

УДК 539.3

Г. Габрусєв, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

ВЗАЄМОДІЯ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ІЗ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИМ ІЗОТРОПНИМ ШАРОМ, ЩО ЗЧІПЛЕНИЙ ІЗ ЖОРСТКОЮ ОСНОВОЮ

Резюме. Отримано формули для визначення контактних напружень у шарі, в який втискується абсолютно гладкий штамп за наявності в шарі залишкових деформацій, що зумовлені зосередженим нагрівом при зварюванні. Наведено числовий приклад і показано, що наявність у шарі залишкових деформацій суттєво впливає на величину і характер розподілу контактних напружень.

Ключові слова: напруження, ізотропний шар, кільцевий штамп, залишкові деформації, попередні напруження.

H. Habrusiev

INTERACTION OF ANNULAR PUNCH WITH PRESTRESSED RIGID BASED ISOTROPIC LAYER

Summary. Increase of reliability and durability of structures and mechanisms is one of the most actual tasks of modern construction and engineering. Residual deformation is known to occur almost always in the structural elements and machine parts. The nature of their appearance can be very different: irreversible deformation (plasticity, creep), structural changes in the material, changes of the aggregate state in some areas, mechanical, chemical and technological processes, etc. Taking into account the residual deformation while calculating welded structures is of special importance. Resulted stress can cause fracture and accelerate some phase transitions, corrosion.

When the residual strains under development of the important structural elements of machines and installations is taken into account, the material strength life can be estimated more accurately which can result in reduce of its costs, while maintaining the necessary functional characteristics of the elements in general. That is why the study of the contact interaction of the elastic bodies with residual deformations is up to date and will remain in the future.

The isotropic layer has thickness h and is fused with rigid base. The perfectly smooth hard annular punch is pressed forward (without rotation) in the layer (Fig. 1). Smoothness means that the interface tangential stresses are equal to zero. Absence of rotation means that the efforts which are applied to the punch can be reduced to the resultant force, which is directed along the axis of the punch. In the contact area the punch is limited by the surface of rotation, which consists of three parts: planes for $r_1 \leq r \leq r_2$ and parabolas with tips at points r_1 and r_2 . On the upper surface of the layer heating caused by welding was concentrated which resulted in the field of residual deformations.

The problem is treated as the construction of the solution of the integral equations with kernels involving the Bessel functions. The author has developed a method of approximate solutions of this type. The main idea of this method is to represent the unknown distribution function of the contact stresses as the Fourier series with unknown coefficients and to construct a system of the linear equations to find them.

To demonstrate the proposed methods the numerical example of the construction of the contact stresses distribution function is presented in the paper. Formulae for finding contact stresses in the layer, in which perfectly smooth punch is pressed, when residual deformations are available in the layer caused by the localized heating under welding, are obtained.

Besides, the residual deformation field characteristics effect on the amount and nature of the contact stresses under punches, has been analyzed.

Key words: contact stresses, annular punch, isotropic layer, residual deformations.

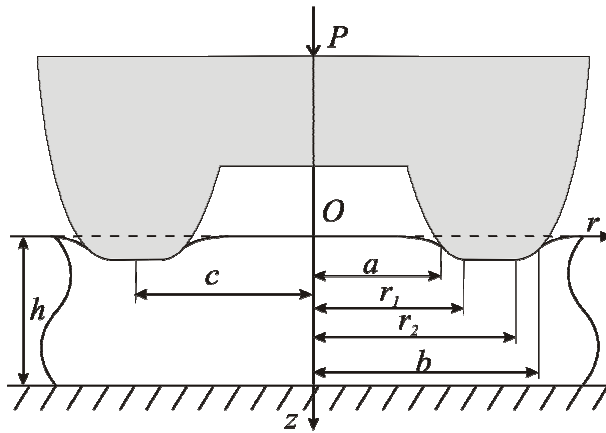


Рисунок 1. Схема контактної взаємодії.
Figure 1. Scheme of contact interaction.

Вступ. Визначення міцності елементів конструкцій при їх контактній взаємодії знаходить широке застосування у будівництві, машинобудуванні, приладобудуванні та інших галузях промисловості. Вплив температурних полів на характер контактної взаємодії досліджено в багатьох працях, зокрема в [1]. Для зварних конструкцій також актуальним є дослідження впливу залишкових зварювальних напружень на величину та характер розподілу напружень при контактній взаємодії їх

елементів з твердими жорсткими або пружними масивними тілами (штампами, бандажами) [2]. Нехтування залишковими деформаціями не дозволяє точно оцінювати реальний напружений стан, що може призвести до руйнування зразків або ж до невиправданого збільшення витрат матеріалу. Врахування залишкових деформацій при дослідженні контактної взаємодії пружних тіл є надзвичайно важливим завданням сьогодні та залишатиметься таким у майбутньому. Саме тому даній проблематиці присвячують свої дослідження багато вітчизняних та закордонних учених [3].

Метою роботи є побудова функції, що описує поле контактних напружень під жорстким кільцевим штампом. Використовуючи отриману функцію, дослідити вплив поля залишкових деформацій на розподіл напружень у ізотропному шарі.

Постановка задачі. Нехай в ізотропний шар товщиною h , який віднесений до циліндричної системи координат r, θ, z , що спаяний з жорсткою основою, втискується поступально (без повороту) абсолютно гладкий кільцевий штамп силою P (рис. 1). Гладкість означає, що на поверхні контакту дотичні напруження дорівнюють нулю; відсутність повороту свідчить, що зусилля, які прикладені до штампа, зводяться до рівнодійної, спрямованої вздовж осі штампа. В області контакту штамп обмежений поверхнею, утвореною обертанням навколо осі Oz лінії, що складається з трьох частин: відрізка прямої, перпендикулярної до осі обертання при $r_1 \leq r \leq r_2$, та двох парабол із фокальними параметрами p_1 та p_2 і вершинами в точках r_1 та r_2 відповідно.

В циліндричній системі координат з початком на верхній площині шару функцію $W(r)$, яка описує вертикальні переміщення точок області контакту шару зі штампом, можна записати так:

$$\begin{aligned}
 W(r) &= W(a) + 2p_1 \left[(r_1 - a)^2 - (r_1 - r)^2 \right], \quad a \leq r \leq r_1; \\
 W(r) &= W(a) + 2p_1 (r_1 - a)^2, \quad r_1 < r \leq c; \\
 W(r) &= W(b) + 2p_2 (r_2 - b)^2, \quad c < r \leq r_2; \\
 W(r) &= W(b) + 2p_2 \left[(r_2 - b)^2 - (r_2 - r)^2 \right], \quad r_2 < r \leq b.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Тут c – середина відрізка $[r_1; r_2]$.

На верхній поверхні шару відбувся зосереджений нагрів при зварюванні й у шарі виникло поле залишкових деформацій, яке на основі експериментальних даних можна описати виразами [4]

$$\varepsilon_{rr}^0 = -\varepsilon_0(1 - \omega p^2 r^2) e^{-p^2 r^2} f(z), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = -\varepsilon_0(1 + \omega p^2 r^2) e^{-p^2 r^2} f(z),$$

$$\varepsilon_{zz}^0 = -(\varepsilon_{rr}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0), \quad \varepsilon_{r\theta}^0 = \varepsilon_{rz}^0 = \varepsilon_{z\theta}^0, \quad f(z) = C_0 + \sum_{n=1}^{N_1} C_n \cos \frac{n\pi z}{h}.$$

Результати дослідження. Диференціальні рівняння рівноваги тіла із залишковими деформаціями в осесиметричному випадку записуємо у вигляді

$$\mu \nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r} + 2\mu \left[\frac{\partial \varepsilon_{rr}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} (\varepsilon_{rr}^0 - \varepsilon_{\varphi\varphi}^0) \right] = 0,$$

$$\mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} - 2\mu \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_{rr}^0 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^0) = 0.$$

Частинний розв'язок рівнянь рівноваги будемо за допомогою двох ключових функцій φ та ψ , які задовольняють рівняння Пуасона

$$\nabla^2 \psi = F(r, z) - 2(\omega^0(r, z) - \varepsilon_{zz}^0),$$

$$\nabla^2 \varphi = F(r, z), \tag{2}$$

$$\omega^0(r, z) = \varepsilon_{rr}^0 + \int \frac{1}{r} (\varepsilon_{rr}^0 - \varepsilon_{\theta\theta}^0) dr,$$

а функція $F(r, z)$ задовольняє рівняння

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 F = 2\mu \nabla^2 \omega^0 + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\omega^0 - \varepsilon_{zz}^0). \tag{3}$$

Розв'язавши рівняння (2), (3), знайдемо функції F , φ , ψ :

$$F(r, z) = -m_1(1 + \omega - \omega p^2 r^2) e^{-p^2 r^2} f(z) - \frac{m_2 \pi^2}{2p^2} \sum_{n=1}^S n^2 C_n \cos \frac{\pi n z}{h} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \left(3 + \frac{\omega \alpha^2}{4p^2} \right) e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}} J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) &= \frac{m_1}{2p^2} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2} \right) e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}} J_0(\alpha r) d\alpha + \frac{h^2}{2p^2} \sum_{n=1}^S C_n \cos \frac{\pi n z}{h} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \times \\ &\times \left[m_1 \left(1 + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2} \right) + \frac{m_2 \pi^2 n^2}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \left(3 + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2} \right) \right] e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}} \cdot J_0(\alpha r) d\alpha, \\ \psi(r, z) &= \varphi(r, z) - \frac{1}{p^2} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left(3 + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2} \right) e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}} \cdot J_0(\alpha r) d\alpha - \\ &- \frac{h^2}{p^2} \sum_{n=1}^S C_n \cos \frac{\pi n z}{h} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \left(3 + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2} \right) e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}} \cdot J_0(\alpha r) d\alpha. \end{aligned}$$

Компоненти напруженого стану $\bar{\sigma}_{ij}$, що відповідають частинному розв'язку рівнянь рівноваги, визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{G\varepsilon_0} &= m_2 \left\{ 2(\nu - 2 - \nu\omega + \omega\nu p^2 r^2) e^{-p^2 r^2} f(z) + \frac{\pi^2}{p^2} \sum_{n=1}^S n^2 C_n \cos \frac{\pi n z}{h} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \times \right. \\ &\times \left[\nu \Phi_2(\alpha) + 5 - 4\nu + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2} - \frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \Phi_2(\alpha) \right] e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}} \cdot J_0(\alpha r) d\alpha \left. \right\}; \\ \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{G\varepsilon_0} &= \frac{m_2 h \pi}{p^2} \sum_{n=1}^S n C_n \sin \frac{\pi n z}{h} \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \times \\ &\times \left[\nu - 2 - \nu \frac{\omega\alpha^2}{4p^2} + \frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \Phi_2(\alpha) \right] e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}} \cdot J_1(\alpha r) d\alpha; \\ \Phi_1(\alpha) &= 1 + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2}, \quad \Phi_2(\alpha) = 3 + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2}, \quad m_1 = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}, \quad m_2 = \frac{1}{1 - \nu}. \end{aligned}$$

Формули для визначення напружень у шарі запишемо так:

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij},$$

де складові $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$, що відповідають загальному розв'язку рівнянь рівноваги, виражаються функцією Лява L , яку у випадку осової симетрії зручно представити через інтеграл Ганкеля

$$L = \int_0^\infty \alpha^{-2} \left[A(\alpha) \operatorname{sh} \alpha z + B(\alpha) \operatorname{ch} \alpha z + \alpha z (C(\alpha) \operatorname{sh} \alpha z + D(\alpha) \operatorname{ch} \alpha z) \right] \cdot J_0(\alpha z) d\alpha.$$

Задовольняючи граничні умови $\sigma_{rz} = 0$ при $z = 0$; $u_z = 0$ при $z = h$ та $u_r = 0$ при $z = h$, отримаємо систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно функцій $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$.

$$2\nu C + B = 0,$$

$$\left[2(1 - 2\nu)C - B - \alpha h D \right] \operatorname{ch} \alpha h + \left[2(1 - 2\nu)D - A - \alpha h C \right] \operatorname{sh} \alpha h = 0, \quad (4)$$

$$[A + D + \alpha h C] ch \alpha h + [B + C + \alpha h D] sh \alpha h = 0.$$

Виразимо $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $D(\alpha)$ через $C(\alpha)$ зі співвідношень (4)

$$A(\alpha) = \frac{8(1-\nu)^2 + 2\nu(3-4\nu)sh^2\alpha h}{(3-4\nu)ch\alpha h \cdot sh\alpha h - \alpha h} C(\alpha), \quad B(\alpha) = -2\nu C(\alpha),$$

$$D(\alpha) = \frac{2(\nu-1) + (4\nu-3)sh^2\alpha h}{(3-4\nu)ch\alpha h \cdot sh\alpha h - \alpha h} C(\alpha).$$

Задовольняючи граничні умови $\sigma_{zz} = 0$ при $z = 0$, $0 \leq r \leq a$, $r > b$ та $u_z = w(r)$ при $a \leq r \leq b$, доходимо до інтегральних рівнянь задачі

$$\int_0^\infty C(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = \frac{m_1}{2} W(r), \quad a \leq r \leq b, \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \alpha \left[-\frac{2G}{1-2\nu} \frac{C(\alpha)}{\Delta^*(\alpha)} + 2G(f_1(\alpha) + f_2(\alpha)) \right] \times J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad r \geq b \quad (6)$$

$$f_1(\alpha) = \frac{m_2}{2} \left(\frac{\nu-2}{p^2} - \frac{\nu \omega \alpha^2}{4p^4} \right) \left(C_0 + \sum_{n=1}^s C_n n^2 \right) e^{-\frac{\alpha^2}{4p^4}},$$

$$f_2(\alpha) = \frac{m_2}{2} \frac{\pi^2}{p^2} \sum_{n=1}^s \frac{C_n n^2}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \times \left[\left(\nu - \frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \right) \Phi_2(\alpha) + 5 - 4\nu + \frac{\omega \alpha^2}{4p^2} \right] e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}}$$

$$\Delta^*(\alpha) = \frac{(4\nu-3)ch\alpha h \cdot sh\alpha h + \alpha h}{22\nu - 12\nu^2 - 10 + (4\nu-3)sh^2\alpha h}.$$

Рівняння (6) запишемо у вигляді

$$\int_0^\infty \alpha \left\{ -\frac{2G}{1-2\nu} \cdot \frac{C(\alpha)}{\Delta^*(\alpha)} + 2G\varepsilon_0^*(f_1(\alpha) + f_2(\alpha)) \right\} \times J_0(\alpha r) d\alpha = X(r) [u(r-a) - u(r-b)], \quad 0 \leq r < \infty, \quad (7)$$

де $u(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Застосуємо до співвідношення (7) теорему обернення інтегрального перетворення Ганкеля

$$-\frac{2G}{1-2\nu} \cdot \frac{C(\alpha)}{\Delta^*(\alpha)} + 2G\varepsilon_0^*(f_1(\alpha) + f_2(\alpha)) = \int_a^b r X(r) J_0(\alpha r) dr = \Psi(\alpha). \quad (8)$$

Виберемо функцію $X(r)$ у вигляді

$$X(r) = \sum_{n=1}^N a_n L_n(r), \quad (9)$$

де $L_n(r) = J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right) \cdot N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) \cdot N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)$, a_n – невідомі поки що коефіцієнти, а

γ_n – додатні корені рівняння $J_0\left(\frac{b}{a}x\right) \cdot N_0(x) - J_0(x) \cdot N_0\left(\frac{b}{a}x\right) = 0$, $J_0(x)$ та $N_0(x)$ –

циліндричні функції.

Відзначимо, що функція $X(r)$ визначає шукані контактні напруження під штампом. Обчислимо інтеграл (8), враховуючи вираз (9) для функції $X(r)$

$$\Psi(\alpha) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2} \times \left[\frac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R_n \right], \quad (10)$$

$$R_n = \frac{b}{a} \gamma_n \left[N_0(\gamma_n) J_1\left(\frac{b}{a} \gamma_n\right) - J_0(\gamma_n) N_1\left(\frac{b}{a} \gamma_n\right) \right].$$

З (8) знайдемо

$$C(\alpha) = -\frac{1-2\nu}{2G} \Delta^*(\alpha) \Psi(\alpha) + (1-2\nu) \Delta^*(\alpha) \varepsilon_0^*(f_1(\alpha) + f_2(\alpha)). \quad (11)$$

Підставимо (11) в (5) й отримаємо вираз для $W(r)$ через функцію $\Psi(\alpha)$

$$W(r) = \frac{2}{m_1} \int_0^\infty \left[-\frac{1-2\nu}{2G} \Delta^*(\alpha) \Psi(\alpha) + (1-2\nu) \varepsilon_0^* \Delta^*(\alpha) (f_1(\alpha) + f_2(\alpha)) \right] J_0(\alpha r) d\alpha, \quad a \leq r \leq b. \quad (12)$$

Застосувавши вираз (12), зі співвідношень (1) матимемо

$$W(r) - W(a) = \frac{2(1-2\nu)}{m_1} \int_0^\infty \left(-\frac{\Delta^*(\alpha) \Psi(\alpha)}{2G} + \varepsilon_0^* \Delta^*(\alpha) (f_1(\alpha) + f_2(\alpha)) \right) \times \\ \times [J_0(\alpha r) - J_0(\alpha a)] d\alpha = \frac{1}{2R_1} \left[(r_1 - a)^2 - (r_1 - r)^2 u(r_1 - r) \right], \quad a \leq r < c; \quad (13)$$

$$W(r) - W(b) = \frac{2(1-2\nu)}{m_1} \int_0^\infty \left(-\frac{\Delta^*(\alpha) \Psi(\alpha)}{2G} + \varepsilon_0^* \Delta^*(\alpha) (f_1(\alpha) + f_2(\alpha)) \right) \times \\ \times [J_0(\alpha r) - J_0(\alpha b)] d\alpha = \frac{1}{2R_2} \left[(r_2 - b)^2 - (r_2 - r)^2 u(r - r_2) \right], \quad c \leq r \leq b \quad (14)$$

Додамо співвідношення (13) і (14), помножимо обидві частини рівності на $rJ_0(r\gamma_n)$ та проінтегруємо отримане рівняння по r від a до b .

$$-\sum_{n=1}^N a_n \int_0^\infty \frac{\Delta^*(\alpha)}{\alpha^2 - \frac{\gamma_n^2}{a^2}} \left[\frac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R_n \right] \frac{1}{2G} I_n(\alpha) d\alpha = \\ = \frac{p_1 m_1}{(1-2\nu)} \left[(r_1 - a)^2 \int_a^c r J_0(r\gamma_n) dr - \int_a^{r_1} r (r_1 - r)^2 J_0(r\gamma_n) dr \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{p_2 m_1}{(1-2\nu)} \left[(r_2 - b)^2 \int_c^b r J_0(r \gamma_n) dr - \int_{r_2}^b r (r_2 - r)^2 J_0(r \gamma_n) dr \right] - \\
 & - \int_0^\infty \varepsilon_0^* \Delta^*(\alpha) (f_1(\alpha) + f_2(\alpha)) I_n(\alpha) d\alpha, \tag{15}
 \end{aligned}$$

де $I_n(\alpha) = \int_a^b r J_0(\alpha r) J_0(\gamma_n r) dr - J_0(\alpha a) \int_a^c r J_0(\gamma_n r) dr - J_0(\alpha b) \int_c^b r J_0(\gamma_n r) dr$.

Для побудови розв'язку задачі покладемо

$$a_n = \frac{2p_1 m_1 G}{1-2\nu} a_n^{(1)} + \frac{2p_2 m_1 G}{1-2\nu} a_n^{(2)} + 2G\varepsilon_0^* a_n^{(3)}. \tag{16}$$

Застосувавши метод суперпозиції з рівняння (15), отримаємо три системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $a_n^{(3)}$.

$$\sum_{n=1}^N a_n^{(i)} K_{jn} = F_j^*, \quad j = \overline{1, N}; \quad i = 1, 2, 3,$$

де $K_{jn} = - \int_0^\infty \frac{a^2 \Delta^*(\alpha)}{a^2 \alpha^2 - \gamma_n^2} \left[\frac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R_n \right] I_n(\alpha) d\alpha$,

$$F_1 = \frac{m_1 G}{2R_1(1-2\nu)} \left[(r_1 - a)^2 \int_a^c r J_0(r \gamma_n) dr - \int_a^{r_1} r (r_1 - r)^2 J_0(r \gamma_n) dr \right],$$

$$F_2 = \frac{m_1 G}{2R_2(1-2\nu)} \left[(r_2 - b)^2 \int_c^b r J_0(r \gamma_n) dr - \int_{r_2}^b r (r_2 - r)^2 J_0(r \gamma_n) dr \right],$$

$$F_3 = -2G\varepsilon_0^* \int_0^\infty \Delta^*(\alpha) (f_1(\alpha) + f_2(\alpha)) I_n(\alpha) d\alpha.$$

Враховуючи вирази (9) та (16), формулу для обчислення контактних напружень під штампом запишемо так:

$$\sigma_{zz}(r, 0) = \frac{2p_1 m_1 G}{1-2\nu} \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} L_n(r) + \frac{2p_2 m_1 G}{1-2\nu} \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} L_n(r) + 2G\varepsilon_0^* \sum_{n=1}^N a_n^{(3)} L_n(r). \tag{17}$$

Виходячи зі специфіки постановки задачі, а саме визначення ділянки контакту у формі кільця із заданими наперед внутрішнім радіусом a та зовнішнім радіусом b , фокальні параметри p_1 та p_2 парабол, обертанням яких утворено штамп, є невідомими. Для їх знаходження будемо вимагати виконання умови рівноваги штампа та умови рівності вертикальних переміщень точок області контакту при $r = r_1$ та $r = r_2$

$$2\pi \int_a^b r \sigma_{zz}(r, 0) dr = -P, \quad W(r_1) = W(r_2).$$

У результаті отримаємо систему двох рівнянь відносно невідомих p_1 та p_2 .

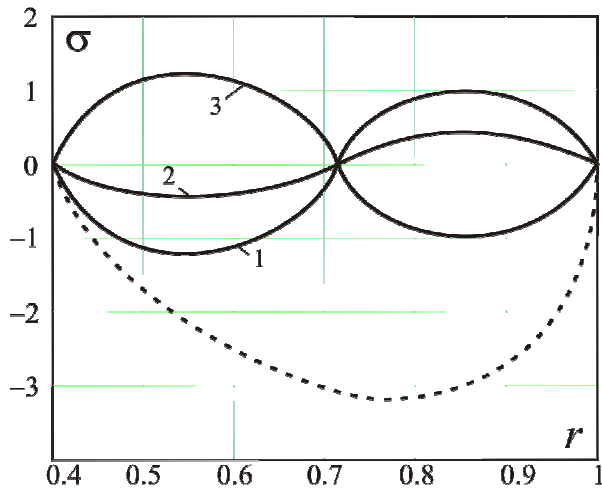


Рисунок 2. Розподіл складових напружень під штапом для наступних значень параметрів
Figure 2. Distribution of contact stresses under the punch for the following values of parameters
 $r_1 = r_2 = 0.7$, $a = 0.4$, $b = 1$, $h = 2$, $\nu = 0.3$,
1 – $c_0 = 1$, $c_1 = 0$; 2 – $c_0 = 1$, $c_1 = 0.4$;
3 – $c_0 = 1$, $c_1 = 1$

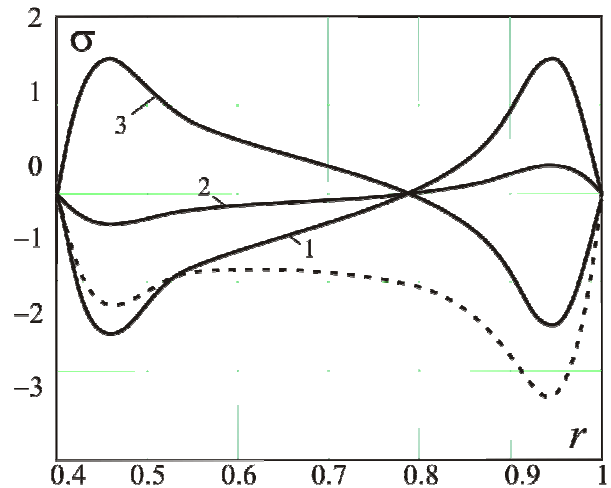


Рисунок 3. Розподіл складових напружень під штапом для наступних значень параметрів
Figure 3. Distribution of contact stresses under the punch for the following values of parameters
 $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.9$, $a = 0.4$, $b = 1$, $h = 2$, $\nu = 0.3$,
1 – $c_0 = 1$, $c_1 = 0$; 2 – $c_0 = 1$, $c_1 = 0.4$;
3 – $c_0 = 1$, $c_1 = 1$

Розглянуто приклад розв'язання систем відносно невідомих $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$ та $a_n^{(3)}$. Числовий аналіз виконано для $N = 25$. На рисунках 2–3 наведено результати розподілу безрозмірних функцій, що відповідають силівій складовій контактних напружень – пунктирна крива та складова, що зумовлена наявністю поля залишкових деформацій – криві 1, 2, 3 уздовж радіальної координати r .

Для підтвердження достовірності отриманих співвідношень розглянемо контактну взаємодію шару із кільцевим штапом без прямолінійної ділянки в основі, коли зовнішній радіус площадки контакту на порядок перевищує внутрішній, а товщина шару – зовнішній радіус площадки контакту та порівняємо результати з отриманими іншими авторами [5].

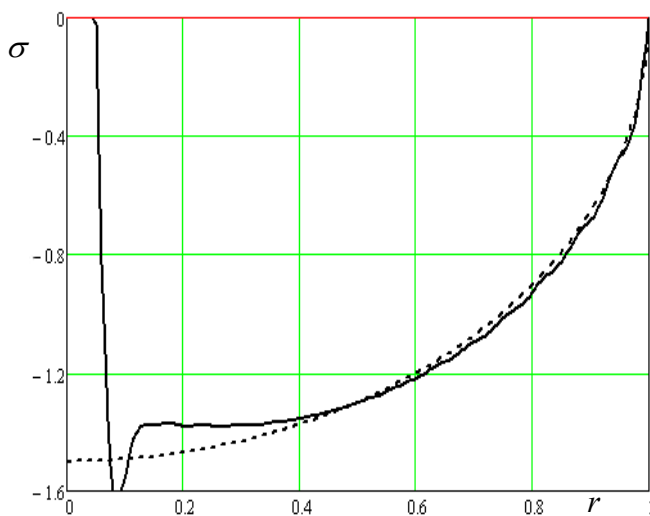


Рисунок 4. Розподіл контактних напружень
Figure 4. Distribution of contact stresses

На рисунку 4 зображено графіки функцій розподілу контактних напружень у півпросторі при взаємодії з параболоїдальним штапом [5] – пунктирна лінія та силової складової контактних напружень (17) при $h = 10$, $a = 0.05$, $r_1 = r_2 = 0.1$, $b = 1$ – суцільна лінія.

Як бачимо із рисунка 4, при $r > 0.3$ графіки функцій практично співпадають. Це можна пояснити тим, що отвір у центрі штапа уже практично не впливає на розподіл силової складової контактних напружень.

Проаналізувавши рисунок 4,

можна зробити висновок, що отримані наближеним методом результати при моделюванні півпростору шаром великої товщини практично повністю співпадають із точними результатами [5]. Це свідчить про достатню для використання при розрахунках точність розробленої методики наближеного розв'язання контактних задач.

Висновок. Залишкові напруження в шарі суттєво впливають на контактні напруження. Тому врахування залишкових деформацій є надзвичайно важливим при проведенні інженерних розрахунків, оскільки співпадання знака силової та складової, зумовленої наявністю залишкових деформацій, може значно збільшити абсолютне значення контактних напружень під штампом.

Conclusions. Residual stresses in the layer affect the contact stress significantly. Therefore, taking into account the residual strain is an extremely important for engineering calculations. Coinciding of the signs of the force component and a component of contact stresses, which is caused by residual deformations, could significantly increase the absolute value of the contact stresses under the punch.

Список використаної літератури

1. Кизыма, Я.М. Осесиметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости [Текст] / Я.М. Кизыма, Д.В. Грилицкий. – Львов: Выща школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 136 с.
2. Шелестовський, Б.Г. Контактна взаємодія штампа з шаром із залишковими деформаціями, зумовленими кільцевим зварним швом [Текст] / Б.Г. Шелестовський, Г.В. Габрусев // Машинознавство. – 2003. – № 2. – С. 9 – 12.
3. Бабич, С.Ю. Контактные задачи для упругих тел. С начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам [Текст] / С.Ю. Бабич, А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41 – 69.
4. Недосека, А.Я. Основы расчета сварных конструкций [Текст] / А.Я. Недосека. – К.: Выща школа, 1998. – 263 с.
5. Грилицкий, Д.В. Осесиметричні контактні задачі термопружності: навчальний посібник [Текст] / Д.В. Грилицкий, Б.Г. Шелестовський. – Львів: Вища школа, вид-во при ЛДУ, 1974. – 114 с.

Отримано 15.01.2013