

УДК 629.7.036:539.4

**А. Зиньковский, докт. техн. наук; И. Токарь, канд. техн. наук;
Я. Круглий, канд. техн. наук; В. Круц; Е. Синенко**

Институт проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ КОЛЕБАНИЙ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ИХ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Резюме. Приведены результаты выполненного комплекса расчетно-экспериментальных исследований по установлению закономерностей влияния параметров эксплуатационной неоднородности, обусловленной забоиной, на формирование спектра собственных частот колебаний образца камертонного типа как простейшей регулярной системы и его составляющих стержней, а также их вибронпряженность при резонансе с учетом рассеяния энергии в материале. Полученные данные могут быть использованы при выборе диагностических параметров наличия повреждения. Получены зависимости изменения первой собственной частоты колебаний изолированного стержня постоянного поперечного сечения, моделирующего одиночную лопатку, которая широко используется в качестве диагностического параметра от параметров повреждения. Показано, что она существенно зависит от местоположения повреждения по длине стержня. На примере образца камертонного типа, как модели пакета лопаток, показано, что в качестве диагностического параметра наличия повреждения может быть использован параметр связанности возбуждаемых форм колебаний.

Ключевые слова: образец камертонного типа, колебания, повреждение, собственная частота, рассеяние энергии.

A. Zinkovskii, I. Tokar', Ya. Kruglii, V. Kruts, E. Synenko

ON VIBRATION CHARACTERISTICS OF REGULAR SYSTEMS FORMED BY RODLIKE ELEMENTS FOR THEIR DAMAGE DIAGNOSTICS

Summary. The paper presents the results of computational and experimental investigations performed to determine the mechanisms of influence of the parameters of in-service irregularity caused by nick-type damage on the formation of the spectrum of eigenfrequencies of vibrations of the tuning fork type specimen regarded as a simple regular system with its component rods as well as their vibration stress level at the resonance considering energy dissipation in the material. The obtained data can be used in deciding on diagnostic parameters for damage detection. The dependences of the variation in the first eigenfrequency of vibrations of an isolated rod of constant cross-section simulating a single blade on the damage parameters are obtained. It is shown that the eigenfrequency, which is widely used as a diagnostic parameter, depends significantly on damage location along the rod length. Using the tuning fork type specimen as a model of a packet of blades as an example, it is shown that the parameter of coupling of the excited modes of vibrations can be used as a diagnostic parameter for damage detection.

Key words: tuning fork type specimen, vibrations, damage, eigenfrequency, energy dissipation.

Введение и постановка задачи. Ремонт современных газотурбинных двигателей (ГТД) требует больших материальных и трудовых затрат. Ввиду этого, наряду со стандартными подходами, которые подразумевают проведение различного рода регламентных работ после наработки определенного количества часов, все к большему числу их агрегатов применяется концепция технического обслуживания по состоянию. В этом случае возникает необходимость в специализированном диагностическом оборудовании, создание которого невозможно без знания фундаментальных закономерностей поведения данного узла или конструкции в

условиях эксплуатации как определяющей базы для выбора диагностических параметров их состояния, в первую очередь обнаружения повреждений.

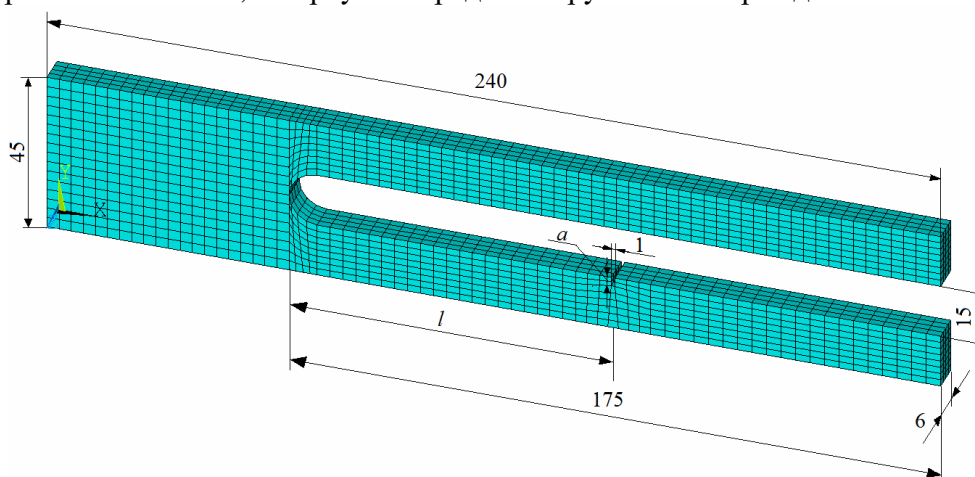


Рисунок 1. Общий вид образца камертонного типа с конечноэлементной сеткой

Figure 1. General view of the tuning fork type specimen with the finite element mesh

К наиболее напряженным конструктивным элементам ГТД относятся лопатки, которые в процессе эксплуатации испытывают широкий спектр силовых и температурных нагрузок, а также воздействие различного рода посторонних предметов, таких, как пыль, лед, птицы и тому подобное. Эти факторы являются потенциальными причинами их повреждений – вмятин, забоин, трещин усталости и других.

Вопросам поиска диагностических параметров повреждений стержневых элементов, в том числе и рабочих лопаток, на основе анализа их колебаний в последнее время уделяется большое внимание. Например, в качестве таких параметров повреждения типа забоины в лопатках или стержневых конструктивных элементах предлагается рассматривать изменение их собственных частот колебаний [1, 2], а трещины усталости – соотношение амплитуд гармоник колебаний при суб- и суперрезонансном режимах [3]. Однако многие аспекты этой задачи требуют дальнейшего изучения. Во-первых, известные результаты исследований не позволяют в полной мере раскрыть влияние параметров повреждения типа забоины на формирование собственных частот колебаний стержневых конструктивных элементов. Во-вторых, вследствие характерного для многих узлов машин, особенно венцов лопаток рабочих колес ГТД, наличия различного рода связей, изолированное рассмотрение конструктивных элементов не позволяет достаточно точно описать их динамическое состояние. Поэтому целью данной работы является определение влияния вида повреждения и его параметров на характеристики колебаний регулярных систем и их составляющих элементов.

Объекты исследования. В соответствии с постановкой задачи в качестве объектов исследования были выбраны образец камертонного типа с призматическими стержнями, общий вид которого приведен на рис. 1, где геометрические размеры указаны в мм, а также отдельный его стержень. Стержни образца имеют длину L рабочей части, равную 175 мм, и прямоугольное поперечное сечение высотой $h = 15$ мм и шириной $b = 6$ мм.

Выбор образца камертонного типа объясняется тем, что, во-первых, он является примером простейшей регулярной системы, состоящей из двух однотипных элементов (подсистем), в данном случае стержней. Устанавливаемые на основе ее изучения закономерности колебаний являются основой при анализе более сложных механических систем. Во-вторых, образец камертонного типа может рассматриваться

как модель пакета из двух лопаток.

В работе рассматривается только один из возможных видов повреждений – забоина. Она моделировалась путем нанесения на один из стержней поперек его рабочей части на расстоянии l от корневого сечения паза шириной 1 мм и глубиной a , как показано на рис. 1.

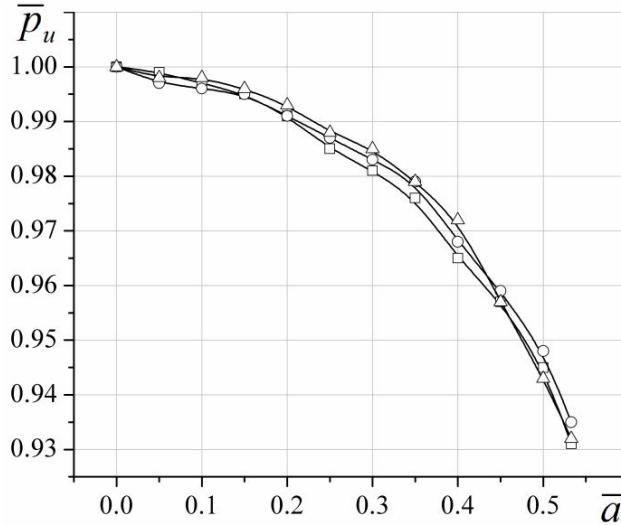


Рисунок 2. Зависимость изменения относительной собственной частоты первой изгибной формы колебаний поврежденного стержня из сплавов Д16 (□) и ВТ1-0 (○) и стали Ст.3 (Δ) от относительной глубины паза

Figure 2. Dependence of the variation in the relative natural frequency of the first flexural vibration mode for the damaged rod of alloys D16 (□) and steel St.3 (Δ) on the relative depth of the notch

Образцы были изготовлены из трех материалов – стали Ст.3, титанового ВТ1-0 и алюминиевого Д16 сплавов, обладающих существенным, до трех и более раз, различием диссипативных характеристик. Выбор таких материалов объясняется тем, что они характеризуются практически одинаковым значением отношения модуля упругости E к удельной плотности ρ , которое определяет первую собственную частоту колебаний консольного стержня постоянного поперечного сечения. Это подтверждается данными экспериментального ее определения для стержней, изготовленных из выбранных материалов, которые приведены на рис. 2, где $\bar{p}_u = p_{un}/p_{un}$ – относительная первая собственная частота колебаний изолированного стержня; p_{un} , p_{un} – первые собственные частоты колебаний поврежденного и неповрежденного изолированных стержней соответственно; $\bar{a} = a/h$ – относительная глубина паза. Видно, что полученные зависимости практически совпадают. Это означает, что расстройка частот изгибных колебаний стержней образца камертонного типа при условии одинаковости их геометрических размеров будет определяться только параметрами, характеризующими паз.

Для проведения вычислительных экспериментов использовалась упорядоченная конечноэлементная сетка объектов исследования, за исключением участков, в которых имеют место отклонения от правильных геометрических форм, например, в местах сопряжения или повреждения, как показано на рис. 1.

Результаты исследований и их анализ. В соответствии с постановкой задачи был проведен комплекс расчетно-экспериментальных исследований по определению влияния параметров рассматриваемого повреждения на характеристики колебаний выбранных объектов. Расчеты проводились с использованием метода конечных элементов, а эксперименты – на установке, которая описана в [4].

Первоначально рассмотрим результаты расчетных исследований по определению изменения собственных колебаний изолированного стержня при варьировании глубины паза и его положения по длине стержня.

Вычислительные эксперименты проводились с использованием КЭ модели, разработанной для образца камертонного типа (см. рис. 1).

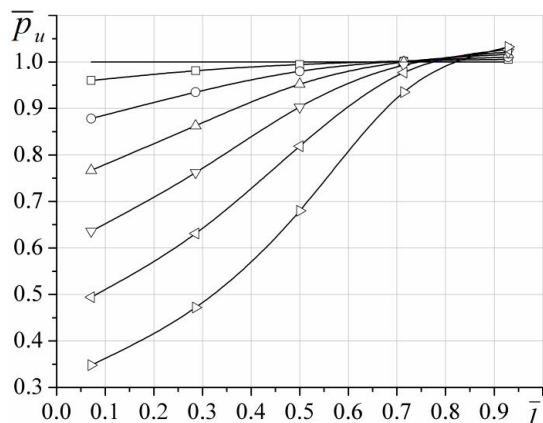


Рисунок 3. Расчетная зависимость относительной собственной частоты первой изгибной формы колебаний стержня из Ст.3 от относительного положения паза при его относительной глубине \bar{a} , равной 0.114 (\square); 0.229 (\circ); 0.343 (Δ); 0.457 (∇); 0.571 (\triangleleft) и 0.686 (\triangleright)

Figure 3. Calculated dependence of the relative natural frequency of the first flexural vibration mode for the rod of steel St.3 (Δ) on the relative position of the notch at its relative depth \bar{a} equal to 0.114 (\square); 0.229 (\circ); 0.343 (Δ); 0.457 (∇); 0.571 (\triangleleft) and 0.686 (\triangleright)

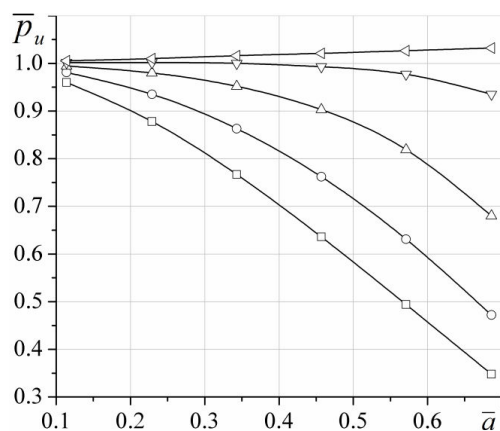


Рисунок 4. Расчетная зависимость относительной собственной частоты первой изгибной формы колебаний стержня из Ст.3 от относительной глубины паза при его относительном положении \bar{l} , равном 0.071 (\square); 0.286 (\circ); 0.5 (Δ); 0.714 (∇) и 0.929 (\triangleleft)

Figure 4. Calculated dependence of the relative natural frequency of the first flexural vibration mode for the rod of steel St.3 (Δ) on the relative depth of the notch at its relative position \bar{l} equal to 0.071 (\square); 0.286 (\circ); 0.5 (Δ); 0.714 (∇) and 0.929 (\triangleleft)

На основании результатов выполненных расчетов были определены зависимости относительных собственных частот \bar{p}_u первой изгибной формы колебаний в плоскости его максимальной жесткости от относительного положения паза $\bar{l} = l/L$ для различных значений его относительной глубины \bar{a} и относительной глубины паза для различных его положений по длине стержня, которые приведены на рис. 3 и 4 соответственно. Эти

данные получены для стержня, изготовленного из Ст. 3. Такие же зависимости получены и для стержней, изготовленных из титанового и алюминиевого сплавов, которые практически совпадают с приведенными на рисунках.

Из полученных результатов расчетов следует однозначный вывод, что в зависимости от местоположения паза по длине стержня и его глубины, как факторов, оказывающих определяющее влияние на упругие и инерционные характеристики стержня, наблюдается изменение его спектра собственных частот колебаний. Если паз расположен вблизи заделки стержня, то независимо от его глубины собственная частота колебаний меньше таковой для стержня без повреждения. При этом такое изменение тем значительнее, чем больше глубина паза. По мере удаления паза от заделки собственные частоты стержня при одной и той же глубине возрастают.

Это объясняется тем, что в этом случае уменьшается влияние паза на жесткость стержня. При определенном положении паза для данной его глубины собственные частоты колебаний стержня с повреждением и без него становятся равными, т. е. в этом

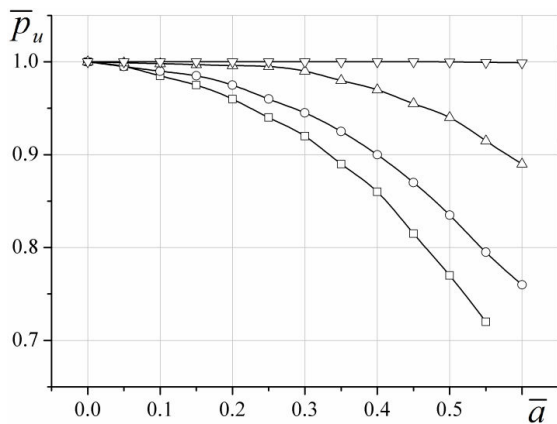


Рисунок 5. Экспериментальная зависимость относительной собственной частоты первой изгибной формы колебаний стержня из сплава Д16 от относительной глубины паза при его относительном положении \bar{l} , равном 0.08 (□); 0.25 (○); 0.5 (△); 0.786 (▽)
Figure 5. Experimental dependence of the relative natural frequency of the first flexural vibration mode for the rod of alloy D16 on the relative depth of the notch at its relative position \bar{l} equal to 0.08 (□); 0.25 (○); 0.5 (△); 0.786 (▽)

случае имеют одинаковое влияние повреждения на упругие и инерционные свойства стержня. Следует отметить, что такая ситуация наблюдается тем ближе к заделке стержня, чем меньше глубина паза. В дальнейшем собственная частота колебаний поврежденного стержня становится немного больше, чем у неповрежденного. Это связано с тем, что при расположении паза в конце стержня его собственная частота более чувствительна к изменению инерционных свойств вследствие повреждения, что согласуется с выводами работы [1].

Аналогичные результаты получены и при колебаниях стержня в плоскости минимальной жесткости.

Подтверждением результатов расчетных исследований о влиянии положения паза по длине стержня на его частотные характеристики могут служить данные испытаний стержня из алюминиевого сплава Д16, которые представлены в [4] и приведены на рис. 5. Экспериментально установлено, что при $\bar{l} = 0.786$ относительная собственная частота колебаний $\bar{p}_u \approx 1$ в выбранном диапазоне изменения глубины паза.

Проведем теперь анализ влияния повреждения на спектр собственных колебаний образца камертонного типа из выбранных материалов. Обозначим частоты стержней образца как p_j , где $j = 1, 2$. Повреждение наносилось на первый стержень образца ($j = 1$), что обуславливало расстройку их частот, т. е. $p_1 \neq p_2$.

Для образца камертонного типа при условии, что стержни колеблются по одной и той же форме, например первой, характерны две формы колебаний – синфазная и антифазная. На рис. 6 приведены зависимости относительных частот $\bar{p}^{(q)} = p^{(q)} / p$

возбуждаемых форм колебаний образцов от расстройки частот стержней $\Delta p = \frac{|p_1 - p_2|}{p_2} \times 100\%$. Здесь $q = I, II$, где I – соответствует синфазной, а II – антифазной формам колебаний; p – первая собственная частота колебаний образца со строгой регулярностью, которая в данном случае равна p_2 .

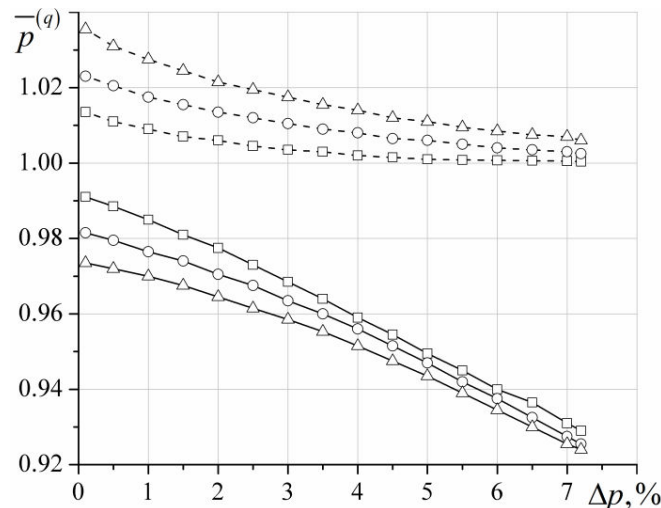


Рисунок 6. Зависимость относительных собственных частот синфазной (сплошные линии) и антифазной (штриховые) форм колебаний образцов из сплавов Д16 (□) и VT1-0 (○) и стали Ст.3 (Δ) от расстройки частот стержней

Figure 6. Dependence of the relative natural frequencies of the in-phase (solid lines) and anti-phase (dashed lines) vibration modes of the specimens of alloys D16 (□) and VT1-0 (○) and steel St.3 (Δ) on the frequency mistuning of the rods

Как видно из полученных результатов, в отличие от частотных характеристик изолированных стержней спектр собственных частот возбуждаемых форм колебаний образца камертонного типа зависит от его материала. Для образцов со строгой регулярностью, т. е. без повреждения, чем больше величина модуля упругости материала, тем больше различие собственных частот возбуждаемых форм колебаний образца. С увеличением расстройки частот стержней частотные характеристики образцов камертонного типа сближаются.

Для подтверждения результатов экспериментальных исследований по определению влияния рассматриваемого повреждения на частотные характеристики образца камертонного типа были проведены вычислительные эксперименты с использованием КЭ модели, приведенной на рис. 1. Полученные результаты расчетов хорошо согласуются с приведенными выше экспериментальными данными, а также результатами выполненных в Институте проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины расчетных исследований [5].

Полученные закономерности влияния характеристик паза на формирование спектра собственных частот колебаний как стержня, так и образца камертонного типа необходимо учитывать при изучении их резонансных колебаний. Поэтому был проведен комплекс экспериментальных исследований по изучению параметров повреждения, а также диссипативных свойств материалов на вибронпряженность образца камертонного типа при резонансе. Результаты этих исследований нашли подробное изложение в [6]. Поэтому, учитывая постановку данной работы, используем лишь приведенные в указанной публикации зависимости относительных амплитуд

резонансных напряжений стержней выбранных образцов камертонного типа при синфазной и антифазной формах их колебаний от расстройки частот стержней, которые показаны на рис. 7. Не останавливаясь на их детальном анализе, можно сделать однозначный вывод, что уровень вибронпряженности исследуемого образца камертонного типа зависит как от величины расстройки частот стержней, так и от диссипативных свойств его материала. При данной расстройке частот стержней с увеличением уровня рассеяния энергии вибронпряженность поврежденного стержня при синфазной форме колебаний образца возрастает. А при антифазной форме наиболее напряженным является неповрежденный стержень образца с наименьшим уровнем рассеяния энергии.

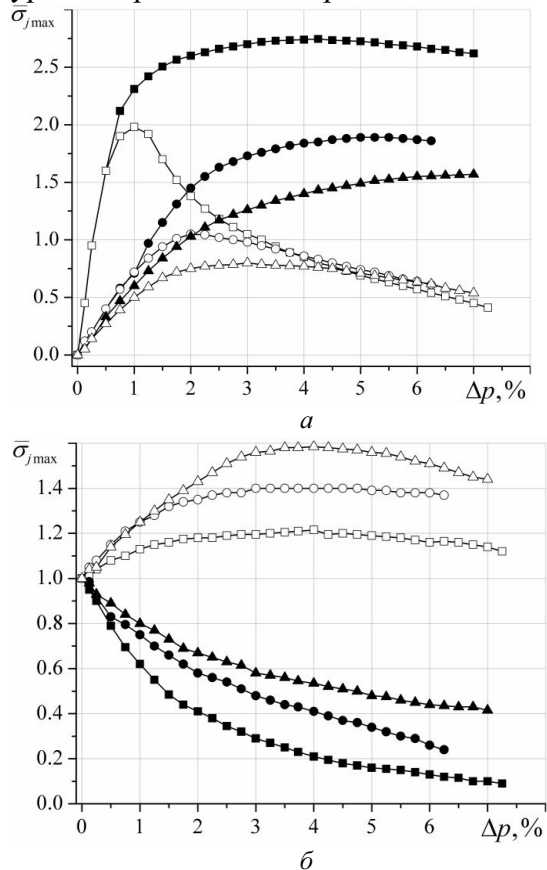


Рисунок 7. Зависимость относительных амплитуд резонансных напряжений неповрежденного (темные маркеры) и поврежденного (светлые маркеры) стержней от расстройки их частот при синфазной (а) и антифазной (б) формах колебаний образцов, изготовленных из сплавов Д16 (□, ■) и VT1-0 (○, ●) и стали Ст.3 (△, ▲)

Figure 7. Dependence of the relative resonant stress amplitudes for the undamaged (solid marks) and damaged (open marks) rods on the mistuning of their frequencies for the in-phase (a) and anti-phase (b) vibration modes of the specimens made of alloys D16 (□, ■) and VT1-0 (○, ●) and steel St.3 (△, ▲)

Учитывая установленное влияние положения повреждения на спектр собственных частот колебаний изолированного стержня, логично возникает вопрос о влиянии этого фактора на вибронпряженность образца камертонного типа при резонансе. В [4] приведены зависимости относительных амплитуд резонансных напряжений стержней образца камертонного типа из сплава Д16 для синфазной и антифазной форм его колебаний от расстройки частот стержней, полученные для четырех положений паза. В контексте данного исследования важным является результат, что в случае положения паза, соответствующем $\bar{l} = 0.786$, когда, как уже отмечалось выше, имеет место практическое равенство собственных частот колебаний поврежденного и неповрежденного изолированных стержней, их относительные резонансные напряжения при синфазной форме колебаний образца, независимо от глубины паза, оказываются, как и предполагалось, практически равными единице, т. е. образец при такой форме колебаний проявляет свойства, характерные для случая его строгой регулярности. Свидетельством ее нарушения является возбуждение антифазных колебаний стержней. При этой форме колебаний образца его стержни имеют

одинаковые уровни резонансных напряжений, что вытекает из свойства взаимноортогональности форм колебаний.

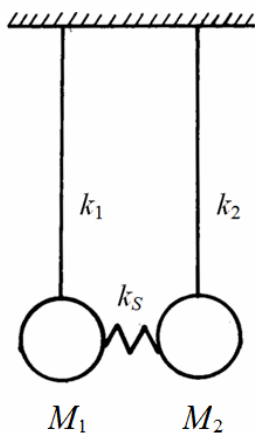
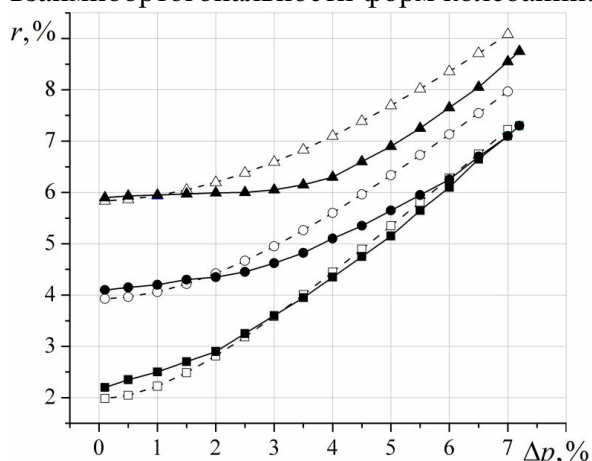


Рисунок 8. Экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) зависимости коэффициента расщепления собственных частот возбуждаемых форм колебаний образцов, изготовленных из сплавов Д16 (■, □) и VT1-0 (●, ○) и стали Ст.3 (▲, △) от расстройки частот подсистем

Figure 8. Experimental (solid lines) and calculated (dashed lines) dependences of the natural frequency splitting for the excited vibrational modes of the specimens made of alloys D16 (□, ■) and VT1-0 (○, ●) and steel St.3 (▲, △) on the frequency mistuning of the subsystems

Рисунок 9. Простейшая модель упругосвязанной системы

Figure 9. Elementary model of the elastic-coupled system

Для объяснения полученных результатов, по аналогии с моделью парных форм для систем с поворотной симметрией [7], введем в рассмотрение коэффициент расщепления частот возбуждаемых форм колебаний r . Он представляет собой разность относительных частот синфазной ($\bar{p}^{(I)}$) и антифазной ($\bar{p}^{(II)}$) форм колебаний исследуемого образца

$$r = \left| \frac{\bar{p}^{(I)}}{\bar{p}^{(II)}} - 1 \right| \times 100\% . \quad (1)$$

На рис. 8 приведены зависимости коэффициента расщепления частот от расстройки частот стержней для образцов из выбранных материалов, которые получены на основе экспериментальных данных, представленных на рис. 6. Как видно из полученных результатов, с увеличением расстройки частот стержней имеет место возрастание величины коэффициента расщепления частот возбуждаемых форм колебаний. При этом более интенсивно оно наблюдается для образца из сплава Д16, хотя наибольшая его величина характерна для образца из стали Ст.3. Из представленных данных следует, что наибольшее различие в величине коэффициента расщепления наблюдается для образца со строгой регулярностью. При увеличении расстройки частот стержней значения коэффициента расщепления сближаются, а для образцов из сплавов Д16 и VT1-0 они становятся равными. Это объясняется тем, что чем меньше коэффициент жесткости k_s упругой связи стержней, тем больше влияние на формирование спектра собственных частот колебаний образца оказывает расстройка частот стержней. Это может быть наглядно продемонстрировано на примере простейшей упругосвязанной системы, показанной на рис. 9. Относительные

собственные частоты колебаний такой системы, в предположении, что $M_1 = M_2 = M$, определяются из формулы

$$p^{-(q)^2} = \left(\frac{-2}{p_1 + p_2} + 2 \frac{k_s}{k} \right) \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{p_1 + p_2} + 2 \frac{k_s}{k} \right)^2 \frac{1}{4} - \left[\frac{-2-2}{p_1 p_2} + \left(\frac{-2}{p_1} + \frac{-2}{p_2} \right) \frac{k_s}{k} \right]}, \quad (2)$$

где k – коэффициент жесткости настроенной подсистемы.

Были проведены расчеты по определению коэффициента расщепления возбуждаемых форм колебаний рассматриваемой системы для значений отношения коэффициентов жесткости k_s/k , равных 0.06, 0.04 и 0.02. Такие значения были выбраны из условия, чтобы коэффициенты расщепления образца камертонного типа и дискретной упругосвязанной системы при их строгой регулярности ($\Delta p = 0$) практически совпадали.

Расчетные зависимости коэффициента расщепления r возбуждаемых форм колебаний дискретной упругосвязанной системы от расстройки частот ее подсистем показаны на рис. 8 штриховыми линиями. Их анализ показывает, что качественно они совпадают с таковыми для образца камертонного типа, что свидетельствует о правильности изложенного выше объяснения влияния расстройки частот колебаний стержней на коэффициент расщепления частот возбуждаемых форм колебаний образцов камертонного типа.

В работе [7] эмпирически показано и в дальнейшем подтверждено результатами расчетных исследований [8], что достаточной характеристикой нарушения поворотной симметрии системы при условии справедливости модели парных форм колебаний, т. е. когда кратные собственные частоты взаимноортогональных форм существенно раздвинуты, является параметр связанности парных форм колебаний

$$S = r/\delta, \quad (3)$$

где δ – соответствующая этим формам колебаний диссипативная характеристика системы.

Учитывая отмеченную выше аналогию модели парных форм и колебаний образца камертонного типа, применим указанную характеристику для анализа его резонансных колебаний.

На рис. 10 приведены зависимости параметра S связанности возбуждаемых форм колебаний исследуемого образца камертонного типа из выбранных материалов от расстройки частот стержней. Здесь в качестве диссипативной характеристики системы выбрано среднее значение логарифмического декремента колебаний, численные значения которых равны 0.77%, 0.46% и 0.315%, для образца из Ст.3, ВТ1-0 и Д16 соответственно.

Известно [8], что чем меньше величина указанного параметра, тем больше связанность форм колебаний системы. Это означает, что возрастает влияние одной формы колебаний на другую.

Из представленных данных следует, что в рассмотренном диапазоне изменения расстройки частот колебаний стержней наименьшая величина параметра связанности S характерна для образца, изготовленного из стали Ст.3, обладающего максимальной демпфирующей способностью. Для образца из сплава Д16 при расстройке частот стержней, превышающей 2%, характерна наибольшая величина параметра связанности, поскольку он обладает минимальной величиной декремента колебаний среди выбранных материалов.

Именно вследствие связанности возбуждаемых форм колебаний наблюдается возрастание вибронапряженности образца из стали Ст.3 при синфазной форме и соответственно его снижение – при антифазной. Для образца, изготовленного из сплава Д16, который обладает наибольшим значением параметра связанности S ,

взаимовлияние форм колебаний стержней существенно уменьшается, что влечет за собой снижение его вибронпряженности при синфазной и соответственно возрастание при антифазной формах колебаний по сравнению с образцом из Ст.3.

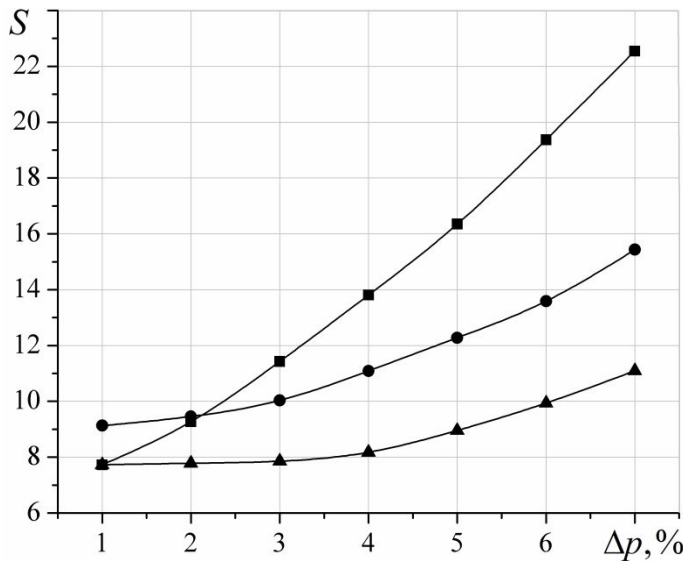


Рисунок 10. Зависимость параметра связанности возбуждаемых форм колебаний образцов изготовленных из сплавов Д16 (■) и VT1-0 (●) и стали Ст.3 (▲) от расстройки частот стержней

Figure 10. Dependence of the coupling parameter of the excited vibration modes for the specimens made of alloys D16 (■) and VT1-0 (●) and steel St.3 (▲) on the frequency mistuning of the rods

Ввиду вышесказанного, можно сделать вывод, что параметр связанности форм колебаний является достаточной характеристикой для оценки закономерностей формирования колебаний образца камертонного типа как простейшего примера регулярной системы при наличии повреждения в виде забоины с учетом влияния рассеяния энергии.

Заключение. На основании результатов проведенного комплекса расчетно-экспериментальных исследований установлены закономерности влияния параметров эксплуатационной неоднородности, обусловленной забоиной, на формирование спектра собственных частот колебаний образца камертонного типа как простейшей регулярной системы и его составляющих стержней, а также их вибронпряженность при резонансе с учетом влияния рассеяния энергии в материале, которые могут быть использованы при выборе диагностических параметров наличия рассматриваемого повреждения.

Conclusions. Based on the results of a complex series of experimental-and-computational investigations performed, the mechanisms were identified of the influence of the parameters of service irregularity caused by dent-type damage on the formation of the spectrum of natural frequencies of the tuning fork specimen vibrations considered as a simplest regular system with its constituent rods, as well as their vibration stress level at resonance with consideration of the energy dissipation in the material, which can be used in choosing the diagnostic parameters to identify the presence of damage.

Список использованной литературы

1. Борискин, О.Ф. Моделирование дефектных состояний конструкций. Сообщение 1 [Текст] / О.Ф. Борискин, В.В. Персиянов // Пробл. прочности. – 1994. – № 1. – С. 100 – 105.
2. Марценюк, Е.В. Влияние дефекта типа «забоина» на частотные характеристики рабочих лопаток компрессора [Текст] / Е.В. Марценюк, А.И. Гаркуша, В.С. Чигрин // Авиационно-космическая техника и технология. – 2011. – № 8 (85). – С. 61 – 65.
3. Матвеев, В.В. К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях [Текст] / В.В. Матвеев, А.П. Бовсуновский // Пробл. прочности. – 2000. – № 3. – С. 5 – 23.
4. Токарь, И.Г. Влияние параметров локального повреждения регулярной системы на спектр собственных частот колебаний и вибронпряженность однотипных элементов [Текст] /

- И.Г. Токарь, А.П. Зиньковский // Пробл. прочности. – 2010. – № 2. – С. 55 – 64.
5. Воробьев, Ю.С. Анализ колебаний систем лопаток турбомашин с повреждением [Текст] / Ю.С. Воробьев, М.А. Стороженко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2007. – Вып. 8/44. – С. 132 – 134.
 6. Влияние рассеяния энергии на формирование колебаний модели системы лопаток с повреждением [Текст] / А.П. Зиньковский, И.Г. Токарь, В.А. Круц, Я.Д. Круглый // Вибрации в технике и технологиях. – 2011. – № 3. – С. 11 – 17.
 7. Ewins, D.J. The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks // J. Sound and Vibr. – 1969. – 9, No 1. – P. 65 – 79.
 8. Матвеев, В.В. О границах применимости модели парных форм при исследовании колебаний поворотно-симметричных систем [Текст] / В.В. Матвеев, А.П. Зиньковский, М.В. Смертюк // Пробл. прочности. – 1990. – № 5. – С. 106 – 109.

Получено 07.08.2013