

УДК 539.375

В. Валяшек

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗСУВНЕ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ТІЛА З ПРЯМОКУТНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА УМОВ НЕПОВНОГО КОНТАКТУ ІЗ СЕРЕДОВИЩЕМ

Резюме. Досліджено квазістатичний розвиток пластичних деформацій в околі вершин жорсткого прямокутного включення, дві паралельні грані якого до навантаження перебували в ідеальному механічному контакті з середовищем, дві інші пари – не контактували з ним. Середовище вважається ідеально пружно-пластичним, пластичні зони-континуальними. Деформація зумовлена зсувним навантаженням, прикладеним на нескінченності паралельно до вільних від контакту граней включення. Поставлено крайову задачу у напруженнях в комплексній площині поперечного перерізу тіла і зведено її до задачі Келдиша-Седова. Знайдено аналітичний роз'язок задачі, визначено напружено-деформівний стан тіла поза включенням для довільної величини навантаження і довільних співвідношень між розмірами включення. Визначено межю зони пластичних деформацій і досліджено її зміну зі зростанням навантаження. Показано, що вільні від контакту з середовищем грані включення не охоплюються пластичними деформаціями, а грані, що раніше перебували у ідеальному контакті з середовищем, лише частково охоплюються пластичними деформаціями.

Ключові слова: ідеально пружно-пластичне середовище, континуальні пластичні зони, жорстке прямокутне включення, квазістатичний розвиток, пластичні деформації, зсувне навантаження, тріщини, границя текучості.

V. Valyashok

ELASTO-SHEARING STRAIN OF THE BODY WITH THE RECTANGULAR INCLUSION UNDER THE INCOMPLETE CONTACT WITH THE ENVIRONMENT

Summary. Quasi-static development of the plastic strains in the rigid rectangular inclusion tips threshold, two parallel edges of which were in the ideal mechanical contact with the environment before loading and two other ones did not contact with it, has been investigated. The environment is considered to be ideal elasto-plastic one, its plastic areas being continuous. The strain is caused by the shearing loading applied on the infinity parallel to the contact-free inclusion edges. The boundary task in the strains of the complex area of the body cross-section is set and reduced to the Keldysh-Sedov task. Analytical solution of the task was found, stress-strain state of the body outside the inclusion for the arbitrary loading value and arbitrary ratio between the inclusion, sizes have been determined. The plastic strain area boundary has been found and its change with the loading increase has been investigated. In the area of the body cross-section the slipping lines of the elastic area are the segment of the straight line, which compose together with the inclusion unscaled edges the angles from zero to the straight one. It has been testified that contact-free with the environment inclusion edges are not subject to the plastic strains, but edges, which initially were in the ideal contact with the environment, are subject to plastic strain partially. At the initial stage of the boundary development the plastic strains area grow almost homothetically with the homothetic center in the inclusion tips. This phenomenon is true exactly enough even for the inclusions, which are of 50 % of the body material yield limit value. If the inclusion width is much less than its length and its shape it is similar to that of the crack, the picture of the plastic strains development differs greatly from that of the plastic strain development in the crack threshold.

Key words: ideal elasto-plastic environment, continuous plastic areas, rigid rectangular inclusions, quasi-static development, plastic strain, shearing loading, cracks, yield limit.

Вступ. Дослідження пружно-пластичного деформування твердих тіл з концентраторами напружень залишається важливою задачею механіки. З огляду на потреби механіки руйнування головна увага дослідників була зосередженою на дослідженні напружено-деформівного стану та розвитку пластичних деформацій в околі тріщиноподібних дефектів і достатньо тонких включень [1]. Значно слабше вивченими залишалися пружно-пластичні поля в околі включень та вирізів, далеких за формою від математичних розрізів, чи безмежно тонких включень, наприклад, прямокутних щілин [2], включень прямокутної форми [3]. Однак концентратори складніших форм часто з'являються в результаті технологічних процесів під час виробництва матеріалів і є конструктивно необхідними. Їх дослідження важливе і тому, що дає змогу з'ясувати межі застосування припущення нульової відстані між берегами тріщини, уможливорює оцінювання припущення нульової товщини для досить тонких включень. Важливими та недостатньо вивченими залишаються задачі дослідження напружено-деформівного стану (НДС) тіл із включеннями за умови їх неідеального механічного контакту з середовищем. Недосконалий зв'язок на межі включення – середовище є додатковим джерелом концентрації напружень, що може призводити до міжфазних пластичних розшарувань і, як наслідок, втрати міцності чи функціональних характеристик механічної конструкції.

Мета роботи. Дослідження напружено-деформівного стану і розвитку пластичних зон в ідеально пружно-пластичному тілі з жорстким прямокутним включенням за умови неповного контакту включення з середовищем.

Постановка задачі. У даній роботі пропонується дослідження (НДС) необмежено ідеально пружно-пластичного тіла з абсолютно жорстким включенням прямокутної форми: $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| < \infty$. Будемо вважати, що грані включення $x = \pm a, |y| \leq b$ перебувають в ідеальному механічному контакті із середовищем і що друга пара його паралельних граней $y = \pm b, |x| \leq a$ з ним не контактує. Середовище вважаємо ідеально пружно-пластичним із зсувною границею текучості, що дорівнює k . Деформація зумовлена однорідним зсувним навантаженням $\tau_{yz} = \tau_\infty$ ($\tau_\infty < k$), що діє на нескінченності паралельно до вільних від напружень граней включення.

Концентрація напружень призводитиме до появи в околі вершин $x = \pm a, y = \pm b$ включення пластичних зон, які можуть виявитися локалізованими у тонких смугах або континуально розподіленими. Міжфазне пластичне відшарування такого включення у припущенні, що від кожної вершини включення виходять дві пластичні смуги (одна вздовж межі включення – середовище по поверхні включення, яка до навантаження перебувала у контакті із середовищем і котра власне й призводила до пластичного відшарування, і друга, направлена вглиб середовища під тупими кутами до обох його граней), досліджено раніше у роботі [3]. Було показано, що довжини смуг пластичного відшарування значно перевищують довжину косих смуг. Зі збільшенням навантаження швидкість росту смуг на межі включення – середовище сповільнюється, смуги, які розвиваються назустріч одна другій, не змикаються, поки навантаження не

досягає границі текучості матеріалу. На початковій стадії розвитку спостерігався пропорційний ріст обох смуг і, поки їх довжини залишалися малими проти лінійних розмірів включення, ріст смуг та (НДС) описувався лінійною моделлю пластичної зони (ЛМПЗ) [4].

Для прямокутного включення, що розглядається у даній роботі, залишилися відкритими питання про розвиток континуальних пластичних зон, можливостей ЛМПЗ для їх аналізу, узгодженості результатів, отриманих у рамках припущень про континуальний та дискретно лінійний характер розподілів пластичних деформацій.

Формалізація задачі. Поставимо крайову задачу у напруженнях. Частину першого квадранта поза включенням і пластичною зоною комплексної площини $\zeta = x + iy$ позначимо через D , лінію-границю зони пружних та пластичних деформацій у першому квадранті позначимо L (рис. 1). Внаслідок симетрії задачі НДС досить дослідити тільки в області D . Лінія L є априорі невідомою і повинна бути визначеною у процесі розв'язання задачі. Початком лінії L є вершина включення, кінцем - точка $E(a; b-d)$, d – протяжність зони вздовж грані включення, яка залежить від величини прикладеного навантаження і теж повинна бути визначеною за розв'язком задачі. Повна межа області D складається із променя AB , відрізка BC , лінії L , відрізка DE , променя EA .

Утворена компонентами тензора напружень функція $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ є в області D аналітичною та однолистою, і задовольняє таким умовам [3]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0, \quad \zeta = iy, \quad y > b; \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0, \quad \zeta = x + ib, \quad 0 < x < a; \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0, \quad \zeta = a + iy, \quad 0 < y < b - d; \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0, \quad \zeta = x, \quad x > a; \\ \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) &= \tau_{\infty}. \end{aligned} \quad (1)$$

Від поставленої у роботі [3] крайова задача для функції $\tau(\zeta)$ відрізняється умовами на лінії L

$$\begin{aligned} |\tau(\zeta)| &= k, \quad \zeta \in L; \\ \arg \tau(\zeta) &= -\arg(\zeta - a - ib), \quad \zeta \in L. \end{aligned} \quad (2)$$

Умови (1) роз'яснено у роботі [3]. Тут конкретизуємо лише (2). Перша із них є наслідком співвідношення Губера-Мізеса у пластичній зоні та неперервності напружень на її межі L . Друга – результат умови Генкі [4], яка у даному випадку означає, що лінії ковзання є відрізками прямих, що починаються від вершин включення.

Тепер наша задача звелася до визначення лінії L , функції $\tau(\zeta)$, яка задовольняє умовам (1), (2) і додатково умові недосягнення пластичного стану в області D поза цією лінією:

$$|\tau(\zeta)| < k, \quad \zeta \in \bar{D} \wedge \zeta \notin L; \quad (3)$$

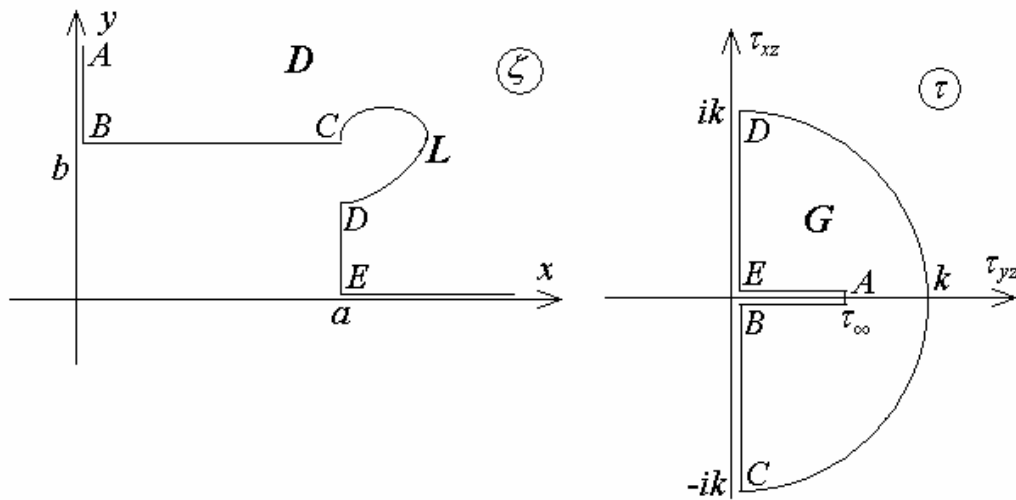


Рисунок 1. Области D і G у площинах ζ і τ

Figure 1. D and G areas in ζ and τ planes

Із умов (1), (2) випливає, що конформним образом області D у площині τ є область G , яка є повністю визначена, її границя не містить невідомих ділянок (рис. 1). Однак здійснюване функцією $\tau(\zeta)$ конформне відображення не є заданим, тому задача (1) – (3) не зводиться до пошуку конформного відображення. Але її аналогічно як у роботі [6] можна звести до задачі Келдиша-Седова [7].

Введемо площину допоміжного комплексного параметра t так, аби на цій площині області D відповідала верхня півплощина $H = \{t | \text{Im} t > 0\}$ (рис. 2). Завжди можна довільно зафіксувати по три точки на кожній з областей H . Прийнемо у цьому зв'язку, що точкам A, B, C межі області G відповідають точки $t = \infty, t = 0, t = 1$ на

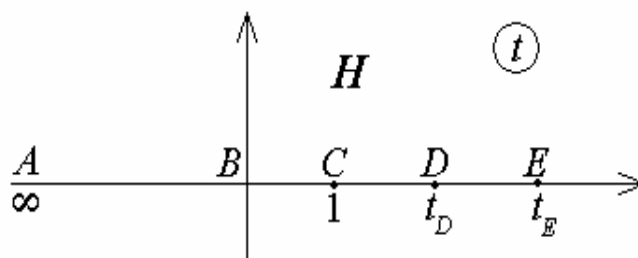


Рисунок 2. Область H у площині t

Figure 2. H area in t plane

границі області H . Координати точок D і E у площині t поки невідомі. У цьому випадку функція $\tau = \tau_1(t)$ і її обернена $t = \tau(t)$ є однозначними і можуть бути визначеними композицією елементарних відображень:

$$t = \frac{(k^2 + \tau_\infty^2)}{(k - \tau_\infty)^2} \left(\frac{\tau_\infty(k^2 - \tau^2)}{\sqrt{k^2 - \tau_\infty^2 \tau^2}(\tau_\infty^2 - \tau^2)} + 1 \right). \quad (4)$$

Тут $\sqrt{k^2 + \tau_\infty^2 \tau^2}(\tau_\infty^2 - \tau^2)$ є аналітичною у розрізаній уздовж відрізка $[-\tau_\infty; \tau_\infty]$ й променів $[-\infty; -k/\tau_\infty]$, $[k/\tau_\infty; +\infty]$ функцією, що приймає дійсні додатні значення на верхньому березі розрізу $[-\tau_\infty; \tau_\infty]$.

Із (4), поклавши $\tau = ik$ і $\tau = 0 + i0$, знаходимо, що

$$t_D = \left(\frac{k + \tau_\infty}{k - \tau_\infty} \right)^2, \quad t_E = t_D + 1. \quad (5)$$

Розв'язавши (4) відносно τ , отримуємо

$$\tau_1(t) = \frac{(k^2 + \tau_\infty^2)\sqrt{(t-t_D)(t-t_E)} - (k^2 + \tau_\infty^2)(t-t_E/2)}{2\tau_\infty\sqrt{t(t-t_E)}}, \quad (6)$$

де під $\sqrt{(t-t_D)(t-t_E)}$ і $\sqrt{t(t-t_E)}$ слід розуміти аналітичні в області H функції, що дорівнюють $t + o(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Уведемо в H нову невідому функцію

$$\lambda(t) = \tau_1(t)(\zeta_1(t) - a - ib) \quad (7)$$

і сформулюємо для неї крайову задачу в цій області.

Із відображень H на D та H на G , здійснюваних функціями $\zeta_1(t)$ і $\tau_1(t)$, знаходимо значення функції $\lambda(t)$ на границі області H :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda &= -a\tau_1(t) \quad (-\infty < t < 0); \\ \operatorname{Re} \lambda &= 0 \quad (0 \leq t \leq 1); \\ \operatorname{Im} \lambda &= 0 \quad (1 < t < t_E); \\ \operatorname{Im} \lambda &= -b\tau_1(t) \quad (1 < t < t_E). \end{aligned} \quad (8)$$

З'ясуємо поведінку функції $\lambda(t)$ на нескінченності.

Оскільки при $t \rightarrow \infty$, $\zeta_1(t) = M\sqrt{t} + o(\sqrt{t})$, M – ненульова константа і $\tau_1(t) = \tau_\infty + o(1)$, то

$$\lambda(t) = M\tau_\infty\sqrt{t} + o(\sqrt{t}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Співвідношення (8), (9) складають задачу Келдиша-Седова для функції $\lambda(t)$ у верхній півплощині t .

У зв'язку з тим, що шукана функція не є обмеженою на нескінченності, то розв'язок задачі (8), (9) визначений з точністю до однієї константи [7]:

$$\lambda(t) = -\frac{\sqrt{t-1}}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{a\tau_1(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(\eta-t)}} + \int_{t_E}^{+\infty} \frac{b\tau_1(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(\eta-t)}} \right) + A\sqrt{t-1}, \quad (10)$$

де A – довільна дійсна стала. Величину константи A знайдемо, скориставшись значенням функції $\lambda(t)$ в точці, у якій воно заздалегідь відоме. Оскільки $\tau_1(t)$ обмежена і $\zeta_1(t_E) = a + ib$, то із формули (7) випливає, що $\lambda(t_E) = 0$. Отже,

$$A = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{a\tau_1(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(\eta-t_E)}} + \int_{t_E}^{+\infty} \frac{b\tau_1(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(\eta-t_E)}} \right).$$

Таким чином, потрібний нам єдиний розв'язок задачі (8), (9) дає формула

$$\lambda(t) = \frac{(t-t_E)\sqrt{t-1}}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{a\tau_1(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(\eta-t_E)}(\eta-t)} + \int_{t_E}^{+\infty} \frac{b\tau_1(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(\eta-t_E)}(\eta-t)} \right), \quad (11)$$

у якій сингулярні інтеграли в точці t слід розуміти у сенсі головного значення.

Зробимо ще кілька зауважень щодо інтегралів формули (11). Обидва інтеграли збіжні як невластиві зі безмежними межами інтегрування, оскільки підінтегральні функції на нескінченності дорівнюють $O(t^{-3/2})$. Із формули (6) випливає, що

$$\tau_1(t) = \frac{2k^2\tau_\infty}{(k^2 - \tau_\infty^2)\sqrt{t_E}} \sqrt{t-t_E} + o(\sqrt{t-t_E})$$

при $t \rightarrow t_E$, тому особливість другого інтеграла у точці $\eta = t_E$ – інтегрована. З міркувань зручності обчислень варто замінити інтеграли із безмежними межами інтегралами по скінченних відрізках

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\tau_1(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(\eta-t_E)}(\eta-t)} = \int_{-1}^0 \frac{\tau_1(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(\eta-t_E)}(\eta-t)} + \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{-\eta}\tau_1(1/\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(1-t\eta)}(1-t_E\eta)},$$

$$\int_{t_E}^{+\infty} \frac{\tau_1(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(\eta-t_E)}(\eta-t)} = \int_0^{1/t_E} \frac{\sqrt{\eta}\tau_1(1/\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta(1-t\eta)}(1-t_E\eta)}$$

Нарешті зауважимо, що у відповідності з вибраними аналітичними та однозначними гілками коренів у функції (6) у формулі (11) слід вважати, що

$$\tau_1(\eta) = \frac{(k^2 + \tau_\infty^2)\sqrt{(\eta-t_D)(\eta-t_E)} \pm (k^2 + \tau_\infty^2)(\eta-t_E/2)}{2\tau_\infty\sqrt{\eta(\eta-t_E)}},$$

де знак «+» стосується інтеграла по $(-\infty; 0)$, а «-» – по $(t_E; +\infty)$.

НДС знайдено. Функція напружень у параметричній формі є такою:

$$\zeta = \zeta_1(t) = a + ib + \tau_1^{-1}(t)\lambda(t), \quad \tau = \tau_1(t) \quad (t \in H) \quad (12)$$

Із першої формули (12) легко знайти лінію L , що розмежовує область пружних і пластичних деформацій. Зважаючи на те, що функція $\lambda(t)$ на відповідному лінії L відрізка $[1; t_D]$ границі області H є дійсно значною, а $|\tau_1(t)| = k$, отримуємо її параметричне рівняння

$$\begin{cases} x = a + \frac{k^2 + \tau_\infty^2}{k^2} \sqrt{(t_D - t)(t-1)}\lambda(t); \\ y = b + \frac{k^2 + \tau_\infty^2}{k^2} \left(t - \frac{t_E}{2} \right) \lambda(t) \quad 1 \leq t \leq t_D. \end{cases} \quad (13)$$

На рис. 3а – з наведено границі межі зони пружних і пластичних деформацій для кількох співвідношень ширини і довжини включення і кількох значень навантаження.

За малих навантажень, як і слід було сподіватися, форма пластичної зони практично не змінюється, вона збільшується майже гомотетично. Цікаво, що ця тенденція незалежно від співвідношень між розмірами включення зберігається на тривалому діапазоні навантаження (навіть для $\tau_{\infty} = 0,5k$). Частина включення,

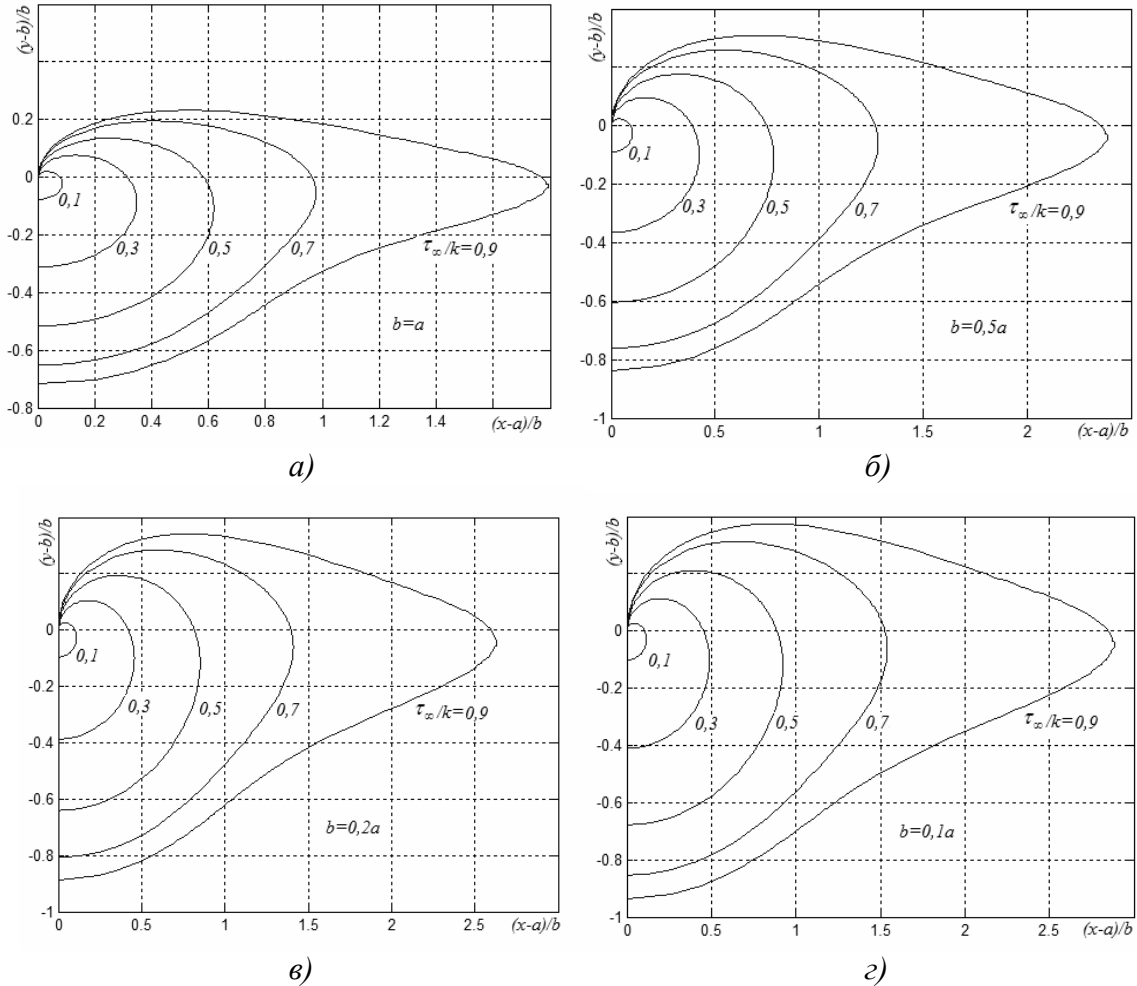


Рисунок 3. Границі межі зони пружних і пластичних деформацій

Figure 3. Boundaries of the elastic and plastic strain area limit

охопленого зоною, є тим більшою, чим тонше включення, але поки $\tau_{\infty} < k$ воно не охоплюється зоною повністю. Цей результат узгоджується з даними дискретно лінійчастої моделі: смуги міжфазного пластичного відшаровування також не охоплюють включення поки $\tau_{\infty} < k$. Коли ширина включення набагато менша його довжини $b \ll a$, відшароване вздовж більших граней включення, стає подібним на тріщину довжиною $2a$, але картина розвитку пластичних деформацій залишається суттєво відмінною від спостережуваної в околі вершин тріщини, які навіть за будь-якого малого навантаження охоплюються пластичними деформаціями. Це, однак, не означає, що для обох згаданих випадків картини розподілів напружень теж будуть суттєво відмінними, хоча це питання потребує окремого дослідження. Зауважимо

також, що теоретично передбачувана відсутність змикання пластичних зон є результатом того, що компоненти напружень у центрі граней, які до навантаження перебували у механічному контакті із середовищем, залишаються весь час нульовими в процесі деформування.

Висновки. Досліджено квазістатичний розвиток пластичних деформацій в околі вершин жорсткого прямокутного включення, дві паралельні грані якого до навантаження перебували в ідеальному механічному контакті з середовищем, дві інші пари – не контактували з ним. Знайдено аналітичний розв’язок задачі, визначено напружено-деформівний стан тіла для довільної величини навантаження і довільних співвідношень між розмірами включення. Визначено межу зони пластичних деформацій і досліджено її зміну зі зростанням навантаження. Показано, що вільні від контакту з середовищем грані включення не охоплюються пластичними деформаціями, а дві інші грані лише частково охоплюються пластичними деформаціями. На початковій стадії розвитку границі зони пластичних деформацій зростають майже гомотетично з центрами гомотетії у вершинах включення. Ця тенденція точно витримується навіть для навантажень, які складають 50 % величини границі текучості матеріалу тіла.

Conclusions. Quasi – static development of the plastic strains in the rigid rectangular inclusion tips threshold, two parallel edges of which were in the ideal mechanical contact others did not contact with it has been investigated. Analytical solution of the task was found, stress-strain state of the body for the arbitrary loading value and arbitrary ratio between the inclusion sized was determined. The plastic strain area boundary was found and its change with the loading growth was investigated. It has been testified that contact free-free with the environment inclusion edges are not subject to the plastic strains, but two other edges are subject to the plastic strains only partially. At the initial stage of the boundary development the plastic strains areas grow almost homogeneously with the homogeneity centers in the inclusion tips. This phenomenon is true exactly enough even for the loadings, which are of 50% of the body material yield limit value.

Список використаної літератури

1. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Кривень, В.А. Розвиток пластичних зон у тілі з прямокутною щілиною за антиплоскої деформації [Текст] / В.А. Кривень, В.Б. Валяшек, М.І. Яворська. – Львів // Фізико-хімічна механіка матеріалів. 2008. – Т. 44, № 4. С. 13 – 20.
3. Kryven' V.A. Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium / V.A. Kryven' and V.B. Valyashek. – Journal of Mathematical Sciences, Vol. 171, No. 4, September, 2010. – P. 107 – 116.
4. Кривень, В.А. Лінійна модель пластичної зони біля гострокінцевого концентратора напружень за поздовжнього зсуву [Текст] / В.А. Кривень. – Львів // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2006. – № 4. – С. 41 – 46.
5. Койтер, В.Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. [Текст] / В.Т. Койтер. – М.: Изд-во ИЛ, 1961. – 79 с.
6. Кривень, В.А. Непрерывное и разрывное решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной [Текст] / В.А. Кривень. – Львів // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1985. – № 6. – С. 10 – 16.
7. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи [Текст] / Ф.Д. Гахов. – М.: Физматгиз, 1958. – 544 с.

Отримано 28.01.2013