Після відповідних обчислень формула (20) набуває вигляду

$$T_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4} (e^{|x|\sqrt{\varepsilon}} (\operatorname{erf} x_1 - 1) + e^{-|x|\sqrt{\varepsilon}} (\operatorname{erf} x_2 + 1)), \quad (21)$$

$$\text{де } x_1 = \sqrt{\varepsilon f} \left(1 + \frac{|x|}{2\sqrt{\varepsilon f}} \right), \quad x_2 = \sqrt{\varepsilon f} \left(1 - \frac{|x|}{2\sqrt{\varepsilon f}} \right).$$

При великих значеннях $f \gg \frac{1}{\varepsilon}$ в околі прикладання збурення $\delta(x)$ ($|x| < 2\sqrt{\varepsilon}$) замість (21) маємо

$$T_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} e^{-|x|\sqrt{\varepsilon}}. \quad (22)$$

Визначимо температурне поле в оболонці у випадку, коли температура зовнішнього середовища задається у вигляді

$$\varphi(x, f) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

У результаті обчислень та перетворень отримаємо

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1 - e^{-\varepsilon f}}{\varepsilon} + \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{f}} - \sqrt{\varepsilon f} \right) + \frac{1}{4} e^{\sqrt{\varepsilon}|x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{f}} + \sqrt{\varepsilon f} \right) \right), \quad x < 0, \quad (23)$$

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1 - e^{-\varepsilon f}}{\varepsilon} - \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{f}} - \sqrt{\varepsilon f} \right) - \frac{1}{4} e^{\sqrt{\varepsilon}|x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{f}} + \sqrt{\varepsilon f} \right) \right), \quad x > 0.$$

Підставляючи в останніх двох формулах $f \rightarrow \infty$, для усталеного режиму будемо мати

$$T_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|} & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|}, & x > 0. \end{cases} \quad (24)$$

Числові результати, їх аналіз. На основі отриманого розв'язку (23) проведено дослідження закономірностей процесу теплопровідності у системі оболонка – двостороннє багат шарове покриття. На рис. 2 показано розподіл температури вздовж циліндричної оболонки для моментів часу $f=0,1;0,5;0,8;1;10$ за значень $\varepsilon=0,5;1;3;5$.

Як бачимо з рис. 2, за більших значень параметра ε розподіл температури вздовж оболонки більше відхиляється від рівномірного, тобто збільшується градієнт температури вздовж осьової координати. Причём цей процес відбувається набагато швидше, ніж за меншого ε . Оскільки параметр ε , згідно зі співвідношенням (14), є прямо пропорційний до товщини оболонки і коефіцієнтів теплообміну з навколишнім середовищем, а обернено пропорційний до коефіцієнтів теплопровідності покриттів, то зі збільшенням товщини оболонки та зі зменшенням теплопровідності покриття збільшується нерівномірність температурного поля вздовж циліндричної оболонки. Збільшення коефіцієнтів теплообміну з поверхні покриттів призводить також до збільшення градієнта температури вздовж поверхні циліндричної оболонки.

На рис. 3 наведено зміну в часі температури в різних місцях уздовж поверхні циліндричної оболонки для випадку $\varepsilon=1$.

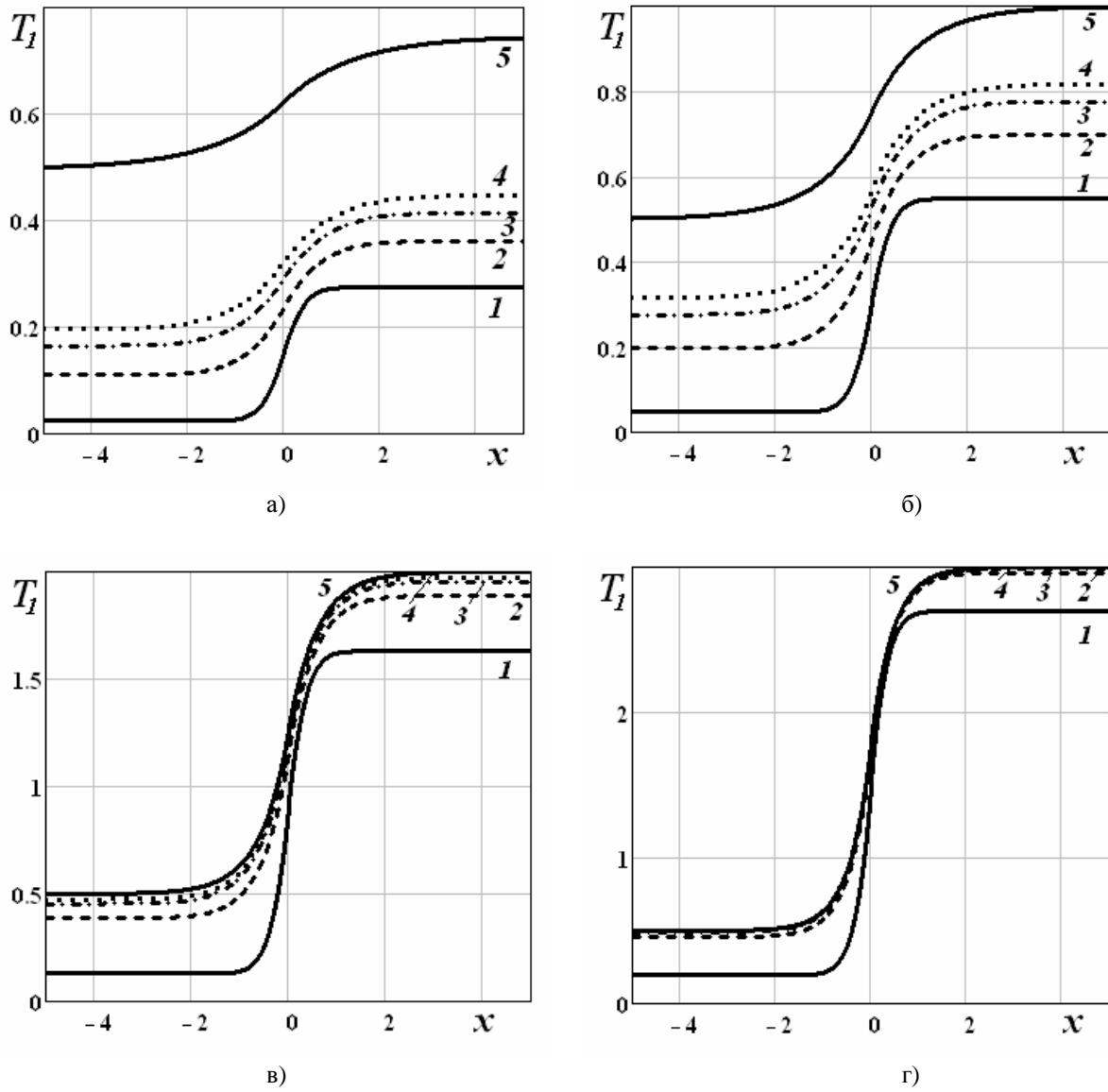


Рисунок 2. Зміна температурного поля вздовж циліндричної оболонки в різні моменти часу (1 – $f=0,1$; 2 – $f=0,5$; 3 – $f=0,8$; 4 – $f=1$; 5 – $f=10$) залежно від параметра ϵ : а) – $\epsilon=0,5$; б) – $\epsilon=1$; в) – $\epsilon=3$; г) – $\epsilon=5$

Figure 2. Change of the temperature field along the cylindrical shell at different times (1 – $f=0,1$; 2 – $f=0,5$; 3 – $f=0,8$; 4 – $f=1$; 5 – $f=10$) depending on the parameter ϵ : а) – $\epsilon=0,5$; б) – $\epsilon=1$; в) – $\epsilon=3$; г) – $\epsilon=5$

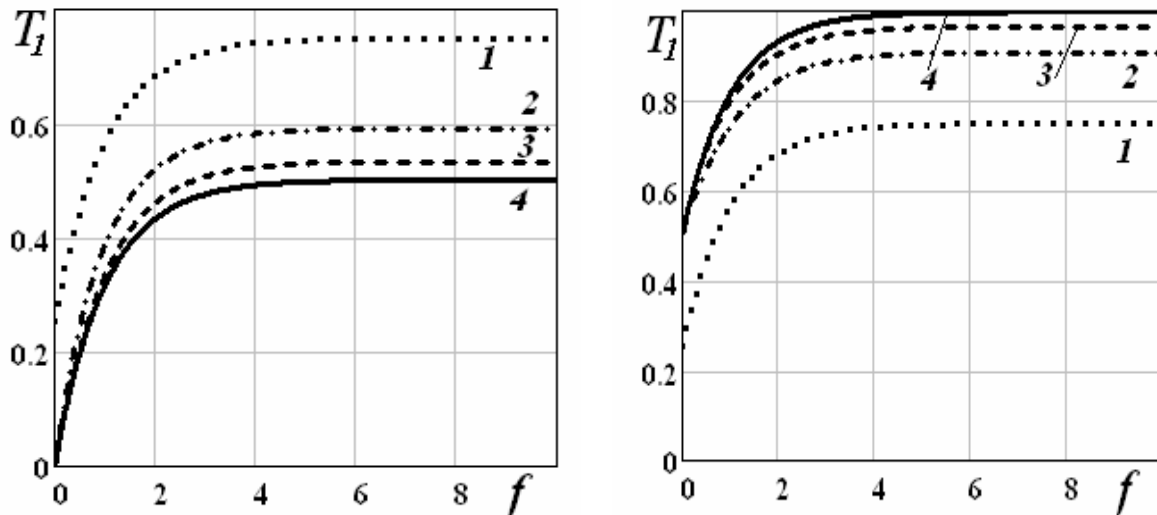


Рисунок 3. Зміна температури з часом у різних точках уздовж циліндричної оболонки
(1 – $|x|=0$; 2 – $|x|=1$; 3 – $|x|=2$; 4 – $|x|=5$) для $\varepsilon=1$

Figure 3. Change of temperature with time at different points along the cylindrical shell
(1 – $|x|=0$; 2 – $|x|=1$; 3 – $|x|=2$; 4 – $|x|=5$) for the $\varepsilon=1$

Ці графіки дозволяють оцінити величину максимально можливої температури циліндричної оболонки при високотемпературному нагріванні зовнішнім середовищем її частини.

Висновки. Задача теплопровідності для оболонок з двосторонніми багат шаровими покриттями зведена до задачі теплопровідності для оболонок з узагальненими умовами теплообміну із зовнішніми середовищами на поверхнях оболонки. Проведені дослідження закономірностей процесу теплопровідності для циліндричної оболонки з двостороннім покриттям показують, що за більших значень товщини оболонки і коефіцієнтів теплообміну з навколишнім середовищем збільшується нерівномірність температурного поля вздовж циліндричної оболонки.

Conclusions. Heat conduction problem for shells with bilateral multilayered coatings has been reduced to the problem of heat conductivity for shells with summarized conditions of heat exchange with the external environment on the surface of the shell.

The researches of regularities of the process of heat conductivity for cylindrical shell with bilateral coating testify that larger values of the thickness of the shell and the coefficients of heat transfer with the environment cause the increases of the temperature field non-uniformity along the cylindrical shell.

Список використаної літератури

1. Підстригач, Я. С. Температурні напруження в оболонках [Текст] / Я.С. Підстригач, С.Я. Ярема. – К.: Видавництво АН УРСР, 1961. – 212 с.
2. Подстригач, Я. С. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями [Текст] / Я.С. Подстригач, П.Р. Шевчук // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227 – 233.
3. Підстригач, Я.С. Вибрані праці [Текст] / Я.С. Підстригач. – К.: Наукова думка, 1995. – 460 с.
4. Подстригач, Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках [Текст] / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.

5. Подстригач, Я.С. Обобщенная термомеханика [Текст] / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
6. Термоупругость тел. При переменных коэффициентах теплоотдачи [Текст] / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, В.И. Громовык, В.Л. Лозбень. – К.: Наук. думка, 1977. – 158 с.
7. Подстригач, Я.С. Термоупругость тонких оболочек [Текст] / Я.С. Подстригач, Р.Н. Швец. – К.: Наук. думка, 1978. – 343 с.
8. Григолюк, Э.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин [Текст] / Э.И. Григолюк, Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак. – К.: Наук. думка, 1979. – 364 с.
9. Подстригач, Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры [Текст] / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
10. Шевчук, В.А. Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие [Текст] / В.А. Шевчук // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 1995. – Вип. 38. – С. 116 – 120.
11. Шевчук, В.А. Нестационарная одномерная задача теплопроводности для цилиндра с тонким багатощаровим покриттям [Текст] / В.А. Шевчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 2. – С. 179 – 185.
12. Шевчук, В.А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття [Текст] / В.А. Шевчук // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 34 – 37.
13. Гембара, В.М. Моделирование теплопроводности та термopужності тонких плит з багатощаровим покриттям [Текст] / В.М. Гембара, Н.О. Гембара // 6-й Міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові: тези доповідей. – 2003. – С. 65.
14. Лучко, Й.Й. Моделирование теплопроводности тонких плит з багатощаровим покриттям [Текст] / Й.Й. Лучко, В.М. Гембара, Н.О. Гембара // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій: збірник наукових праць. – 2004. – Вип. 6. – С. 65 – 70.
15. Лучко, Й.Й. Теплопроводність тонких плит з покриттям [Текст] / Й.Й. Лучко, Н.О. Гембара // Сучасні проблеми проектування будівництва та експлуатації споруд на шляхах сполучення: науково-технічний збірник. – 2004. – Вип. 69. – С. 144 – 149.
16. Лучко, Й.Й. Моделирование теплопроводности тонких оболочек з одностороннім багатощаровим покриттям [Текст] / Й.Й. Лучко, В.М. Гембара, Н.О. Гембара // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: збірник наукових праць. – 2005. – Вип. 6. – С. 60 – 66.
17. Гембара, В.М. Моделирование теплопроводности та термopужності тонких оболочек з багатощаровим покриттям [Текст] / В.М. Гембара, Н.О. Гембара // 7-й міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові: тези доповідей. – 2005. – С. 52.
18. Гембара, Н.О. Оптимізація теплопроводности циліндричної оболонки з покриттям [Текст] / Н.О. Гембара // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій: збірник наукових праць. – 2006. – Вип. 8. – С. 13 – 16.
19. Лучко, Й.Й. Оптимізація теплопроводности пластин з багатощаровим покриттям [Текст] / Й.Й. Лучко, Н.О. Гембара, В.М. Гембара // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: збірник наукових праць. – 2007. – Вип. 7. – С. 52 – 56.
20. Лучко, Й.Й. Оптимізація теплопередачі тонких оболочек з одностороннім багатощаровим покриттям [Текст] / Й.Й. Лучко, Н.О. Гембара, В.М. Гембара // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: збірник наукових праць. – 2012. – Вип. 9. – С. 43 – 49.

Отримано 29.01.2013