С. Шахно. Збіжність комбінованого методу Ньютона-Хорд і єдиність роз-в’язку нелінійних рівнянь / С. Шахно // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 69. — № 1. — С.243-252. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 519.6

С. Шахно, докт. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка

ЗБІЖНІСТЬ КОМБІНОВАНОГО МЕТОДУ НЬЮТОНА-ХОРД І ЄДИНІСТЬ РОЗВ’ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Резюме. *Розглянуто ітераційний процес для розв’язування нелінійних операторних рівнянь, який побудовано на базі методу Ньютона та методу хорд. Уведено узагальнені умови Ліпшиця для поділених різниць, в яких замість сталої Ліпшиця використано деякі додатні інтегровні функції. Проведено дослідження локальної збіжності ітераційного процесу, коли похідні Фреше та поділені різниці першого порядку задовольняють узагальнені умови Ліпшиця. Запропоновано методику доведення збіжності. Встановлено порядок збіжності та область єдиності розв’язку. Як часткові випадки, отримано результати для сталих Ліпшиця.*

Ключові слова*: нелінійне рівняння, метод Ньютона, метод хорд, порядок збіжності, умови Ліпшиця.*

S. Shakhno

CONVERGENCE OF COMBINED NEWTON-SECANT METHOD AND UNIQUENESS OF THE NONLINEAR EQUATIONS SOLUTION

The summary. *The nonlinear operator equations in Banach space are considered .The case when the equation operator is represented by the sum of two defined on an open convex set summands (one is differentiated by Frechet, second - continuous but not necessarily differentiable) is studied. Iterative process is based on Newton's method of chords, which featured Frechet derivative differential operator and divided first-order difference of continuous one. This approach is more general than the classical Newton's method, which is not applicable in the absence of analytical derivatives of equation operator. Combined Secant Newton method can effectively use the best features of the basic chords and Newton methods, in particular their simplicity of calculations and a high order of convergence.*

For the divided differences the generalized Lipschitz conditions are introduced and positive integrated functions instead Lipschitz constants are used. Their partial case is normal conditions with Lipschitz constant. The method of proof of convergence is developed. The local convergence of the iterative process for the case when the Frechet derivatives and divided differences satisfy the first order generalized Lipschitz condition is substantiated. The results for the Lipschitz constants are obtained as partial cases. The conditions and the order of convergence of the combined method of Newton chords are established and conditions of the uniqueness of the solution are obtained.

The proposed approach is suitable for the study of other combined methods for solving nonlinear operator equations. It can be used to study mathematical models of real objects and systems described by nonlinear algebraic or transcendental equations or reduced to optimization problems.

Key words: *nonlinear equation, Newton method, Secant method, convergence order, Lipschitz condition.*

Вступ. Математичні моделі багатьох об’єктів, процесів чи систем нелінійні і часто зводяться до нелінійних операторних рівнянь, систем нелінійних алгебричних або трансцендентних рівнянь у класичному сенсі або в сенсі найменших квадратів. Вони розв’язуються, зазвичай, ітеративним способом. Відомо багато методів розв’язування нелінійних рівнянь. Проте для рівнянь з недиференційованими операторами методи розв'язування вивчені недостатньо. Для розв'язування рівнянь з нелінійними операторами, які містять диференційовану і недиференційовану частини, нами застосовано комбінований метод Ньютона-хорд та обгрунтовано його збіжність при доволі слабких узагальнених умовах Ліпшиця на оператори похідних та поділених різниць.

Розглянемо нелінійне рівняння

$$H(x) = F(x) + G(x) = 0\,, \tag{1}$$

де оператори F і G визначені на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значенням у банаховому просторі Y. F – диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор, диференційовності якого не вимагається. Потрібно знайти розв'язок $x^* \in D$, який задовольняє рівняння (1).

Найвідомішим методом розв'язування рівняння (1) є класичний метод Ньютона [1, 2], який має квадратичний порядок збіжності у разі неперервності за Ліпшицем похідної першого порядку від оператора $F + G$

$$x_{k+1} = x_k - \left[F'(x_k) + G'(x_k)\right]^{-1}\left(F(x_k) + G(x_k)\right),\ k = 0,1,2,... \tag{2}$$

Проте він незастосовний у разі відсутності аналітичного задання похідних. У цьому випадку можна використовувати метод хорд [2 – 4]

$$x_{k+1} = x_k - \left[F(x_k, x_{k-1}) + G(x_k, x_{k-1})\right]^{-1}\left(F(x_k) + G(x_k)\right),\ k = 0,1,2,...\,, \tag{3}$$

де $G(x_k, x_{k-1})$ – поділена різниця першого порядку, x_0, x_{-1} – початкові значення, або комбіновані методи, які використовують похідні для диференційованої частини та поділені різниці для недиференційованої частини нелінійного оператора. Зазначимо, що метод (3) має порядок збіжності, який дорівнює $(1+\sqrt{5})/2$.

У цій статті розглянуто метод, побудований на базі методів Ньютона та хорд. Комбінований метод Ньютона-хорд має вигляд [5]

$$x_{k+1} = x_k - \left[F'(x_k) + G(x_k, x_{k-1})\right]^{-1}\left(F(x_k) + G(x_k)\right),\ k = 0,1,2,... \tag{4}$$

У [5] наведено ітераційну формулу (4) і показано на прикладах, що він швидше збігається, ніж метод тільки з використанням $F'(x_k)$, але без урахування $G(x_k, x_{k-1})$. У праці [6] вивчено напівлокальну збіжність методу (4), однак встановлено лише лінійну збіжність. У статті [7] досліджено збіжність методу з використанням комбінації $F'(x_k) + G(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1})$ за звичайних умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку і встановлено порядок збіжності $(1+\sqrt{5})/2$.

У праці [8] під час дослідження методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої L використано деяку додатну інтегровну функцію. Автором у праці [9] запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для поділеної різниці першого порядку нелінійного оператора і за цих умов досліджено збіжність методу хорд [9, 10] і двокрокового різницевого методу [11] для розв'язування нелінійних операторних рівнянь.

У цій праці обгрунтовано локальну збіжність комбінованого методу (4) з порядком $(1+\sqrt{5})/2$ за узагальнених умов Ліпшиця для похідних Фреше і поділених різниць першого порядку та встановлено область єдиності розв'язку нелінійного рівняння .

Мета роботи. Дослідженння локальної збіжності комбінованого методу Ньютона-хорд та області єдиності розв'язку нелінійного операторного рівняння у банаховому просторі.

Постановка задачі. Розроблення комбінованого ітераційного методу Ньютона-хорд для розв'язування рівнянь з нелінійними операторами, які містять диференційовану і недиференційовану частини. Обгрунтування збіжності за ослаблених узагальнених умов Ліпшиця на оператори похідних та поділених різниць.

Наведемо означення поділених різниць першого порядку від оператора F та умов Ліпшиця для нелінійного оператора та для поділених різниць першого порядку від нелінійного оператора.

Нехай F – нелінійний оператор, визначений на підмножині D лінійного простору X зі значеннями в лінійному просторі Y і x, y – дві фіксовані точки з D. Лінійний оператор з X в Y, що позначається $F(x, y)$, називають поділеною різницею від F за точками x і y, якщо він задовольняє умову

$$F(x, y)(x-y) = F(x) - F(y). \tag{5}$$

У випадку $x = y$ будемо вважати $F(x, x) = F'(x)$, де F' – похідна Фреше нелінійного оператора F.

Позначимо через $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ відкриту, а через $\overline{B(x_0, r)} =$ $= \{x : \|x - x_0\| \le r\}$ – замкнену кулі радіуса r з центром у точці x_0.

Умову на оператор F

$$\left\|F(x) - F\left(x^\tau\right)\right\| \le L\left\|x - x^\tau\right\| \qquad \forall\, x, x^\tau \in D$$

називають умовою Ліпшиця в області D зі сталою D. Якщо область D є кулею $B(x_0, r)$ з центром x_0 і радіусом r, $x \in B(x_0, r)$, то відрізок прямої $x^\tau = x_0 + \tau(x - x_0)$ з'єднує точки x і x_0 кулі $B(x_0, r)$, де $0 \le \tau \le 1$, $\rho(x) = \|x - x_0\|$. Тоді умову

$$\left\|F(x) - F\left(x^\tau\right)\right\| \le L\left\|x - x^\tau\right\| \qquad \forall\, x \in B(x_0, r), \;\; 0 \le \tau \le 1 \tag{6}$$

називають радіальною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L.

Якщо виконується умова

$$\left\|F(x) - F(x_0)\right\| \le L\left\|x - x_0\right\| \qquad \forall\, x \in B(x_0, r), \tag{7}$$

то її називають центральною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L.

Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути сталою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому випадку (6) і (7) будуть замінені [8] відповідно на

$$\left\|F(x)-F\left(x^{\tau}\right)\right\| \leq \int_{\tau\rho(x)}^{\rho(x)} L(u)\,du \qquad \forall\, x\in B\left(x_0,r\right),\quad 0\leq\tau\leq 1 \tag{8}$$

та

$$\left\|F(x)-F\left(x_0\right)\right\| \leq \int_{0}^{\rho(x)} L(u)\,du \qquad \forall\, x\in B\left(x_0,r\right). \tag{9}$$

Умови (8) і (9) називають узагальненими умовами Ліпшиця або такими, що містять L у середньому.

Тепер розглянемо умови Ліпшиця для поділених різниць нелінійного оператора.

Умову на оператор поділеної різниці $F(x, y)$

$$\|F(x,y)-F(u,v)\| \leq L(\|x-u\|+\|y-v\|) \qquad \forall x,y,u,v\in D \tag{10}$$

називають умовою Ліпшиця в області D зі сталою Ліпшиця L.

Якщо виконується умова

$$\|F(x,y)-F'(x_0)\| \leq L(\|x-x_0\|+\|y-x_0\|) \qquad \forall x,y\in B(x_0,r), \tag{11}$$

то її називають центральною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0,r)$ зі сталою L.

Якщо ж виконується умова

$$\left\|F'(x_0)^{-1}(F(x,x_0)-F'(x_0))\right\| \leq L\|x-x_0\| \qquad \forall x\in B(x_0,r), \tag{12}$$

то це радіальна умова Ліпшиця в кулі $B(x_0,r)$ зі сталою L. Умови (10) – (12) називають звичайними умовами Ліпшиця.

Якщо ж L в умовах Ліпшиця не стала величина, а додатна інтегровна функція, то в цьому разі умови (10) – (12) замінюються [9, 10] відповідно на

$$\|F(x,y)-F(u,v)\| \leq \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u)du \qquad \forall x,y,u,v\in D, \tag{13}$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}(F(x,y)-F'(x_0))\right\| \leq \int_0^{\|x-x_0\|+\|y-x_0\|} L(u)du \qquad \forall x,y\in B(x_0,r) \tag{14}$$

та

$$\left\|F'(x_0)^{-1}(F(x,x_0)-F'(x_0))\right\| \leq \int_0^{\|x-x_0\|} L(u)du \qquad \forall x\in B(x_0,r). \tag{15}$$

Умови (13) – (15) називаємо відповідними узагальненими умовами Ліпшиця або умовами Ліпшиця з L в середньому для поділених різниць першого порядку.

Леми. Наведемо деякі леми, необхідні для отримання головних результатів.

Лема 1 [10]. *Нехай* $h(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t G(u)du,\ 0\le t\le r$, *де* $G(u)$ – *додатна інтегровна і неспадна функція на* $[0,r]$. *Тоді* $h(t)$ *неспадна відносно* t *на* $[0,r]$.

Лема 2 [8]. *Нехай* $g(t)=\frac{1}{t^2}\int\limits_0^t Q(u)udu,\ 0\le t\le r$, *де* $Q(u)$ – *додатна інтегровна і неспадна функція на* $[0,r]$. *Тоді* $g(t)$ *неспадна відносно* t *на* $[0,r]$.

Збіжність ітераційного процесу (4)

Теорема 1. *Нехай* F і G – *нелінійні оператори, які діють з відкритої опуклої множини* D *банахового простору* X *у банахів простір* Y. F – *диференційований за Фреше оператор,* G – *неперервний оператор. Нехай* $G(\cdot,\cdot)$ – *поділені різниці першого порядку оператора* G, *визначені на множині* D. *Припустимо, що: 1) рівняння (1) має розв'язок* $x^*\in D$, *у якому існує оператор* $H'(x^*)=F'(x^*)+G(x^*,x^*)$, *і він є оборотний; 2) виконуються такі узагальнені умови Ліпшиця:*

$$\left\|H'(x^*)^{-1}(F'(x)-F'(x^\tau))\right\|\le\int\limits_{\tau\rho(x)}^{\rho(x)}P(u)du\quad,\tag{16}$$

$$\left\|H'(x^*)^{-1}(G(x,y)-G(u,v))\right\|\le\int\limits_0^{\|x-u\|+\|y-v\|}Q(u)du\,,\tag{17}$$

де $x,y,u,v\in B(x^*,r)$, $\rho(x)=\left\|x-x^*\right\|$ і P,Q *додатні неспадні функції. Нехай* r *задовольняє нерівність*

$$\frac{1}{r}\left(\int\limits_0^r P(u)udu+r\int\limits_0^r Q(u)du\right)\left(1-\int\limits_0^r P(u)du-\int\limits_0^{2r}Q(u)du\right)^{-1}\le 1.\tag{18}$$

Тоді метод Ньютона-хорд (4) збігається до розв'язку x^* *для всіх* $x_{-1},x_0\in B(x^*,r)$ *і справджуються оцінки*

$$\left\|x_{k+1}-x^*\right\|\le\frac{q}{\rho_{\max}}\left\|x_{k-1}-x^*\right\|\left\|x_k-x^*\right\|\le q^{\Phi_{k+2}-1}\left\|x_0-x^*\right\|.,\ k=0,1,2,...,,\tag{19}$$

де

$$q=\left(\frac{1}{\rho_{\max}}\int\limits_0^{\rho_{\max}}P(u)udu+\int\limits_0^{\rho_{\max}}Q(u)du\right).\left(1-\int\limits_0^{\rho_{\max}}P(u)du-\int\limits_0^{2\rho_{\max}}Q(u)du\right)^{-1}\tag{20}$$

менше одиниці, $\rho_{\max}=\max\{\rho(x_{-1}),\rho(x_0)\},\ \Phi_{-1}=0,\ \Phi_0=1,\ \Phi_k=\Phi_{k-1}+\Phi_{k-2},\ \ k=1,2,...$

Д о в е д е н н я. Виберемо довільно $x_{-1},x_0\in B(x^*,r)$, де r задовольняє (18), тоді q, визначене за (20), буде менше одиниці. Справді, при монотонності P,Q за лемами 1 та 2 маємо, що $h(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t G(u)du$ і $g(t)=\frac{1}{t^2}\int\limits_0^t Q(u)udu$ неспадні відносно t. Так, ми маємо

$$q=\left(\frac{1}{\rho_{\max}}\int_0^{\rho_{\max}}P(u)udu+\int_0^{\rho_{\max}}Q(u)du\right)\left(1-\int_0^{\rho_{\max}}P(u)du-\int_0^{2\rho_{\max}}Q(u)du\right)^{-1}\le$$

$$\le\left(\frac{1}{\rho^2_{\max}}\int_0^{\rho_{\max}}P(u)udu\rho_{\max}+\frac{1}{\rho_{\max}}\int_0^{\rho_{\max}}Q(u)du\rho_{\max}\right)\left(1-\int_0^{\rho_{\max}}P(u)du-\int_0^{2\rho_{\max}}Q(u)du\right)^{-1}\le$$

$$\le\left(\frac{1}{r^2}\int_0^{r}P(u)udu\rho_{\max}+\frac{1}{r}\int_0^{r}Q(u)du\rho_{\max}\right)\left(1-\int_0^{\rho_{\max}}P(u)du-\int_0^{2\rho_{\max}}Q(u)du\right)^{-1}\le$$

$$\le\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\int_0^{r}P(u)udu+\int_0^{r}Q(u)du\right)\rho_{\max}\left(1-\int_0^{r}P(u)du-\int_0^{2r}Q(u)du\right)^{-1}\le\frac{\rho_{\max}}{r}<1.$$

Покладемо $A_k=F'(x_k)+G(x_{k-1},x_k)$. Якщо $x_k\in B(x^*,r)$, то згідно з (16), (17) за теоремою Банаха про обернений оператор [1] отримаємо оцінку

$$\left\|A_k^{-1}H'(x^*)\right\|\le\left\|\left(I-(I-H'(x^*)^{-1}A_k)\right)^{-1}\right\|\le\left\|\left(I-H'(x^*)^{-1}(H'(x^*)-A_k)\right)^{-1}\right\|\le$$

$$\le\left\|\left(I-H'(x^*)^{-1}(F'(x^*)-F'(x_k)+G'(x^*)-G(x_{k-1},x_k)\right)^{-1}\right\|\le$$

$$\le\left(1-\int_0^{\rho(x_k)}P(u)du-\int_0^{\rho(x_{k-1})+\rho(x_k)}Q(u)du\right)^{-1}.$$

Виконавши тотожні перетворення

$$x_{k+1}-x^*=x_k-x^*-A_k^{-1}\left(F(x_k)+G(x_k)-F(x^*)-G(x^*)\right)=$$
$$=-A_k^{-1}\left[F(x_k)+G(x_k)-F(x^*)-G(x^*)-\left(F'(x_k)+G(x_{k-1},x_k)\right)\left(x_k-x^*\right)\right]=$$
$$=A_k^{-1}H'(x^*)H'(x^*)^{-1}\left(\int_0^1\left(F'(x_k)-F'(x_k^\tau)\right)\left(x_k-x^*\right)d\tau+\left(-G(x^*,x_k)+G(x_{k-1},x_k)\right)\left(x_k-x^*\right)\right),$$

де $x_k^\tau=x^*+\tau(x_k-x^*)$, за лемами 1 та 2 із використанням попередньої нерівності отримаємо оцінки

$$\left\|x_{k+1}-x^*\right\|\le\left\|A_k^{-1}H'(x^*)\right\|\times$$

$$\times\left\|H'(x^*)^{-1}\left(\int_0^1\left(F'(x_k)-F'(x_k^\tau)\right)\left(x_k-x^*\right)d\tau+\left(G(x_{k-1},x_k)-G(x^*,x_k)\right)\left(x_k-x^*\right)\right)\right\|\le$$

$$\le\left\|A_k^{-1}H'(x^*)\right\|\left(\left\|H'(x^*)^{-1}\int_0^1\left(F'(x_k)-F'(x_k^\tau)\right)\left(x_k-x^*\right)d\tau\right\|+\right.$$

$$\left.+\left\|H'(x^*)^{-1}\left(G(x_{k-1},x_k)-G(x^*,x_k)\right)\left(x_k-x^*\right)\right\|\right)\le$$

$$\le\left\|A_k^{-1}H'(x^*)\right\|\left(\int_0^1\int_{\tau\rho(x_k)}^{\rho(x_k)}P(u)dud\tau+\int_0^{\rho(x_{k=1})}Q(u)du\right)\left\|x_k-x^*\right\|\le$$

$$\le\left\|A_k^{-1}H'(x^*)\right\|\left(\int_0^{\rho(x_k)}P(u)udu+\int_0^{\rho(x_{k=1})}Q(u)du\rho(x_k)\right)\le$$

$$\le \left(\int_0^{\rho(x_k)} P(u)udu + \int_0^{\rho(x_{k-1})} Q(u)du\rho(x_k) \right) \left(1 - \int_0^{\rho(x_k)} P(u)du - \int_0^{\rho(x_{k-1})+\rho(x_k)} Q(u)du \right)^{-1}.$$

Далі, для $k = 0$

$$\left\| x_1 - x^* \right\| \le \left(\frac{1}{\rho(x_0)^2} \int_0^{\rho(x_0)} P(u)udu\rho(x_0)^2 + \frac{1}{\rho(x_{-1})} \int_0^{\rho(x_{-1})} Q(u)du\rho(x_{-1})\rho(x_0) \right) \times$$

$$\times \left(1 - \int_0^{\rho(x_0)} P(u)du - \int_0^{\rho(x_{-1})+\rho(x_0)} Q(u)du \right)^{-1} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} P(u)udu\rho_{\max}\rho(x_0) + \frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} Q(u)du\rho_{\max}\rho(x_0) \right) \times$$

$$\times \left(1 - \int_0^{\rho_{\max}} P(u)du - \int_0^{2\rho_{\max}} Q(u)du \right)^{-1} = q\rho(x_0) = q\left\| x_0 - x^* \right\| < \left\| x_0 - x^* \right\|.$$

Отже, $x_1 \in B(x^*, r)$. Тоді для всіх $k = 1,2,...$ можна повторити

$$\left\| x_{k+1} - x^* \right\| \le \left(\frac{1}{\rho(x_k)^2} \int_0^{\rho(x_k)} P(u)udu\rho(x_k)^2 + \frac{1}{\rho(x_{k-1})} \int_0^{\rho(x_{k-1})} Q(u)du\rho(x_{k-1})\rho(x_k) \right) \times$$

$$\times \left(1 - \int_0^{\rho(x_k)} P(u)du - \int_0^{\rho(x_{k-1})+\rho(x_k)} Q(u)du \right)^{-1} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} P(u)udu\rho(x_k)^2 + \frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} Q(u)du\rho(x_{k-1})\rho(x_k) \right) \times \quad (21)$$

$$\times \left(1 - \int_0^{\rho(x_k)} P(u)du - \int_0^{\rho(x_{k-1})+\rho(x_k)} Q(u)du \right)^{-1} \le \left(\frac{1}{\rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} P(u)udu + \frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} Q(u)du \right) \times$$

$$\times \left(1 - \int_0^{\rho_{\max}} P(u)du - \int_0^{2\rho_{\max}} Q(u)du \right)^{-1} \rho(x_{k-1})\rho(x_k) = \frac{q}{\rho_{\max}} \rho(x_{k-1})\rho(x_k) < q\rho(x_k) < \rho(x_k).$$

За математичною індукцією, всі $x_k \in B(x^*, r)$ і $\rho(x_k) = \left\| x - x^* \right\|$ монотонно спадає. Тому для всіх $k = 0,1,2,...$ отримаємо

$$\left\| x_{k+1} - x^* \right\| \le \frac{q}{\rho_{\max}} \rho(x_{k-1})\rho(x_k) \le q^{\Phi_{k+2}-1} \left\| x_0 - x^* \right\|.$$

Таким чином, отримали (19). З нерівності (19) випливає, що порядок збіжності методу Ньютона-хорд дорівнює $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Зауважимо, що у випадку $G(x) \equiv 0$ з (21) випливає квадратична збіжність ітераційного процесу (4), який збігається з методом Ньютона.

Область єдиності розв'язку

Лема 3 [8]. *Нехай* $g(t)=\frac{1}{t}\int_0^t P(u)(t-u)du,\ 0\le t\le r$, *де* $P(u)$ *– додатна інтегровна функція на* $[0,r]$. *Тоді* $g(t)$ *монотонно зростаюча відносно* t.

Теорема 2. *Нехай* $H(x^*)=0$, $H'(x^*)^{-1}$ *існує,* F *має неперервну похідну, а* G *має поділені різниці, які задовольняють узагальнені умови Ліпшиця*

$$\left\|H'(x^*)^{-1}(F'(x)-F'(x^*))\right\|\le\int_0^{\rho(x)}P(u)du\,, \tag{22}$$

$$\left\|H'(x^*)^{-1}(G(x,x^*)-G'(x^*))\right\|\le\int_0^{\rho(x)}Q(u)du\,, \tag{23}$$

де $x\in B(x^*,r)$, $\rho(x)=\left\|x-x^*\right\|$ *і* P,Q *додатні інтегровні функції. Нехай* r *задовольняє нерівність*

$$\frac{1}{r}\int_0^r P(u)(r-u)du+\int_0^r Q(u)du\le 1. \tag{24}$$

Тоді рівняння $H(x)=0$ *має єдиний розв'язок* x *в* $B(x^*,r)$.

Д о в е д е н н я. Виберемо довільно $x_0\in B(x^*,r)$ і розглянемо ітерацію

$$x_{k+1}=x_k-\left[F'(x^*)+G'(x^*)\right]^{-1}\left(F(x_k)+G(x_k)\right),\ k=0,1,2,\ldots \tag{25}$$

Отримаємо

$$x_1-x^*=-H'(x^*)^{-1}\Big(F(x_0)+G(x_0)-F(x^*)-G(x^*)+H'(x^*)(x_0-x^*)\Big)=$$
$$=\int_0^1 H'(x^*)^{-1}\left(F'(x^*)-F'(x_0^\tau)\right)\left(x_0-x^*\right)dt+H'(x^*)^{-1}\left(G(x^*,x_0)-G'(x^*)\right)\left(x_0-x^*\right),$$

де $x_0^\tau=x^*+\tau(x_0-x^*)$. Тоді за умов (22), (23) отримуємо

$$\begin{aligned}\left\|x_1-x^*\right\|&=\left\|\int_0^1\int_0^{\tau\rho(x_0)}P(u)du\,\rho(x_0)d\tau+H'(x^*)^{-1}\left(G(x^*,x_0)-G'(x^*)\right)\left(x_0-x^*\right)\right\|\le\\&\le\int_0^{\rho(x_0)}P(u)\left(\rho(x_0)-u\right)du+\left\|H'(x^*)^{-1}\left(G(x^*,x_0)-G'(x^*)\right)\left(x_0-x^*\right)\right\|\le\\&\le\int_0^{\rho(x_0)}P(u)\left(\rho(x_0)-u\right)du+\int_0^{\rho(x_0)}Q(u)du\,\rho\left(x_0\right).\end{aligned}\tag{26}$$

Звідси, згідно з (24) за лемою 3 отримуємо

$$q_0:=\frac{1}{\rho(x_0)}\int_0^{\rho(x_0)}P(u)\left(\rho(x_0)-u\right)du+\int_0^{\rho(x_0)}Q(u)du<$$
$$<\frac{1}{r}\int_0^r P(u)(r-u)du+\int_0^r Q(u)du\le 1.$$

З нерівності (26) випливає

$$\left\|x_1-x^*\right\|\le q_0\left\|x_0-x^*\right\|.$$

Отже, ітераційний процес (25) можна продовжити нескінченно і

$$\left\|x_k-x^*\right\|\le q_0^k\left\|x_0-x^*\right\|,\ k=1,2,\ldots.$$

Тому $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$. Але якщо x_0 задовольняє $F(x_0)+G(x_0)=0$, то $x_k = x_0$. Таким чином, виходить, що $x_0 = x^*$.

Наслідки. Традиційними припущеннями при вивченні ітераційних процесів Ньютона та хорд є звичайні умови Ліпшиця, які використовують сталі Ліпшиця.

Наслідок 1. *Нехай* $H(x)=F(x)+G(x)=0$, *існує* $H'(x^*)^{-1}$, F *має неперервні похідні і* G *має поділені різниці, які задовольняють умови Ліпшиця*

$$\left\|H'(x^*)^{-1}(F'(x)-F'(x^*+\tau(x-x^*))\right\| \le (1-\tau)P\left\|x-x^*\right\|,$$

$$\left\|H'(x^*)^{-1}(G(x,y)-G(u,v))\right\| \le Q\left(\|x-u\|+\|y-v\|\right)$$

для всіх $x,y,u,v \in B(x^*,r)$, $0\le\tau\le 1$, *де* P,Q *– додатні числа і* $r=\dfrac{2}{3(P+2Q)}$.

Тоді метод Ньютона-хорд (4) збігається до розв'язку x^* *для всіх* $x_{-1}, x_0 \in B(x^*,r)$ *і для* $q=\dfrac{1}{2}\dfrac{(P+2Q)\rho_{\max}}{(1-(P+2Q)\rho_{\max})}$ *справджуються оцінки* (19).

Зазначимо, що отриманий радіус збіжності співпадає з $r=\dfrac{2}{3P}$ для методу Ньютона розв'язування рівняння $F(x)=0$ [3, 8] і з $r=\dfrac{1}{3Q}$ для методу хорд розв'язування рівняння $G(x)=0$ [3, 4].

Наслідок 2. *Нехай* $H(x)=F(x)+G(x)=0$, *існує* $H'(x^*)^{-1}$, F *має неперервні похідні й* G *має поділені різниці, які задовольняють умови Ліпшиця*

$$\left\|H'(x^*)^{-1}(F'(x)-F'(x^*)\right\| \le P\left\|x-x^*\right\|,$$

$$\left\|H'(x^*)^{-1}(G(x,x^*)-G'(x^*))\right\| \le Q\left\|x-x^*\right\|$$

для всіх $x\in B(x^*,r)$, *де* P,Q *– додатні числа і* $r=\dfrac{2}{P+2Q}$. *Тоді рівняння* $H(x)=0$ *має єдиний розв'язок в* $B(x^*,r)$.

Зауважимо, що отриманий радіус області єдиності розв'язку збігається з $r=\dfrac{2}{P}$ для методу Ньютона розв'язування рівняння $F(x)=0$ [8] і з $r=\dfrac{1}{Q}$ для методу хорд розв'язування рівняння $G(x)=0$ [3, 4].

Висновки. Для розв'язування нелінійних операторних рівнянь, які містять диференційовану і недиференційовану частини, застосовано комбінований метод Ньютона-хорд. Уведено узагальнені умови Ліпшиця для поділених різниць, частковим випадком яких є звичайні умови з константою Ліпшиця. Запропоновано методику доведення локальної збіжності ітераційного процесу, за якою встановлено умови та порядок збіжності комбінованого методу Ньютона-хорд, встановлено область єдиності розв'язку. Цю методику можна застосувати для дослідження інших комбінованих методів розв'язування нелінійних задач.

Conclusions. For solving nonlinear operator equations that contain differentiable and nondifferentiable parts, a combined Newton-Secant method has been used. The generalized Lipschitz conditions for divided differences, partial case of which are the usual conditions with the Lipschitz constant have been introduced. The methodology of proof of the local convergence of the iterative process, which establishes conditions and the order of convergence of the combined Newton-Secant method, has been suggested. The uniqueness ball for the solution has been established. This methodology can be applied to investigation of other combined methods for solving nonlinear problems.

Список використаної літератури

1. Канторович, Л.В. Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
2. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными [Текст] / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
3. Argyros, I.K. On an algorithm for solving nonlinear operator equation / Argyros I.K. – Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 1991. – Vol. 10, № 1. – P. 83 – 92.
4. Шахно, С.М. Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь [Текст] / С.М. Шахно. – Математичні студії. 2004. – Т. 22, № 1. – С. 9 – 86.
5. Argyros, I. A Unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space / Argyros I.K – J. Math. Anal. Appl, 2004. – T. 298. – P. 374 – 397.
6. Hernandez, M.A. The Secant method for nondifferentiable operators / Hernandez M.A., Rubio M.J. – Appl. Math. Lett, 2002. – Vol. 15. – P. 395 – 399.
7. Шахно, С.М. Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором [Текст] / С.М. Шахно, Г.П. Ярмола. – Математичні студії. – 2010. – Т. 36, № 2. – С. 213 – 220.
8. Wang, X. Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space / Wang X – IMA Journal of Numerical Analysis, 2000. – Vol. 20. – P. 123 – 134.
9. Shakhno, S.M. On the Secant method under the generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator / Shakhno S.M. – Proc. Appl. Math. Mech. 2007. – Vol. 7. – Issue 1. – P. 2060083-2060084.
10. Шахно, С.М. Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для розділених різниць першого порядку [Текст] / С.М. Шахно // Математичний вісник НТШ. – 2007. − Т. 4. − С. 296 – 305.
11. Shakhno, S.M. On a two-step iterative process under generalized Lipschitz conditions for first-order divided differences / Shakhno S.M. – Journal of Mathematical Sciences, 2010. – Vol. 168, No 4. – P. 576 – 584.

Отримано 20.01.2013