

УДК 539.3

В. Попович, докт. техн. наук; Н. Заводовська, канд. фіз.-мат. наук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

## ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ СКІНЧЕНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ЗА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ З СЕРЕДОВИЩАМИ ЗМІННИХ ТЕМПЕРАТУР

**Резюме.** Розглянуто двовимірну нелінійну стаціонарну задачу теплопровідності для термочутливого циліндра скінченої довжини. Враховано теплообмін на усіх поверхнях циліндра із зовнішніми середовищами різних функційно-змінних температур. Розв'язок задачі побудовано з використанням методу лінеаризувальних параметрів щодо визначення температурних полів у термочутливих елементах конструкцій та скінчених інтегральних перетворень.

**Ключові слова:** нелінійна задача теплопровідності, термочутливе тіло, скінчений циліндр, конвективний теплообмін, середовища змінної температури, метод лінеаризувальних параметрів, аналітично-числова методика.

V. Popovych, N. Zavadovska

## THE TEMPERATURE FIELD FOR THERMOSENSITIVE FINITE CYLINDER UNDER CONVECTIVE HEAT EXCHANGE WITH THE VARIABLE TEMPERATURE SURROUNDINGS

**Summary.** A lot of structural elements of modern technology take the form of a finite cylinder and in the manufacture and operation are often subjected to significant temperatures (high and low level temperatures). To ensure their reliable operation already at the design stage the detailed analysis of the temperature field and flow conditions of heat exchange processes should be carried out taking full account of heterogeneity (due to the fact that the physical and mechanical properties of materials depend on temperature changes) and actual operating condition also (taking into account heat exchange on all surfaces the surrounding temperatures of which are not constant).

The method of construction the solutions to two-dimensional nonlinear stationary heat conduction problems on the example of thermosensitive cylinder with convective heat exchange is proposed. The convective heat exchange with varying (on the coordinates) surroundings temperature through all cylinder surfaces is considered. The two-step linearization (partial - by introducing the Kirchhoff variable and final - by using the linearizing parameters method) is realized for solving the corresponding nonlinear heat conduction problem. This method is effective for constructing analytical and numerical solutions of heat conduction problems for thermosensitive bodies, if they have convective heat transfer conditions at their surfaces. This method involves the construction of solution to the equation for Kirchhoff variable with a linear condition that includes certain "linearizing parameters". The resulting linear problem for the Kirchhoff variable is solved by finite integral transformation method.

The distribution of temperature field of cylinder and also the influence of material temperature-sensitivity on it taking into account linear dependence of heat conduction factor is determined. The comparison of the obtained solutions with solutions of similar problems for the permanent characteristics of the material and the mid-integral characteristics values for a given temperature range is made.

**Key words:** nonlinear heat conduction problem, thermosensitive body, finite cylinder, convective heat exchange, temperature variable environment, linearizing parameters method, analytic-numerical method.

**Постановка проблеми.** Багато елементів конструкцій сучасної техніки мають форму скінченого циліндра і при виготовленні та експлуатації часто зазнають впливу істотних змін температур (температур високих і низьких рівнів). Для забезпечення їх надійного функціонування вже на етапі проектування необхідно проводити детальний аналіз їх температурного поля та умов протікання теплообмінних процесів з повним урахуванням неоднорідності (зумовленої тим, що фізико-механічні характеристики

матеріалів залежать від зміни температури), а також умов реальної експлуатації (враховування теплообміну на усіх поверхнях із зовнішнім середовищем, температура якого не є сталою).

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Оскільки експлуатація конструкцій та їх елементів часто проходить в умовах високих чи низьких рівнів температури, важливим є врахування в їх математичних моделях, для визначення розподілу температури, температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалів, з яких вони виготовлені [1, 2, 3]. Це дає можливість точніше визначити їх тепловий стан, але ускладнює побудову розв'язків відповідних задач теплопровідності. При врахуванні температурної залежності характеристик матеріалу тіла визначення розподілу температури зводиться до розв'язування нелінійної задачі теплопровідності за певних умов теплообміну із зовнішнім середовищем [1, 2, 4]. Для побудови аналітично-числових розв'язків таких задач, якщо на поверхні тіла задано умови конвективного теплообміну, вважається ефективним метод лінеаризувальних параметрів, який передбачає побудову розв'язку рівняння на змінну Кірхгофа з деякою лінійною умовою, що містить так званий «лінеаризувальний параметр» [2, 4, 5]. Аналітичні та аналітично-числові методи дослідження температурних полів у термочутливих елементах конструкцій відображені у працях [1, 2, 4, 5].

**Метою роботи** є адаптація методу лінеаризувальних параметрів для побудови аналітично-числових розв'язків нелінійних двовимірних задач на прикладі стаціонарної задачі теплопровідності для термочутливого циліндра за наявності конвективного теплообміну на усіх його поверхнях з середовищами різних функційно-змінних за координатами температур.

**Постановка задачі теплопровідності та побудова її розв'язку.** Розглянемо скінчений циліндр  $-b/2 \leq z \leq b/2$ ,  $0 \leq r \leq r_0$ , який нагрівається шляхом конвективного теплообміну через усі обмежуючі поверхні. Через торцеві поверхні середовищами змінних за радіальною координатою температур  $t_{s2}(r)$  на поверхні  $z = -b/2$  та  $t_{s3}(r)$  на поверхні  $z = b/2$ , а через циліндричну поверхню  $r = r_0$  – середовищем змінної за осью координатою температури  $t_c(z)$ . Матеріал циліндра термочутливий.

Стаціонарне температурне поле такого циліндра визначаємо із такої нелінійної задачі теплопровідності:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_i(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_i(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = 0; \quad (1)$$

$$\left[ \lambda_i(t) \frac{\partial t}{\partial r} + \alpha_1 (t - t_c(z)) \right]_{r=r_0} = 0, \quad \left[ \lambda_i(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right]_{r=0} = 0;$$

$$\left[ \lambda_i(t) \frac{\partial t}{\partial z} - \alpha_2 (t - t_{s2}(r)) \right]_{z=-b/2} = 0;$$

$$\left[ \lambda_i(t) \frac{\partial t}{\partial z} + \alpha_3 (t - t_{s3}(r)) \right]_{z=b/2} = 0, \quad (2)$$

де  $\lambda_i(t)$  – залежний від шуканої температури коефіцієнт теплопровідності;  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – коефіцієнти теплообміну з довколишніми середовищами.

Побудову розв'язку задачі теплопровідності (1) – (2) здійснюємо на основі одного із варіантів методу лінеаризувальних параметрів визначення температурного поля термочутливого тіла за умов складного теплообміну [2, 4, 5]. Залежний від температури коефіцієнт теплопровідності матеріалу циліндра подаємо у вигляді  $\lambda(t) = \lambda_0 \lambda^*(T)$ , де  $\lambda_0$  – стала величина, що має розмірність відповідної характеристики (опорне значення характеристики), а  $\lambda_i^*(T)$  – функція, що описує залежність характеристики від

безрозмірної температури  $T = t/t_0$ , де  $t_0$  – деяка, вибрана нами, відлікова температура.

Введемо безрозмірні: координати –  $\rho = r/l_0$ ,  $\xi = z/l_0$ ; температури зовнішніх середовищ –  $T_c(\xi) = t_c(\xi)/t_0$ ;  $T_{sj}(\rho) = t_{sj}(\rho)/t_0$  ( $j = 2,3$ ); опорні критерії Біо –  $Bi_i = \alpha_i l_0 / \lambda_{t_0}$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) та розміри циліндра  $\rho_0 = r_0/l_0$ ,  $\bar{b} = b/l_0$ , де  $l_0$  – деякий характерний розмір циліндра. До записаної у введених безрозмірних величинах задачі (1) – (2) застосовано перетворення Кірхгофа [2]

$$\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T) dT, \quad (3)$$

де  $T_p$  – мінімальне значення безрозмірної температури з діапазону задавання коефіцієнта теплопровідності.

Як результат, отримаємо крайову задачу на змінну Кірхгофа у безрозмірних величинах

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} &= 0; \\ \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + Bi_1(T(\theta) - T_c(\xi)) \right]_{\rho=\rho_0} &= 0, \quad \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right]_{\rho=0} = 0; \\ \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - Bi_2(T(\theta) - T_{s2}(\rho)) \right]_{\xi=-\bar{b}/2} &= 0, \quad \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + Bi_3(T(\theta) - T_{s3}(\rho)) \right]_{\xi=\bar{b}/2} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $T(\theta)$  – вираз температури через змінну Кірхгофа  $\theta$ , отриманий у результаті розв’язання рівняння (3).

Введення змінної Кірхгофа лише частково лінеаризувало вихідну задачу. В задачі (4) – (5) нелінійності зосередилися у виразах температур  $T(\theta)$  на поверхнях  $\rho = \rho_0$  та  $\xi = \pm \bar{b}/2$ . Остаточну лінеаризацію цієї задачі здійснено методом лінеаризувальних параметрів [2, 4]. Його суть полягає в тому, що нелінійні умови (8) – (9) лінеаризуємо шляхом апроксимації нелінійних залежностей температури  $T(\theta)$  на відповідних поверхнях лінійними виразами, що містять так звані «лінеаризувальні параметри». Отже, враховуючи сказане, вводимо такі заміни:

$$\begin{aligned} T(\theta)|_{\rho=\rho_0} &= (1 + \kappa_1) \theta|_{\rho=\rho_0} + T_p; \\ T(\theta)|_{\xi=-\bar{b}/2} &= (1 + \kappa_2) \theta|_{\xi=-\bar{b}/2} + T_p; \\ T(\theta)|_{\xi=\bar{b}/2} &= (1 + \kappa_3) \theta|_{\xi=\bar{b}/2} + T_p, \end{aligned} \quad (6)$$

1. де  $\kappa_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – деякі поки що невідомі величини («лінеаризувальні параметри»). Тоді з нелінійних умов (5) отримуємо такі лінійні умови

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \alpha_1^*(\theta - T_c^*(\xi)) \right]_{\rho=\rho_0} &= 0; \\ \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \alpha_2^*(\theta - T_{s2}^*(\rho)) \right]_{\xi=-\bar{b}/2} &= 0; \\ \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \alpha_3^*(\theta - T_{s3}^*(\rho)) \right]_{\xi=\bar{b}/2} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\alpha_i^* = Bi_i(1 + \kappa_i)$  ( $i = \overline{1,3}$ ),  $T_c^*(\xi) = (T_c(\xi) - T_p)/(1 + \kappa_1)$ ,  $T_{sj}^*(\rho) = (T_{sj}(\rho) - T_p)/(1 + \kappa_j)$  ( $j = 2,3$ ), що робить задачу (4), (7) на змінну Кірхгофа  $\theta$  лінійною.

Для побудови розв’язку задачі (4), (7) скористаємося методом скінчених інтегральних перетворень [6, 7, 8]. Введемо скінчене перетворення Фур’є за осьюовою координатою  $\xi$  та його обернення

$$\bar{\theta}(\rho, \lambda_m) = \int_{-b/2}^{b/2} \theta(\rho, \xi) K(\xi, \lambda_m) d\xi; \quad (8)$$

$$\theta(\rho, \xi) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m \bar{\theta}(\rho, \lambda_m) K(\xi, \lambda_m)}{N_m}, \quad (9)$$

а також скінчене перетворення Ганкеля за радіальною координатою  $\rho$  [9]

$$\tilde{\theta}(\gamma_n, \lambda_m) = \int_0^{\rho_0} \rho \bar{\theta}(\rho, \xi) J_0(\gamma_n \rho) d\rho; \quad (10)$$

$$\bar{\theta}(\rho, \xi) = \frac{2}{\rho_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\theta}(\gamma_n, \lambda_m) J_0(\gamma_n \rho)}{J_0^2(\gamma_n \rho_0) + J_1^2(\gamma_n \rho_0)}, \quad (11)$$

де  $K(\xi, \lambda_m) = \lambda_m \cos[\lambda_m(\xi + b/2)] + \alpha_2^* \sin[\lambda_m(\xi + b/2)]$ ;

$$N_m = 2\lambda_m \left[ \alpha_2^* + b(\lambda_m^2 + \alpha_2^{*2}) \right] - 2\lambda_m \alpha_2^* \cos(2\lambda_m b) + (\lambda_m^2 - \alpha_2^{*2}) \sin(2\lambda_m b), \quad J_0(\cdot), \quad J_1(\cdot) - \text{функції}$$

Бесселя першого роду нульового і першого порядків [10];  $\lambda_m \equiv \lambda_m^*(\kappa_2, \kappa_3)$  є додатними коренями трансцендентного рівняння

$$\text{tg}(\lambda_m b) = \frac{\lambda_m(\alpha_2^* + \alpha_3^*)}{(\lambda_m^2 - \alpha_2^* \alpha_3^*)},$$

а  $\gamma_n \equiv \gamma_n^*(\kappa_1)$  є додатними коренями трансцендентного рівняння

$$\alpha_1^* J_0(\gamma_n \rho_0) - \gamma_n J_1(\gamma_n \rho_0) = 0.$$

У результаті застосування прямих перетворень Фур'є (8) та Ганкеля (10) до задачі (4), (7), отримуємо вираз для змінної Кірхгофа у зображеннях

$$\tilde{\theta}(\gamma_n, \lambda_m) = \frac{1}{\mu_{mn}^2} \left[ \rho_0 \alpha_1^* A_m(\lambda_m) J_0(\gamma_n \rho_0) + C_n(\lambda_m, \gamma_n, \rho_0) - T_p \frac{\rho_0}{\gamma_n} J_1(\gamma_n \rho_0) B_m(\lambda_m) \right], \quad (12)$$

$$\text{де } A_m(\lambda_m) = \int_{-b/2}^{b/2} T_c^*(\xi) K(\xi, \lambda_m) d\xi, \quad B_m(\lambda_m) = -Bi_2 K(-b/2, \lambda_m) + Bi_3 K(b/2, \lambda_m), \quad \mu_{mn}^2 = \gamma_n^2 + \lambda_m^2,$$

$$C_n(\lambda_m, \gamma_n, \rho_0) = -Bi_2 K(-b/2, \lambda_m) \int_0^{\rho_0} T_{s2}(\rho) \rho J_0(\gamma_n \rho) d\rho + Bi_3 K(b/2, \lambda_m) \int_0^{\rho_0} T_{s3}(\rho) \rho J_0(\gamma_n \rho) d\rho.$$

Формули обернення (9), (11), застосовані до (12), дають такий вираз для змінної Кірхгофа:

$$\theta(\rho, \xi) = \frac{8}{\rho_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n \rho)}{M_n} \left( \alpha_1^* J_0(\gamma_n \rho_0) \sum_{m=1}^{\infty} S_{mn}(\xi, \lambda_m) A_m(\lambda_m) - \frac{T_p J_1(\gamma_n \rho_0)}{\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} S_{mn}(\xi, \lambda_m) B_m(\lambda_m) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\rho_0} \sum_{m=1}^{\infty} S_{mn}(\xi, \lambda_m) C_n(\lambda_m, \gamma_n, \rho_0) \right) \right\}, \quad (13)$$

$$\text{де } M_n = J_0(\gamma_n \rho_0)^2 + J_1(\gamma_n \rho_0)^2, \quad S_{mn}(\xi, \lambda_m) = \lambda_m K(\xi, \lambda_m) / (N_m \mu_{mn}^2).$$

Значення невідомих лінеаризувальних параметрів  $\kappa_i$  ( $i = 1, 3$ ), що входять у вираз для змінної Кірхгофа (13), а, отже, і шуканої температури, знаходимо, задовольняючи з заданою точністю нелінійні граничні умови (5). Припустимо, що коефіцієнт теплопровідності є лінійна функція температури

$$\lambda_t(t) = \lambda_{t0} \lambda_t^* = \lambda_{t0} (1 + \kappa_\lambda (T - T_p)), \quad (14)$$

що є справедливим для багатьох матеріалів [1, 5].

Тоді, відповідно до формули (3), температуру в циліндрі, як розв'язок відповідного квадратного рівняння, визначаємо за формулою

$$T(\theta) = k^{-1} \left( \sqrt{1 + 2k\theta} - 1 \right) + T_p, \quad (15)$$

а для обчислення значень лінеаризувальних параметрів з рівностей (6) отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} k(1 + \kappa_1)^2 \theta|_{\rho=\rho_0} + 2\kappa_1 &= 0; \\ k(1 + \kappa_2)^2 \theta|_{\xi=-\bar{b}/2} + 2\kappa_2 &= 0; \\ k(1 + \kappa_3)^2 \theta|_{\xi=\bar{b}/2} + 2\kappa_3 &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

де  $\theta \equiv \theta(\rho, \xi, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$  мають вигляд (13).

Для знаходження  $\kappa_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) з (16) (за конкретного значення однієї з координат) використовуємо метод Ньютона для системи нелінійних рівнянь, за перше наближення якого вибираємо  $\kappa_i = 0$  ( $i = \overline{1,3}$ ) [5].

**Числові дослідження.** Проведено числові дослідження температурного поля (15) у циліндрі, виготовленому зі сталі У12, висота якого  $b = 0.1$  м, а радіус  $r_0 = 0.05$  м. Температури довколишніх середовищ, що оточують циліндр, задані у вигляді функційно-змінних температур. Коефіцієнт теплопровідності взято у діапазоні температур  $t_p = 273^\circ \text{К} - t_{\text{max}} = 673^\circ \text{К}$ . За відлікове значення температури  $t_0$  прийнято  $t_{\text{max}} = 673^\circ \text{К}$ , а за характерний розмір – радіус циліндра  $l_0 = r_0$ . Згідно з [11] опорне значення коефіцієнта теплопровідності  $\lambda_{r_0} = 47.8 \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$ , а  $k_\lambda = -0.366$ . Середньо-інтегральне значення коефіцієнта теплопровідності для заданого діапазону температур –  $\lambda_{av} = 42.6$ .

Розглянуто кілька випадків температур довколишніх середовищ, які омивають поверхні циліндра:

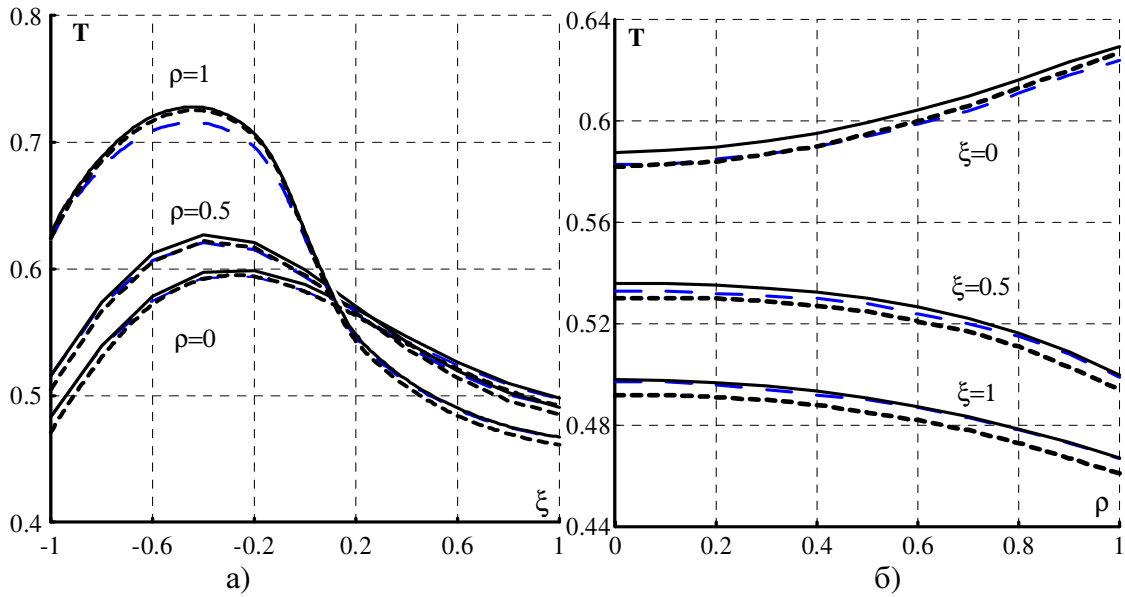
1) поверхня  $\rho = \rho_0$  – середовищем, температура якого змінюється за законом  $T_c(\xi) = T_{\text{max}} + (T_p - T_{\text{max}})S_-(\xi)$ , поверхня  $\xi = -\bar{b}/2$  – середовищем температури  $T_{s2}(\rho) = T_{\text{max}}$ , а поверхня  $\xi = \bar{b}/2$  – середовищем температури  $T_{s3}(\rho) = T_p$ ;

2)  $T_c(\xi) = T_p + ((T_{\text{max}} - T_p)\xi^2)S_-(-\xi)$ ,  $T_{s2}(\rho) = T_{\text{max}}$ ,  $T_{s3}(\rho) = T_p$ ;

3)  $T_c(\xi) = T_p + ((T_{\text{max}} - T_p)\xi^2)S_-(-\xi)$ ,  $T_{s2}(\rho) = T_p + (T_{\text{max}} - T_p)\rho^2$ ,  $T_{s3}(\rho) = T_p$ .

$$\text{Тут } S_-(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}.$$

В усіх розглянутих випадках температуру довколишніх середовищ, які омивають поверхні циліндра, задано таким чином, щоб вони при підході до кутових точок мали однакові значення.



**Рисунок 1.** Розподіл температури циліндра за осьюою (а) та радіальною (б) координатами для першого випадку зміни температур зовнішніх середовищ

**Figure 1.** Temperature distribution on the axial (a) and the radial (б) coordinates for the first case of changing surroundings temperature

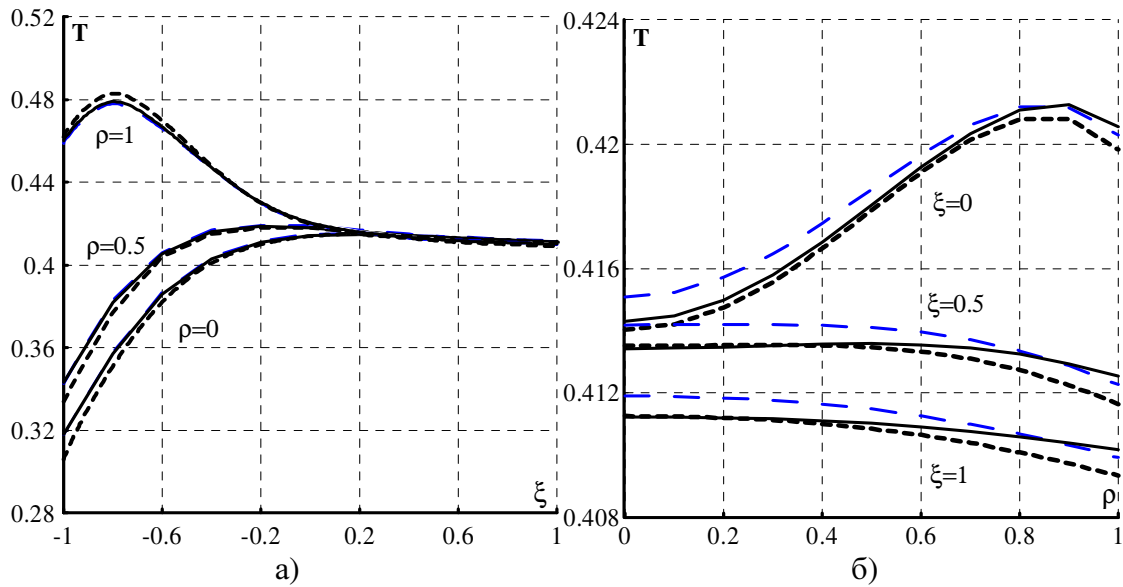
Результати числових досліджень наведено у вигляді графіків, що на рисунках 1 – 3, де суцільні лінії відповідають розподілу температури у термочутливому циліндрі. Інші криві відповідають розподілам температури за нехтування термочутливістю матеріалу, тобто за сталого коефіцієнта теплопровідності: штрихові – коефіцієнт теплопровідності дорівнює опорному  $\lambda_{i0}$ , а пунктирні – середньо-інтегральному значенню  $\lambda_{av}$  коефіцієнта теплопровідності термочутливого матеріалу.

У заданому діапазоні температур максимальна зміна значень коефіцієнта теплопровідності становить 22%.

Результати розрахунків залежності розподілу безрозмірного температурного поля  $T$  від осьюої координати  $\xi$  на різних відстанях від осі циліндра, проведених із використанням формул (13), (15) для першого випадку зміни температур зовнішніх середовищ, зображено на рис. 1а, а від безрозмірної радіальної координати  $\rho$  – на рис. 2б при  $Bi_1 = 1, Bi_2 = Bi_3 = 0.5$ .

1.3 наведених графіків бачимо, що вплив температурної залежності коефіцієнта теплопровідності на розподіл температурного поля стає істотнішим при наближенні до поверхні  $\rho = 1$  та до осі циліндра. Нехтування температурною залежністю коефіцієнта теплопровідності (заміна його на опорне значення) (рис. 1) призводить до зниження значень температури, особливо на поверхні  $\rho = \rho_0$  та на осі циліндра. При використанні середньо-інтегрального значення коефіцієнта теплопровідності спостерігаємо аналогічний ефект. Для заданого діапазону температур встановлено, що розбіжності між температурами, знайденими за залежних від температури характеристик та їх опорних значень, є меншими біля поверхонь  $\xi = \bar{b}/2, \rho = 0$ , а знайдені за залежних від температури характеристик та їх середніх значень є меншими на  $\rho = \rho_0$ .

2. Наведені нижче рисунки ілюструють залежності розподілу безрозмірного температурного поля  $T$  від координат для другого (рис. 2) та третього (рис. 3) випадків зміни температур зовнішніх середовищ.

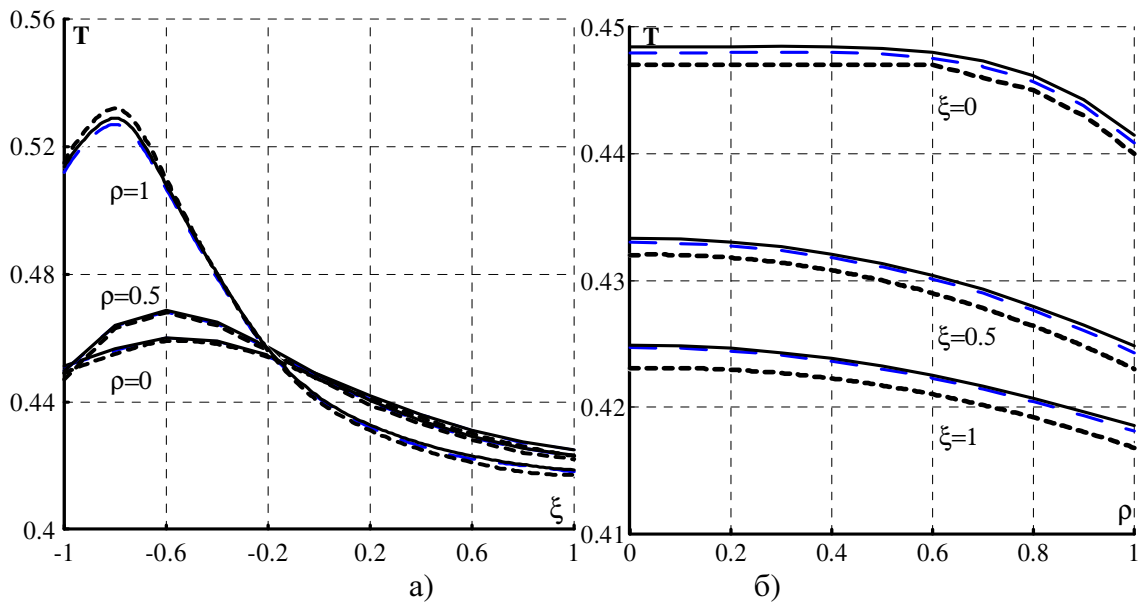


**Рисунок 2.** Розподіл температури циліндра за осьовою (а) та радіальною (б) координатами для другого випадку зміни температур зовнішніх середовищ

**Figure 2.** Temperature distribution on the axial (a) and the radial (б) coordinates for the second case of changing surroundings temperature

При зміні розподілу температури зовнішнього середовища спостерігаємо, що розбіжності між температурами, знайденими за залежного від температури коефіцієнта теплопровідності та його опорного значення, є меншими, ніж знайденого за залежних від температури коефіцієнта теплопровідності та його середньо-інтегрального значення (рис. 3).

3.



**Рисунок 3.** Розподіл температури циліндра за осьовою (а) та радіальною (б) координатами для третього випадку зміни температур зовнішніх середовищ

**Figure 3.** Temperature distribution on the axial (a) and the radial (б) coordinates for the third case of changing surroundings temperature

Під час числового дослідження розподілу температурного поля по координатах

встановлено, що достатньо обчислювати лише один лінеаризувальний параметр. При радіальному розподілі температури параметр  $\kappa_2$ , який обчислюємо з умови конвективного теплообміну на торці циліндра  $\xi = -\bar{b}/2$ , а при осьовому  $\kappa_1$ , який обчислюємо з умови конвективного теплообміну на циліндричній поверхні  $\rho = \rho_0$ . Інші параметри залишаються такими як при початкових значеннях координат.

**Висновки.** На задачі теплопровідності для термочутливого циліндра скінченної довжини, який конвективно обмінюється теплом через усі обмежуючі поверхні з середовищами функційно-змінних температур, апробовано метод лінеаризувальних параметрів для побудови розв'язків двовимірних задач теплопровідності елементів конструкцій, виходячи з моделі термочутливого тіла.

Розв'язок розглянутої задачі може бути використано для розрахунку стаціонарних температурних полів та дослідження умов протікання теплообмінних процесів у елементах апаратів, конструкцій і споруд, які мають форму скінченого циліндра та працюють в умовах, коли необхідно враховувати теплообмін на усіх його поверхнях (з середовищами змінних високих температур).

4. Для розглянутих функційних залежностей температури довколишнього середовища від координат досліджено, що заміна коефіцієнта теплопровідності на його опорне значення у більшості випадків дає меншу похибку в обчисленні температури, ніж його заміна на середньо-інтегральне значення (для заданого діапазону температур).

**Conclusios.** The linearizing parameters method to determine the temperature fields in the thermosensitive structural elements on the example of two-dimensional nonlinear stationary heat conduction problem for finite temperature-sensitive cylinder with convective heat exchange with functionally variable temperature surroundings through all its surfaces is tested.

The solution of the considered problem can be used to calculate the stationary temperature fields and study the conditions of heat exchange processes in structures and facilities that have the form of a finite cylinder and operate in the surroundings, where you need to consider heat exchange in all surfaces (with variable high temperatures surroundings).

For the considered functional surroundings temperature dependences on coordinates it was investigated that thermal conductivity replacement by its basic value in most cases gives smaller accuracy in the temperature calculation than its replacement by mid-integral value (for a given temperature range).

### Список використаної літератури

1. Коляно, Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела [Текст] / Ю.М. Коляно – Киев: Наукова думка, 1992. – 280 с.
2. Кушнір, Р.М. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; за заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл [Текст] / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.
3. Noda, N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties [Текст] / N. Noda // In: Thermal Stresses I. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – P. 391 – 483.
4. Попович, В.С. Температурне поле термочутливого півпростору від нагрівання миттєвим лінійним джерелом тепла [Текст] / В.С. Попович, Н.О. Горечко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 4. – С. 183 – 188.
5. Попович, В.С. Метод лінеаризувальних параметрів у задачах термопружності термочутливих тонкостінних елементів конструкцій [Текст] / В.С. Попович, В.В. Янішевський // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 152 – 161.
6. Галицын, А.С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности [Текст] / А.С. Галицын, А.Н. Жуковский. – Киев: Наукова думка, 1976. – 283 с.
7. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел [Текст] / Э.М. Карташов. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
8. Parihar, K.S. and Sunita S. Patil Transient Heat Conduction and Analisis of Thermal Stresses in Thin Circular Plate [Текст] / K.S. Parihar and S. Sunita // Journal of Thermal Stresses. – 2011. – 34. – P. 335 –



- 351.
9. Снеддон, И. Преобразования Фурье [Текст] / И. Снеддон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955. – 667 с.
  10. Справочник по специальным функциям [Текст]; под ред. М. Абрамовица, Н. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
  11. Марочник сталей и сплавов [Текст]; под ред. В.Г. Сорокина. – Москва: Машиностроение, 1989. – 640 с.

*Отримано 17.09.2013*