

УДК 620.179

Є. Доценко, канд. техн. наук; М. Карпаш, докт. техн. наук

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

## КОНТРОЛЬ ПИТОМОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ОПОРУ СТАЛЕВИХ ВИРОБІВ ПЛОСКОЇ ФОРМИ ЧОТИРИЗОНДОВИМ МЕТОДОМ

**Резюме.** Наведено результати математичного моделювання процесу контролю питомого електричного опору провідних матеріалів чотиризондовим методом на постійному струмі. Для виведення основних формул математичної моделі використано метод дзеркальних відображень. Проведено теоретичні дослідження щодо визначення оптимального співвідношення відстаней між зондами чотиризондового вимірювального перетворювача, що дало змогу досягнути високої чутливості методу. Це є особливо важливо для вимірювання малих значень питомого електричного опору сталей. Встановлено аналітичну залежність для геометричної функції поправки, яку необхідно враховувати при розрахунку питомого електричного опору плоских зразків правильної геометричної форми. Тому, якщо розміри зразка є набагато більшими за лінійні розміри системи зондів, то геометрична функція поправки зводиться до конкретного числа, яке залежить тільки від співвідношення відстаней між зондами.

**Ключові слова:** сталь, питомий електричний опір, чотиризондовий метод, геометрична функція поправки.

E. Dotsenko, M. Karpash

## CONTROL OF THE FLAT STEEL ARTICLES SPECIFIC ELECTRIC RESISTANCE BY FOUR-POINT PROBE METHOD

**Summary.** The results of mathematical modeling of electrical resistance control procedure of the conducting materials by four-point probe method using direct current are presented. Four-point probe method as compared with the other methods for electric resistance measurement of the conductive materials is easy to implement, insensitive to magnetic permeability of ferromagnetic materials and can be applied to objects of different dimensions. For derivation of the base formulas the method of mirror mappings was used. This method is used in electrostatics very often. Theoretical research to establish the optimal ratio of distances between the probes of a four-point probe measuring transducer, which enabled us to increase the sensitivity of four-point probe method has been carried out. This is particularly important for the measurement of small values of electric resistance of steels. In this case, the optimal distance between the current and the corresponding potential probes equals to 10 mm, the distance between potential contacts equals to 60 mm.

Analytic dependence for geometric correction function that need to account for calculating of electric resistance of the flat samples with geometric regular form has been established. It is shown, when object's dimensions are sufficiently larger than linear dimensions of the probes system, then the geometric correction functions equals to absolute number, which depends on the ratio of the distances between the probes only.

Four-point probe method can be used for samples of different geometric shapes, such as cylindrical surfaces (pipes), by introducing additional geometric correction functions, which depend on the curvature of the surface (pipe diameter).

**Key words:** steel, specific electric resistance, four-point probe method, geometric correction function.

**Вступ.** У практиці неруйнівного контролю та технічної діагностики вимірювання питомого електричного опору застосовують для сортування металів, ідентифікації сплавів, моніторингу режимів термічного оброблення конструкційних сталей та виявлення дефектів, які змінюють електропровідність матеріалу. Також по зміні питомого електричного опору можна робити висновки про мікроструктурні зміни в металах [1]. Раніше авторами було розроблено новий підхід до визначення фізико-механічних характеристик конструкційних сталей з урахуванням їх структури [2] та досліджено чутливість питомого електричного опору до мікроструктурних змін, що виникають у матеріалі металоконструкцій під час тривалої експлуатації [3]. Також у

роботі [4] вказується на можливість визначення ударної в'язкості сталей по вимірних значеннях питомого електричного опору.

Для вимірювання малих значень питомого опору сталей найбільшого поширення набули вихрострумний та електроконтактні методи [5]. Застосування вихрострумного методу поширюється здебільшого на немагнітні метали, оскільки на вихідний сигнал вихрострумного перетворювача впливає магнітна проникність феромагнітного матеріалу. Тому найдоцільнішим є застосування електроконтактних методів на постійному струмі, які, окрім того, дають змогу отримати інформацію щодо питомого опору по об'єму металу, що неможливо досягнути вихрострумним методом унаслідок наявності скін-ефекту.

До електроконтактних методів відносяться дво-, чотиризондовий методи та метод Ван-дер-Пау [6]. Двзондовий метод можна застосовувати тільки на зразках правильної геометричної форми і, окрім того, технологія проведення контролю вимагає створення омичних контактів на торцях зразка. Зрозуміло, що застосовувати двзондовий метод на реальних сталевих об'єктах є досить проблематично. Метод Ван-дер-Пау дозволяє вимірювати питомий електричний опір зразків з довільною геометричною формою, проте його доволі складно реалізувати в технічному плані, метод вимагає індивідуального розміщення зондів залежно від форми зразка. Тому найбільш універсальним методом вимірювання питомого електричного опору матеріалів слід вважати класичний чотиризондовий метод.

Як правило, чотиризондовий метод реалізується за допомогою чотиризондового вимірювального перетворювача, який приставляється до об'єкта контролю (ОК), та вимірювача активного електричного опору постійному струму – мікроомметра. Розраховуючи питомий електричний опір за результатами вимірювання електричного опору деякої ділянки матеріалу чотиризондовим методом, необхідно знати, яким чином впливають кінцеві розміри та товщина об'єкта контролю на покази мікроомметра. Для цього було проведено математичне моделювання контролю питомого опору з метою вирішення двох основних завдань:

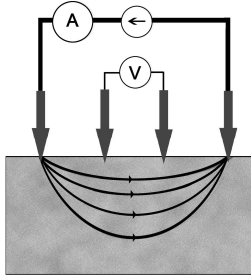
- 1) розрахунок співвідношення відстаней між струмовими та потенціальними (вимірювальними) електродами-зондами з метою підвищення чутливості методу;
- 2) встановлення аналітичної залежності між шуканим значенням питомого електричного опору матеріалу і вимірними значеннями електричного опору, враховуючи вплив реальних кінцевих розмірів об'єкта контролю на результати вимірювання.

**Теоретичні основи методу.** Розглянемо теоретичні основи чотиризондового методу вимірювання питомого електричного опору на зразку, який являє собою напівнескінчений об'єм, обмежений плоскою поверхнею. На поверхні зразка вздовж однієї прямої лінії розміщують чотири металеві електроди-зонди з невеликою площею контакту (рис. 1). Через два зовнішніх зонди пропускають електричний струм, генерований джерелом постійного струму. На двох внутрішніх зондах вимірюють падіння напруги. За вимірним значенням різниці потенціалів та струму можна визначити величину питомого електричного опору матеріалу зразка.

У системі зонд – об'єкт контролю, як правило, виникають паразитні опори, які можуть вносити суттєву похибку в результат вимірювання (рис. 2). До них належать: 1) опір зондів і провідників  $R_{np}$ ; 2) контактний опір зонда  $R_k$ ; 3) опір розтіканню  $R_{роз}$ . Ці опори властиві для кожного із зондів, утворюючи в сукупності так звані перехідні опори, значення яких є різними для різних зондів-електродів.

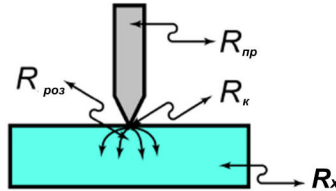
Використання чотиризондового методу контролю питомого електричного опору сталей дає змогу уникнути впливу паразитних перехідних опорів контактів на результати вимірювань. На рис. 3 наведена еквівалентна схема електричного кола при чотиризондовому підключенні до об'єкта контролю (ОК). Зі схеми випливає, що перехідні опори  $R_{c1}$  і  $R_{c2}$  струмових контактів 1 і 4 не впливають на напругу  $U$ ,

пропорційну вимірюваному опору  $R_x$ . Очевидно, що  $U$  не залежить від перехідних опорів  $R_{П1}$  і  $R_{П2}$  потенціальних контактів 2 і 3, оскільки у вимірювальному колі можна нехтувати струмом за рахунок високого значення вхідного опору вимірювача напруги  $U$ .



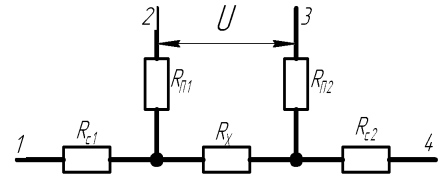
**Рисунок 1.**  
Чотиризондовий метод вимірювання питомого електричного опору

**Figure 1.**  
Four-point probe method for electric resistance measurement



**Рисунок 2.**  
Паразитні опори

**Figure 2.**  
Parasitic resistances



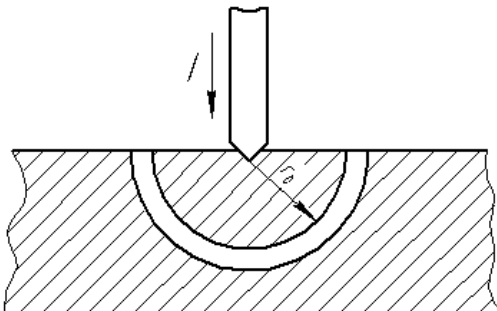
**Рисунок 3.**  
Еквівалентна схема електричного кола

**Figure 3.**  
Analog circuit of electric circuit

Основна перевага чотиризондового методу полягає в тому, що не потрібно створювати омичні контакти на зразку та є можливість вимірювати питомий опір зразків різних форм і розмірів. Умовою для його застосування з точки зору форми об'єкта контролю є наявність плоскої поверхні, лінійні розміри якої перевищують лінійні розміри системи зондів. Багато особливостей реальних зразків, пов'язаних з їх формою, можна легко врахувати, застосовуючи чотиризондовий метод вимірювання.

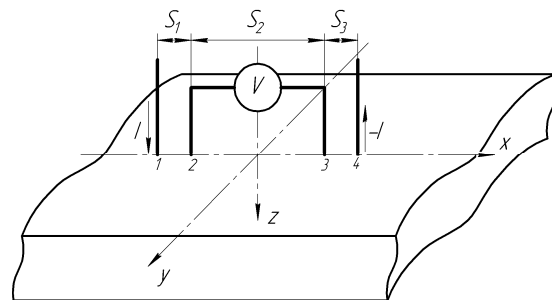
Для того, щоб знайти аналітичну залежність між питомим електричним опором  $\rho$ , вимірними струмом  $I$  та напругою  $U$ , необхідно розв'язати простішу задачу, пов'язану з протіканням постійного струму через окремих зонд, який знаходиться в контакті з плоскою поверхнею об'єкта контролю напівнескінченного об'єму [7]. (рис. 4).

Відомо, що рух електричних зарядів у провідному середовищі характеризується густиною електричного струму  $j$ . З постійним (стаціонарним) струмом нерозривно пов'язані електричне та магнітне поля.



**Рисунок 4.**  
Модель зонда

**Figure 4.**  
Probe model



**Рисунок 5.**  
Чотиризондовий метод

**Figure 5.**  
Four-point probe method

Ці поля формально не залежать один від одного і можуть розглядатися окремо. У даному випадку обмежимося аналізом електричного поля, яке є потенціальним.

Розподіл потенціалу в провідному об'єкті підпорядковується лінійному

диференціальному рівнянню з частинними похідними – рівнянню Лапласа

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

де  $\phi(x, y, z)$  – потенціал точки в тривимірному евклідовому просторі.

Дослідження таких потенціалів і, зокрема, розв'язків диференціального рівняння Лапласа відоме в математиці як *теорія потенціалу* [8].

Оскільки розподіл потенціалу в напівнескінченному об'ємі володіє сферичною симетрією, то для розрахунку потенціалу  $\phi(r)$  в об'ємі зразка залежно від відстані  $r$  до контакту достатньо розв'язати рівняння Лапласа в сферичній системі координат, в якому залишений тільки член, залежний від  $r$ :

$$\Delta \phi(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (2)$$

при умові, що потенціал у точці  $r=0$  позитивний і прямує до нуля при великих значеннях  $r$ . Розв'язавши рівняння (2), отримуємо вираз для розрахунку потенціалу

$$\phi(r) = \frac{I\rho}{2\pi \cdot r}. \quad (3)$$

Очевидно, що розподіл потенціалу буде таким самим, якщо зонд має з поверхнею зразка контакт у вигляді напівсфери кінцевого діаметра. Нехай радіус контакту дорівнює  $r_1$ , тоді падіння напруги на зразку дорівнює потенціалу зонда і становить

$$\phi = \frac{I \cdot \rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_1}. \quad (4)$$

Прирівнюючи падіння напруги на приконтактному шарі товщиною  $r_2 - r_1$

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) = \frac{I \cdot \rho}{2\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad (5)$$

і повного падіння напруги на зразку (4), можна спостерігати основну зміну потенціалу ближче до зонда. Для наочності, при  $r_2 = 10 \cdot r_1$  повне падіння напруги на зразку перевищує падіння в шарі  $r_2 - r_1$  лише на 10%. Це свідчить про те, що величина струму, який протікає через зонд, визначається головним чином опором приконтактної області, протяжність якої тим менше, чим менший радіус контакту.

Отже, враховуючи наведене вище, необхідними умовами застосування чотиризондового методу для вимірювання питомого електричного опору матеріалів є: 1) вимірювання проводяться на плоскій поверхні однорідного ізотропного ОК, лінійні розміри якого в кілька разів більші за розміри системи зондів; 2) зонди мають контакти з поверхнею ОК у точках, які розміщені вздовж прямої лінії; 3) межа між струмопідвідними електродами і ОК мають форму напівсфери малого діаметра; 4) діаметр контакту зонда малий порівняно з відстанню між зондами.

Потенціал у будь-якій точці зразка дорівнює сумі потенціалів, які створюються в цій точці струмом кожного електрода (рис. 5). При цьому потенціал має додатний знак для струму, що втікає в зразок (зонд 1), і від'ємний для струму, що витікає зі зразка (зонд 4).

Таким чином, потенціали вимірювальних зондів 2 і 3 можна записати відповідно

$$\phi_2 = \frac{I \cdot \rho}{2\pi} \left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2 + S_3} \right); \quad (6)$$

$$\phi_3 = \frac{I \cdot \rho}{2\pi} \left( \frac{1}{S_1 + S_2} - \frac{1}{S_3} \right). \quad (7)$$

Різниця потенціалів при цьому

$$U = \phi_2 - \phi_3 = \frac{I \cdot \rho}{2\pi} \left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2 + S_3} - \frac{1}{S_1 + S_2} + \frac{1}{S_3} \right). \quad (8)$$

З виразу (8) отримуємо формулу для визначення питомого електричного опору матеріалу зразка

$$\rho = \frac{U}{I} \cdot \frac{2\pi}{\left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2 + S_3} - \frac{1}{S_1 + S_2} + \frac{1}{S_3} \right)}. \quad (9)$$

Для випадку коли відстань між зондами однакова ( $S_1 = S_2 = S_3 = S$ ), то

$$\rho = \frac{U}{I} \cdot 2\pi S. \quad (10)$$

Слід зазначити, що формула (9) справедлива тільки для напівнескінченного об'єкта, тобто зразка, лінійні розміри якого набагато більші за відстань між зондами  $S$ . Для розрахунку питомого електричного опору об'єкта з кінчними поперечними розмірами та товщиною, необхідно вводити геометричну функцію поправки, яка залежить від розмірів системи зондів, орієнтації вимірювального перетворювача відносно країв зразка та габаритних розмірів зразка.

**Теоретичні дослідження щодо підвищення чутливості чотиризондового методу та оптимізації взаємного розміщення зондів.** Вираз (10) для випадку рівності відстані між зондами, як правило, використовують для розрахунку відносно великих значень питомого електричного опору напівпровідників. Для вимірювання малих значень питомого електричного опору металів є доцільним підвищити чутливість чотиризондового вимірювального перетворювача по напрузі.

Як впливає з виразу (8), чутливість чотиризондового методу по напрузі прямо пропорційна величині постійного струму та обернено пропорційна еквівалентній відстані між зондами:

$$\frac{1}{S_{екв}} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_1 + S_2} - \frac{1}{S_2 + S_3}. \quad (11)$$

Оскільки збільшення сили струму, що протікає через зразок, обмежене допустимим нагріванням зразка, то підвищити чутливість методу можна, зменшуючи еквівалентну відстань між зондами  $S_{екв}$  за рахунок збільшення відстані  $S_2$  між внутрішніми вимірювальними зондами 2 і 3 і зменшення відстаней  $S_1$  та  $S_3$  між струмовими та потенціальними зондами (відповідно 1-2 і 3-4). Для наочності проілюструємо графічно залежності еквівалентної відстані від зміни лінійних розмірів системи зондів.

На рис. 6 зображено графічну залежність еквівалентної відстані між зондами  $S_{екв}$  від відстані між струмовими та потенціальними контактами  $S$  ( $S_1 = S_3 = S$ ) при фіксованій відстані між потенціальними зондами ( $S_2 = 30$  мм).

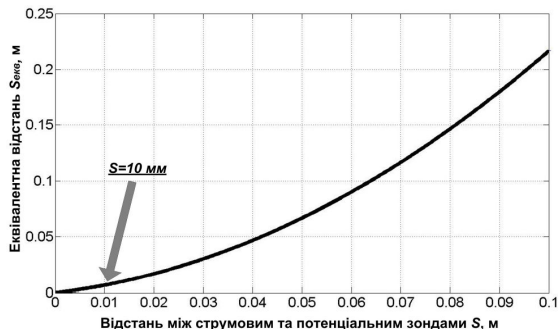


Рисунок 6.

Графік залежності еквівалентної відстані між зондами від відстані між відповідними струмовими та потенціальними зондами (при  $S_2 = 30\text{ мм}$ )

Figure 6.

Dependence of the equivalent distance between probes on the distance between the current and the corresponding potential probes

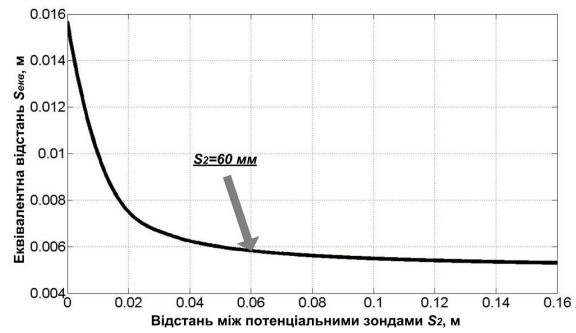


Рисунок 7.

Графік залежності еквівалентної відстані між зондами від відстані між потенціальними зондами (при  $S_1 = S_3 = 10\text{ мм}$ )

Figure 7.

Dependence of the equivalent distance between probes on the distance between the potential probes

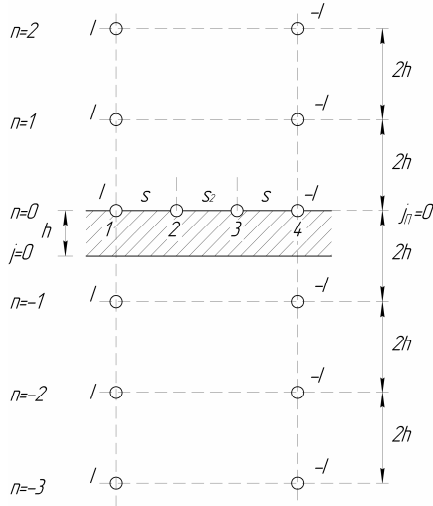
Аналізуючи графічну залежність (рис. 6), можна стверджувати, що зменшення відстані  $S$  призводить до зменшення еквівалентної відстані  $S_{екв}$  і, відповідно, до збільшення чутливості чотиризондового методу. Враховуючи те, що в реальній конструкції чотиризондового вимірювального перетворювача діаметр одного зонда становить кілька міліметрів, то оптимальна відстань між струмовими та відповідними їм потенціальними контактами повинна становити  $10\text{ мм}$ .

Проілюструємо тепер, яким чином змінюється еквівалентна відстань  $S_{екв}$  залежно від зміни відстані  $S_2$  між потенціальними зондами при фіксованій оптимальній відстані  $S = S_1 = S_3 = 10\text{ мм}$  (рис. 7). Отже, збільшення відстані  $S_2$  між потенціальними контактами до  $20 - 30\text{ мм}$  призводить до різкого зменшення еквівалентної відстані  $S_{екв}$  і, відповідно, до збільшення чутливості чотиризондового методу. В області  $S_2 > 40\text{ мм}$  зменшення значення  $S_{екв}$  відбувається повільніше, а при  $S_2 > 60\text{ мм}$  зменшення еквівалентної відстані є незначним. Це свідчить про недоцільність конструювання вимірювального перетворювача з досить високим значенням відстані  $S_2$ , оскільки при  $S_2 \geq 60\text{ мм}$  незначне підвищення чутливості чотиризондового методу не є пріоритетним. У даному випадку пріоритетним є питання зменшення габаритних розмірів вимірювального перетворювача, що реалізує чотиризондовий метод.

Враховуючи сказане вище, оптимальні лінійні розміри системи зондів є такими: відстань між струмовими та відповідними їм потенціальними контактами –  $S = S_1 = S_3 = 10\text{ мм}$ ; відстань між потенціальними контактами –  $S_2 = 60\text{ мм}$ .

**Застосування методу до зразків простої геометричної форми.** Як вже зазначалося, вираз (9) можна застосовувати для визначення питомого електричного опору об'єкта напівнескінченного об'єму, лінійні розміри якого набагато більші за розміри системи зондів. Даний критерій застосування формули (9) по суті є напівкількісним, оскільки не враховує точного співвідношення між розмірами зразка і лінійними розмірами системи зондів. З метою отримання більш строгих критеріїв застосування виразу (9) розглянемо часткові випадки вимірювання питомого електричного опору зразків з обмеженими лінійними розмірами, що дуже часто зустрічається на практиці.

Розглянемо простий випадок плоскої пластини безкінечної довжини та ширини, але кінцевої товщини із ізолюючими верхньою і нижньою границями (рис. 8). Наявність двох ізолюючих границь на двох поверхнях зразка зумовлює необхідність виконання однорідної граничної умови Неймана, тобто на ізолюючій границі нормальна складова струму, а, відповідно, і електричного поля дорівнює нулю.

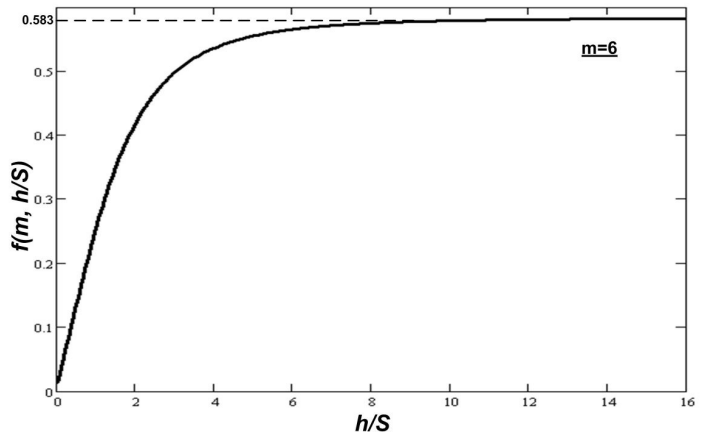


**Рисунок 8.**

Система джерел дзеркальних відображень для пластини з верхньою та нижньою ізолюючими границями

**Figure 8.**

System of mirror mappings for plate with upper and lower insulated faces



**Рисунок 9.**

Геометрична функція поправки  $f(m, h/S)$  для пластини з двома ізолюючими границями

**Figure 9.**

The geometrical correction function  $f(m, h/S)$  for plate with two insulated faces

Використовуючи метод дзеркальних відображень (даний метод широко використовується в електростатиці), розмістимо на відстані  $h$  нижче нижньої ізолюючої границі уявні точкові джерела струму  $I$  та  $-I$ . Уводячи дані джерела постійного струму, виконуємо на нижній ізолюючій поверхні однорідну граничну умову Неймана ( $j_n = 0$ ). Проте при цьому порушиться вимога рівності нулю нормальної складової струму на верхній поверхні пластини. Щоб виконати однорідну граничну умову на верхній поверхні пластини, введемо на відстані  $2h$  вище пластини також два уявних точкових джерела струму  $I$  та  $-I$ .

Гранична умова Неймана на верхній поверхні пластини буде виконана, проте знову порушиться гранична умова на нижній ізолюючій поверхні. Звідси випливає, що процес введення уявних джерел струму можна продовжувати до безкінечності (спочатку на відстані  $3h$  від нижньої поверхні, потім на відстані  $4h$  від верхньої поверхні пластини і т.д.).

Значення потенціалів на вимірювальних зондах 2 і 3 можна розрахувати, сумуючи потенціали, які створюються в даній точці кожним із джерел струму. Враховуючи симетрію розв'язуваної задачі, різницю потенціалів між вимірювальними зондами 2 і 3 розраховуємо так:

$$U = \phi_2 - \phi_3 = \frac{I \cdot \rho}{\pi} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{S + S_2} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{S^2 + (2h \cdot n)^2}} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{(S + S_2)^2 + (2h \cdot n)^2}} \right). \quad (12)$$

де  $h$  – товщина провідної пластини;

$n$  – рівень дзеркального відображення джерела струму.

Враховуючи те, що  $S_2 = m \cdot S$ , з виразу (12) отримаємо вираз для розрахунку питомого електричного опору пластини

$$\rho = \frac{U}{I} \pi \cdot \left\{ \frac{m}{S(m+1)} + \frac{2}{S} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 4n^2 \left(\frac{h}{S}\right)^2}} - \frac{2}{S} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{(m+1)^2 + 4n^2 \left(\frac{h}{S}\right)^2}} \right\}^{-1}. \quad (13)$$

У кінцевому випадку отримаємо

$$\rho = \frac{U}{I} \cdot 2\pi S \cdot f(m, h/S), \quad (14)$$

де  $f(m, h/S)$  – геометрична функція поправки, яка залежить від відношення товщини пластини  $h$  до відстані між зондами  $S$ .

При цьому геометрична функція поправки дорівнює

$$f(m, h/S) = \left\{ \frac{2m}{m+1} + 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + 4n^2 \left(\frac{h}{S}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(m+1)^2 + 4n^2 \left(\frac{h}{S}\right)^2}} \right] \right\}^{-1}. \quad (15)$$

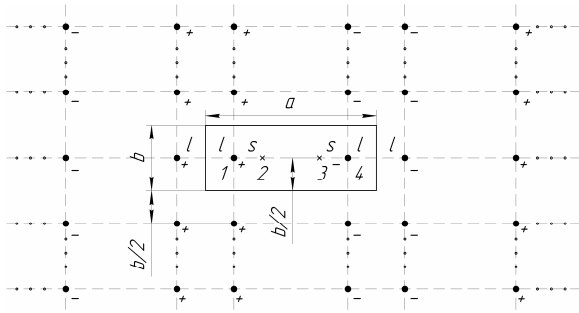
Графік геометричної функції поправки  $f(m, h/S)$  зображено на рис. 9.

З рис. 9 бачимо, що зі зменшенням товщини зразка і досягнення значення, яке дорівнює приблизно  $4S$ , наявність нижньої поверхні починає впливати на орієнтацію ліній струму. У дуже тонких пластинках струм поширюється майже однорідно по товщині, про що свідчить лінійна залежність геометричної функції поправки від  $h/S$  в інтервалі значень від 0 до 0.4. В роботі [7] вказано, що в даному інтервалі при  $m=1$  геометрична функція поправки прямує до значення  $(2\ln 2)^{-1} h/S$ , тому в такому випадку питомий електричний опір зразка розраховується як  $\rho = \frac{\pi \cdot h}{\ln 2} \cdot \frac{U}{I}$  і не залежить від відстані між зондами.

Реальні зразки мають бокові грані, які впливають на поширення струму. Тому наявність кінцевих розмірів по всіх координатах зразка зумовлює необхідність введення відповідних геометричних функцій поправки. Такі функції можуть бути розраховані у результаті розв'язання рівняння Лапласа з відповідними граничними умовами на бокових гранях зразка.

Застосувавши метод дзеркальних відображень для зразка прямокутної форми, можна розрахувати геометричні функції поправки, які залежать від геометричних розмірів зразка (рис. 10).



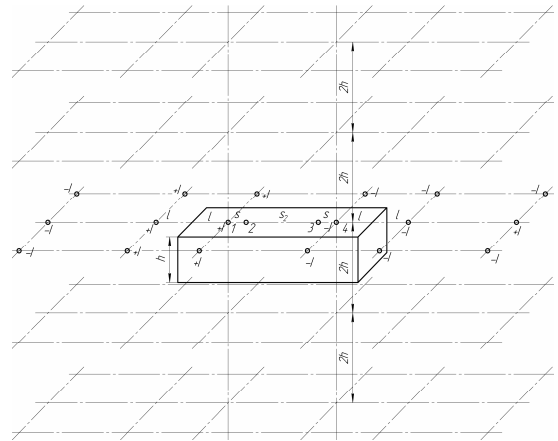


**Рисунок 10.**

Система джерел дзеркальних відображень для пластини прямокутної форми з ізолюючими гранями

**Figure 10.**

System of mirror mappings for rectangular plate with two insulated faces



**Рисунок 11.**

Система джерел дзеркальних відображень для пластини прямокутної форми скінченної товщини з ізолюючими гранями і поверхнями

**Figure 11.**

System of mirror mappings for rectangular plate of finite thickness with two insulated faces

Для зразків прямокутної форми, які часто зустрічаються на практиці, при розміщенні зондів уздовж центральної лінії, паралельній довгій стороні прямокутника, питомий електричний опір розраховується таким чином:

$$\rho = \frac{U}{I} \cdot 2\pi S \cdot f(m, a/S, b/S), \quad (16)$$

де  $f(a/S, b/S)$  – геометрична функція поправки, яка залежить від відношення відповідно довжини  $a$  і ширини  $b$  прямокутника до відстані між зондами  $S$ .

Специфіка побудови системи джерел дзеркальних відображень, зображеної на рис. 10, аналогічна попередньому випадку. Складність її конфігурації зумовлена необхідністю виконання на всіх бокових гранях зразка однорідної граничної умови Неймана ( $j_n = 0$ ).

Можна показати, що для даної конфігурації системи джерел дзеркальних відображень, геометрична функція поправки буде мати такий вигляд:

$$f\left(m, \frac{a}{S}, \frac{b}{S}\right) = \left[ \frac{-2m}{m+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2[n^2(b/S)^2 + (k(a/S)+1)^2]^{1/2} + \\ + 2[n^2(b/S)^2 + (k(a/S)-1)^2]^{1/2} - \\ - 2[n^2(b/S)^2 + (k(a/S)+[m+1])^2]^{1/2} - \\ - 2[n^2(b/S)^2 + (k(a/S)-[m+1])^2]^{1/2} \end{array} \right\} \right]^{-1} \quad (17)$$

З метою урахування впливу товщини пластини прямокутної форми на результати вимірювання питомого електричного опору чотиризондовим методом, тобто для точнішого розрахунку геометричної функції поправки, необхідно враховувати вплив потенціалів тривимірної системи диполів (рис. 11). На рис. 11 схематично зображена просторова конфігурація джерел дзеркальних відображень, завдяки чому на всіх шести гранях виконується однорідна гранична умова Неймана ( $j_n = 0$ ).

В даному випадку питомий електричний опір прямокутної пластини з кінцевими розмірами і товщиною розраховується

$$\rho = \frac{U}{I} \cdot 2\pi S \cdot f(m, a/S, b/S, h/S), \quad (18)$$

де  $f(m, a/S, b/S, h/S)$  – геометрична функція поправки, яка залежить від реальних кінечних розмірів (довжини  $a$ , ширини  $b$  та товщини  $h$ ) пластини та від співвідношення лінійних розмірів системи зондів  $m$

$$f\left(m, \frac{a}{S}, \frac{b}{S}, \frac{h}{S}\right) = \left( \frac{-2m}{m+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} \left[ (-1)^k \cdot \left\{ \begin{aligned} &2 \left[ n^2 (b/S)^2 + (k(a/S) \pm 1)^2 + 4g^2 (h/S)^2 \right]^{-1/2} - \\ &-2 \left[ n^2 (b/S)^2 + (k(a/S) \pm [m+1])^2 + 4g^2 (h/S)^2 \right]^{-1/2} \end{aligned} \right\} \right] \right)^{-1} \quad (19)$$

Отже, в усіх випадках, коли розміри зразка набагато більші за лінійні розміри системи зондів, то зразок можна вважати напівнескінченим, і тоді питомий електричний опір розраховується так:

$$\rho = \frac{U}{I} \cdot 2\pi S \cdot K, \quad (20)$$

де  $K = \frac{m+1}{2m}$  – коефіцієнт поправки, який залежить тільки від співвідношення відстаней між зондами. Для випадку, якщо  $m=1$ , то  $K=1$ , якщо  $m=6$ , то  $K=0.583$ .

Наприкінці слід відзначити, що описану в статті математичну модель вимірювання питомого електричного опору матеріалів практично було використано для розроблення комплексного неруйнівного методу контролю фактичних значень границі плинності феритно-перлітних конструкційних сталей за вимірними значеннями питомого опору та твердості [9].

**Висновки.** Чотиризондовий метод, в порівнянні з іншими методами, вимірювання питомого електричного опору провідних матеріалів є простим у реалізації, нечутливий до магнітної проникності феромагнітних матеріалів та може бути застосований для об'єктів різних розмірів. Розглянуто теоретичні основи чотиризондового методу, що дало змогу дослідити оптимальне співвідношення відстаней між зондами з метою підвищення чутливості методу, що, зокрема, є доцільним для вимірювання малих значень питомого електричного опору сталей та сплавів. При цьому оптимальною відстанню між струмовими та відповідними їм потенціальними контактами повинна становити  $S=10$  мм; відстань між потенціальними контактами –  $S_2=60$  мм. Проведено математичне моделювання, що дало змогу розрахувати геометричні функції поправок, які необхідно вводити у формулу (10), яка застосовується для визначення питомого електричного опору напівнескінчених об'єктів, лінійні розміри яких набагато більші за розміри системи зондів. Удосконалено математичну модель розрахунку питомого електричного опору матеріалів зразків прямокутної форми кінечних розмірів, що полягає у виведенні узагальненої формули для розрахунку геометричної функції поправки, яка враховує співвідношення лінійних розмірів зразка (довжини, ширини, товщини) і лінійних розмірів системи зондів. Графічний аналіз показав, що в усіх випадках, коли відстань від системи зондів до будь-якого краю ОК перевищує відстань між струмовим та потенціальним зондами більше ніж у 5 разів, то розрахунок питомого електричного опору можна проводити за формулою (10), помноженою на коефіцієнт поправки  $K=0.583$ . Даний коефіцієнт поправки справедливий для співвідношення відстаней між зондами  $m=6$ ; при  $m=1$ , коефіцієнт поправки  $K=1$ . Чотиризондовий метод може бути використаний і для зразків іншої геометричної форми, наприклад, для циліндричних поверхонь (труб), шляхом введення додаткових функцій поправок, які залежать від кривизни поверхні (діаметра труби). Це буде предметом наступних наших досліджень.

**Conclusions.** Four-point probe method as compared with the other methods for electric resistance measurement of the conductive materials is easy to implement, insensitive to magnetic permeability of ferromagnetic materials and can be applied to objects of different dimensions. Theoretical basis of the four-point probe method, which makes possible to establish the optimal ratio of distances between the probes to increase the sensitivity of the method, in particular, is suitable for small values of resistance measurement of steels and alloys. In this case, the optimal distance between the current and the corresponding potential contacts is equal to  $S = 10 \text{ mm}$ , the distance between potential contacts is equal to  $S_2 = 60 \text{ mm}$ . The results of mathematical modeling enabled us to calculate the geometric correction functions that need to be entered into the formula (10), which is used to determine the resistance of semi-finite objects for which linear dimensions are much larger than the dimensions of the probes system. The mathematical model, which enables to calculate the resistivity of materials of rectangular samples of finite dimensions has been improved. It is based on the generalized formula for calculating the geometric correction function, which takes into account the ratio of the linear dimensions (length, width, thickness) of the sample and linear dimensions of the probes system. Graphical analysis showed that in all cases, where the distance between the probes and any object's edge is 5 times larger than the distance between the current and potential probes, the measurement of resistance can be done by formula (10), multiplied on the correction coefficient  $K = 0.583$ . This correction coefficient is valid, when the ratio of the distances between the probes equals to  $m = 6$ ; when  $m = 1$ , then correction coefficient equals to  $K = 1$ . Four-point probe method can be used for samples of different geometric shapes, such as cylindrical surfaces (pipes), by introducing additional geometric correction functions, which depend on the curvature of the surface (pipe diameter). It will be investigated in future.

### Список використаної літератури

1. Горкунов, Э.С. Взаимосвязь между магнитными, электрическими свойствами и структурным состоянием термически обработанных сталей – основа определения прочностных характеристик изделий неразрушающими методами: методические рекомендации [Текст] / Э.С. Горкунов. – Свердловск: УЦ АН СССР, 1985. – 130 с.
2. Карпаш, М.О. Новый підхід до визначення фізико-механічних характеристик сталей з урахуванням їх структури [Текст] / М.О. Карпаш, Є.Р. Доценко, О.М. Карпаш // Фізичні методи та засоби контролю середовищ, матеріалів та виробів (серія), випуск 13: Теорія і практика неруйнівного контролю матеріалів і конструкцій: зб. наук. праць. – Львів, 2008. – С. 203 – 208.
3. Карпаш, О.М. Питомий електричний опір як інформативний параметр визначення фактичних фізико-механічних характеристик матеріалів металоконструкцій довготривалої експлуатації [Текст] / О.М. Карпаш, Є.Р. Доценко, М.О. Карпаш // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2009. – № 1. – С. 36 – 41.
4. Nahm, S.H. Evaluation of fracture toughness of degraded Cr-Mo-V steel using electrical resistivity / S.H. Nahm, Y.I. Kim, K.M. Yu, A. Kim // Journal of Materials Science. – 2002. – V. 37. – N16. – P. 3549 – 3553.
5. Bowler, N. Electrical conductivity measurement of metal plates using broadband eddy-current and four-point methods / N. Bowler, H. Yongqlang // Measurement science & technology. – 2005. – V. 16. – N11. – P. 2193 – 2200.
6. Michael, B. Heaney. Electrical Conductivity and Electrical Conductivity and Resistivity // The Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook / Michael B. Heaney. – CRC Press LLC, 1999. – Chapter 43. – ISBN 084932145X.
7. Павлов, Л.П. Методы измерения параметров полупроводниковых материалов: учеб. для вузов [Текст] / Л.П. Павлов. – М.: Высш. шк., 1987. – 239 с.
8. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
9. Karpash, O.M. Complex method for checking physicomachanical characteristics of materials of metalworks / O.M. Karpash, E.R. Dotsenko, M.O. Karpash // Materials Science. – 2012. – Vol. 47, Issue 5 – P.613-620, DOI: 10.1007/s11003-012-9435-8.

Отримано 19.08.2013