***Р. Мацьків. Неполіноміальні моделі квантової теорії поля в евклідовому підході / Р. Мацьків // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 72. — № 4. — С.260-266. — (математичне моделювання. математика. фізика).***

*УДК 539.126; 519.2*

**Р. Мацьків, канд. фіз.-мат. наук**

*Тернопільський національний економічний університет*

# НЕПОЛІНОМІАЛЬНІ МОДЕЛІ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ В ЕВКЛІДОВОМУ ПІДХОДІ

***Резюме.*** *В рамках евклідової квантової теорії поля запропоновано метод вивчення характеристичних функцій для евклідових функцій Гріна в моделі з експоненціальним лагранжіаном взаємодії в двовимірному просторі при різних значеннях допоміжної константи зв'язку $\alpha$ і головної константи зв'язку $g$. Доведено, що в двовимірному випадку і $\alpha^2 > 8\pi$ відповідна евклідова теорія є тривіальною, а у випадку $\alpha^2 < 4\pi$ і достатньо великих значеннях $g > 0$ ця теорія нетривіальна при усунутих об'ємному і ультрафіолетовому обрізаннях. Виконання аксіом Остервальдера – Шрадера для евклідових функцій Гріна гарантує існування відповідної квантової теорії поля в аксіоматиці Гордінга – Вайтмана.*

***Ключові слова****: випадкове гаусівське поле, експоненціальний лагранжіан взаємодії, евклідові функції Гріна.*

**R. MATSKIV**

# NONPOLYNOMIAL MODELS OF QUANTUM FIELD THEORY IN THE EUCLIDEAN APPROUCH

***Summary.*** *New method of investigation of the Euclidean Green functions for the nonpolynomial models of the quantum theory of field is proposed. The model with exponential interaction in the two-dimensional case is analysed. The monography by B.Simon emphathises the importance of these models from the scientific and methodical point of view. It should be noted, that at first the Wightman functions were used to state this theory. But after K.Osterwalder had found the connection between the Wightman and the Euclidean Green functions and the Nelson theorem of reconstruction had been proved, the construction of the relevant Euclidean model of the quantum theory of the field was reduced to the application of the theory of relativity methods (theory of Gaussian processes).*

*While constructive building of the Euclidean Green functions the notions of triviality and non-triviality of the quantum theory of the field under removed ultra-violet and volume cut-offs, are of importance. The following approach to the solving of this problem is proposed. Characteristic measure functions, absolutely continuous relatively Gaussian measure are analysed. These functions are initiative ones for the Euclidean Green functions, that is why constructive building of the characteristic functions, in fact, provides the building of the mathematical model of the Euclidean theory of the field.*

*As in the Lagrangian interaction two constants, principle and auxiluary, are available, the investigation is carried out separately for the case $\alpha^2 > 8\pi$ and $\alpha^2 < 4\pi$.*

*It has been found, that in the case $\alpha^2 > 8\pi$ under removed ultra-violet cut-off the theory of the field is trivial, that is, the Euclidean Green functions coinside with the relevant functions of the free quantum theory of the field. In the case $\alpha^2 < 4\pi$ the Euclidean theory of the field for the exponential interaction is non-trivial. In this case the infinite system of the integral equations, which is solved in the correspondingly chosen Banach space, has been obtained for the characteristic functions. The operator norm, which operates in this Banach space, was found to be less than 1. Then, basing on the Banach theorem, it can be stated, that the only solution of the equations system is available, and because of this volume and ultra-violet cut-offs can be removed. As a result, the limitation in the form of unequality on the principle coupling constant, has been obtained.*

***Key words:*** *random Gaussian field, exponential lagrangian of interaction, Euclidean Green functions.*

**Вступ.** При моделюванні процесів квантової теорії поля в метриці Мінковського важливу роль відіграють узагальнені функції Вайтмана [1]. Аналогом цих функцій в евклідовому формулюванні теорії поля є евклідові функції Гріна. Оскільки між цими функціями існує тісний зв'язок через аксіоми Остервальдера – Шрадера, то побудова квантової теорії поля в евклідовому підході дає можливість побудувати відповідну релятивістську квантову теорію поля. Значна частина досліджень у цьому напрямку приділена так званим поліноміальним моделям [2, 3], але є достатньо оригінальних робіт, присвячених неполіноміальним моделям, серед яких особливо виділяються моделі з експоненціальним лагранжіаном взаємодії [4 – 6].

Цим моделям також присвячено ряд авторських робіт [8 – 11]. Методи, запропоновані в цих роботах, можуть бути використані в сучасній конструктивній теорії поля, статистичній фізиці, а також при моделюванні екологічних та економічних процесів [12, 13].

**Метою роботи** є побудова характеристичних функцій для евклідових функцій Гріна в двовимірному просторі при усунутих ультрафіолетовому та об'ємному обрізаннях, а також питання про тривіальність або нетривіальність відповідної квантової теорії поля для експоненціальної моделі евклідової теорії поля.

**Об'єктом дослідження** є евклідові функції Гріна (функції Швінгера) для моделі з експоненціальним лагранжіаном взаємодії виду

$$L(\xi) = g : e^{\alpha\xi(x)} :,$$

для якого побудовано характеристичні функції $X_n\left(\{t,x\}_n\right)$ відповідної конструктивної евклідової теорії поля, встановлено умови тривіальності та нетривіальності двовимірної експоненціальної моделі при певних обмеженнях на константи зв'язку.

Наведемо основні поняття та факти, які використовуються в даній статті. Розглядаємо моделі евклідової теорії поля з неполіноміальним лагранжіаном взаємодії експоненціального виду.

Слід відзначити, що моделі з лагранжіаном взаємодії експоненціального типу вивчались раніше в роботах Альбеверіо, Галавотті, Хоег-Крона [4], Рончки [5], Осіпова [6]. Значний вклад у розроблення методу вивчення рівнянь Швінгера для евклідових функцій Гріна внесено роботою Гончара [7]. Більш детальний і послідовний розвиток запропонованого методу до дослідження евклідових функцій Гріна викладено в авторських роботах [8 – 11].

Розглянемо евклідову теорію поля з експоненціальним лагранжіаном взаємодії

$$L(\xi) = g : e^{\alpha\xi(x)} :, \tag{1}$$

де $\xi(x)$ – випадкове однорідне гаусівське поле з кореляційною функцією виду

$$K(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{e^{i(k,x-y)}}{k^2+m^2} dk, \tag{2}$$

а $: e^{\alpha\xi(x)} := e^{\alpha\xi(x)} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha^2 K(0)}{2}\right\}$.

Введемо для цієї моделі так звані об'ємне $V$ та ультрафіолетове $\beta$ обрізання. З цією метою розглянемо допоміжне гаусівське випадкове поле $\xi_\beta(x)$ із кореляційною функцією

$$K_\beta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^d} \frac{e^{-\beta\left(k^2+m^2\right)} e^{i(k,x-y)}}{k^2+m^2} dk \tag{3}$$

і лагранжіаном взаємодії

$$L_V^\beta(\xi) = g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx \text{, де } V \subset R^d.$$

У цьому випадку всі величини, які ми вивчаємо, мають чіткий математично осмислений зміст. У майбутньому нас буде цікавити евклідова теорія поля при усунутих ультрафіолетовому й об'ємному обрізаннях, тобто при $V \to R^2$, а $\beta \to 0$.

Основним об'єктом вивчення даної статті є характеристичні функції міри, абсолютно-неперервної відносно гаусівської міри $dP$

$$X_n^\beta\left(\{\tau,x\}_n\right) = \frac{M :e^{i\tau_1\xi_\beta(x_1)}:\ldots:e^{i\tau_n\xi_\beta(x_n)}:\exp\left\{-g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx\right\}}{M\exp\left\{-g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx\right\}}, \tag{4}$$

де $M$ – знак математичного сподівання відносно цієї гаусівської міри $dP$. Продовжимо характеристичні функції (4) аналітично на чисто уявні значення $\tau_j$, прийнявши $\tau_j = -it_j$, $j = \overline{1,n}$. Тоді отримаємо нові характеристичні функції, які матимуть вигляд

$$X_n^\beta\left(\{t,x\}_n\right) = \frac{M :e^{t_1\xi_\beta(x_1)}:\ldots:e^{t_n\xi_\beta(x_n)}:\exp\left\{-g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx\right\}}{M\exp\left\{-g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx\right\}}. \tag{5}$$

Евклідові функції Гріна (функції Швінгера) отримують послідовним диференціюванням характеристичних функцій $X_n^\beta\left(\{t,x\}_n\right)$ по змінних $t_1,t_2,\ldots,t_n$ при $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$. Важливим питанням при вивченні цих функцій є питання, чи є отримані функції функціями відповідної тривіальної або нетривіальної евклідової теорії поля. При цьому важливе значення має розмірність простору $R^d$, в якому розглядаються ці функції, і значення констант $\alpha$ і $g$. Ці моделі уже вивчались раніше в роботах [4 – 6] для простору-часу розмірності $d \ge 3$ і доведено, що відповідна теорія поля є тривіальною, тобто евклідові функції Гріна при $V = R^2$ і $\beta = 0$ співпадають з відповідними ЕФГ вільної квантової теорії поля. Тому основна увага буде приділена вивченню ЕФГ при $d = 2$ і в цьому випадку виникають певні обмеження на константи зв'язку $g$ і $\alpha$.

Для зручності викладу матеріалу введемо допоміжні характеристичні функції

$$\overline{X}_n^\beta\left(\{t,x\}_n\right) = X_n^\beta\left(\{t,x\}_n\right)\exp\left\{-\sum_{i<j}^{n} K_\beta\left(x_i - x_j\right)t_it_j\right\}. \tag{6}$$

Тепер розглянемо два випадки для різних значень допоміжної константи зв'язку $\alpha$.

**1. Тривіальність евклідової теорії поля при $\alpha^2 > 8\pi$.**

Теорема 1. При $\alpha^2 > 8\pi$ і достатньо малих значеннях $t_1,t_2,\ldots,t_n$ і усунутому ультрафіолетовому обрізанні має місце рівність

$$\lim_{\beta\to 0}\overline{X}_n^\beta\left(\{t,x\}_n\right) = 1.$$

Для доведення цього факту в [8] отримано інше представлення для функції $\overline{X}_n^\beta\left(\{t,x\}_n\right)$

$$\bar{X}_n^{\beta}\left(\{t,x\}_n\right)=\frac{Me^{-g\int\limits_V\left[e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-y)t_i}-1\right]:e^{\alpha\xi_\beta(y)}:dy}\exp\left\{-g\int\limits_V:e^{\alpha\xi_\beta(y)}:dy\right\}}{M\exp\left\{-g\int\limits_V:e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx\right\}}. \tag{7}$$

Використавши представлення (7) за аналогією з [8], отримаємо такі нерівності:

$$\exp\left\{-g\int\limits_V\left[e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-y)t_i}-1\right]\bar{X}_1^{\beta}\left(\{\alpha,y\}\right)dy\right\}\le\bar{X}_n^{\beta}\left(\{t,x\}_n\right)\le 1,$$

де $\bar{X}_1^{\beta}\left(\{\alpha,y\}\right)$ отримується із формули (7) при $n=1$.

Далі доведемо, що при $\alpha^2>8\pi$ і $\beta\to 0$ існує границя

$$\lim_{\beta\to 0}\bar{X}_n^{\beta}\left(\{t,x\}_n\right)=1.$$

Повне доведення теореми 1 проводиться аналогічно доведенню в [8].

Із теореми 1, враховуючи формулу (6), випливає

$$X_n\left(\{t,x\}_n\right)=\lim_{\beta\to 0}X_n^{\beta}\left(\{t,x\}_n\right)=\exp\left\{\sum_{i<j}^{n}K\left(x_i-x_j\right)t_it_j\right\}$$

і відповідно для евклідових функцій Гріна отримуємо представлення

$$S_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\frac{\partial^n}{\partial t_1\ldots\partial t_n}X_n\left(\{t,x\}_n\right)\Big|_{t_1=\ldots=t_n=0},$$

з яких випливає тривіальність відповідної евклідової теорії поля. Більш цікавим з точки зору побудови нетривіальної евклідової теорії поля є випадок, коли $\alpha^2<4\pi$.

**2. Рівняння для характеристичних функцій і їх розв'язування при $\alpha^2<4\pi$.**

У роботі [9] для допоміжних характеристичних функцій $\bar{X}_n^{\beta}\left(\{t,x\}_n\right)$ виведено рівняння

$$\begin{aligned}
\bar{X}_n^{\beta}\left(\{t,x\}_n\right)&=g^2\alpha^2\exp\left\{-g\int\limits_V\left[e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-z)t_i}-1\right]dz\right\}\times\\
&\times\int\limits_0^{t_n}\exp\left\{g\int\limits_V\left[e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-z)t_i}-1\right]dz\right\}\int\limits_V K_\beta\left(x_n-y\right)\left[\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_V K_\beta\left(y-y_1\right)\times\right.\\
&\times\exp\left\{\alpha\sum_{i=1}^{n}K_\beta\left(x_i-y\right)t_i+\alpha\sum_{i=1}^{n}K_\beta\left(x_i-y_1\right)t_i+\alpha\tau K_\beta\left(y-y_1\right)\right\}\times\\
&\left.\times\bar{X}_{n+2}^{\beta}\left(\{t;x\}_n,\{\tau;y\},\{\alpha,y_1\}\right)dy_1d\tau\right]dydt_n+\\
&+\bar{X}_{n-1}^{\beta}\left(\{t,x\}_{n-1}\right)\exp\left\{-g\int\limits_V e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n-1}K_\beta(x_i-z)t_i}\left[e^{\alpha K_\beta(x_n-z)t_n}-1\right]dz\right\}+\\
&+\delta_{n,1}\exp\left\{-g\int\limits_V\left[e^{\alpha K_\beta(x_1-z)t_1}-1\right]dz\right\}.
\end{aligned}\tag{8}$$

Розв'яжемо систему рівнянь (8) у банаховому просторі $B_\eta^{T_1}$, який визначимо так: вектор виду $b=\left\{b_1\left(\{t_1,x_1\}\right),\ldots,b_n\left(\{t_1,x_1\},\ldots,\{t_n,x_n\}\right),\ldots\right\}$ належить простору $B_\eta^{T_1}$, якщо

$b_k\left(\{t,x\}_k\right), k=\overline{1,\infty}$ – неперервні комплекснозначні функції в області $T_1^k=\left[L\times V\right]^k$, де $L$ – компакт із $R_1, V\subset R^2$ і скінчена норма

$$\|b\|_{B_\eta^{T_1}}=\sup_{n\ge1}\eta^n\sup_{\left(\{t,x\}_n\right)\in T_1^n}\left|b_n\left(\{t,x\}_n\right)\right|,\ 0<\eta<1.$$

Виконаємо попередньо таке перетворення системи рівнянь (8), ввівши ще одне позначення

$$\tilde{X}_n^\beta\left(\{t,x\}_n\right)=\bar{X}_n^\beta\left(\{t,x\}_n\right)\exp\left\{\varepsilon\int_V\left[e^{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-z)t_i}-1\right]dz\right\}. \tag{9}$$

У результаті отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_n^\beta\left(\{t,x\}_n\right)&=\exp\left\{-(g-\varepsilon)\int_V\left[e^{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-z)t_i}-1\right]dz\right\}\times\\
&\times g^2\alpha^2\int_0^{t_n}\int_V K_\beta(x_n-y)\exp\left\{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-y)t_i\right\}\times\left[\int_0^\alpha\int_V K_\beta(y-y_1)\times\right.\\
&\times\tilde{X}_{n+2}^\beta\left(\{t;x\}_n,\{\tau;y\},\{\alpha,y_1\}\right)\exp\left\{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-y)t_i+\alpha\tau K_\beta(y-y_1)\right\}\times\\
&\times\exp\left\{-\varepsilon\int_V\left[e^{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-z)t_1+\alpha\tau K_\beta(y-z)+\alpha^2K_\beta(y_1-z)}-1\right]dz\right\}\\
&\left.\times\exp\left\{g\int_V\left[e^{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-z)t_i}-1\right]dz\right\}dy_1d\tau\right]dydt_n+\\
&+\tilde{X}_{n-1}^\beta\left(\{t,x\}_{n-1}\right)\exp\left\{-(g-\varepsilon)\int_V e^{\alpha\sum_{i=1}^{n-1}K_\beta(x_i-z)t_i}\left[e^{\alpha K_\beta(x_n-z)t_n}-1\right]dz\right\}+\\
&+\delta_{n,1}\exp\left\{-(g-\varepsilon)\int_V\left[e^{\alpha K_\beta(x_1-z)t_1}-1\right]dz\right\}.
\end{aligned}\tag{10}$$

За аналогією з [9, 10] введемо оператори $R$ і $P$ та запишемо систему рівнянь (10) у вигляді операторного рівняння для вектора $\tilde{X}=\left\{\tilde{X}_n\left(\{t,x\}_n\right)\right\}_{n=1}^\infty$

$$\tilde{X}=\left(g^2R+P\right)\tilde{X}+F, \tag{11}$$

де $F$ – заданий початковий вектор, який має вигляд $F=\left\{\exp\left\{-(g-\varepsilon)\int_V\left[e^{\alpha K_\beta(x_1-z)t_1}-1\right]dz\right\},0,0,...\right\}$.

У просторі $B_\eta^{T_1}$ для норми оператора $g^2R+P$ в [9, 10] отримано оцінку при $\varepsilon=\dfrac{g}{2}$, $V=R^2$, $\beta=0$

$$\left\|g^2R+P\right\|_{B_\eta^{T_1}}\le\frac{4}{\eta^2}\exp\left\{-\frac{g}{2}\int_{R^2}\left[e^{\alpha^2K(z)}-1\right]dz\right\}+\eta. \tag{12}$$

Теорема 2. Рівняння (11) однозначно розв'язуване відносно вектора $\tilde{X}$ у просторі $B_\eta^{T_1}$ в нескінченому об'ємі і знятому УФ-обрізанню при $\alpha^2 < 4\pi$, якщо значення головної константи зв'язку $g$ задовольняє нерівність

$$\frac{g}{m^2} > \frac{2}{N} \ln \frac{4}{\eta^2 (1-\eta)}, \tag{13}$$

де $N = \int\limits_{R^2} \left[ e^{\alpha^2 K_1(y)} - 1 \right] dy$, $K_1(y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{R^2} \frac{e^{i(k,y)}}{k^2+1} dk$.

Доведення теореми 2 полягає в тому, що на норму оператора (12) накладаємо умову, що повинна виконуватись нерівність

$$\left\| g^2 R + P \right\|_{B_\eta^{T_1}} < 1.$$

Тоді на основі теореми Банаха існує єдиний розв'язок рівняння (11), а для значення головної константи $g$ отримаємо нерівність (13).

Щоб отримати евклідові функції Гріна потрібно знайти характеристичні функції згідно з формулами (6) і (9) та скористатися формулою зв'язку між $S_n(x_1, ..., x_n)$ і $X_n(\{t, x\}_n)$. На основі теореми реконструкції Остервальдера-Шрадера евклідовим функціям Гріна однозначно відповідають функції Вайтмана для експоненціальної моделі квантової теорії поля.

**Висновки.** В рамках аксіоматичної евклідової квантової теорії поля конструктивно побудовано характеристичні функції для моделі з експоненціальною взаємодією в двовимірному просторі без ультрафіолетового і об'ємного обрізань. Знайдено обмеження на головну і допоміжну константи зв'язку, при яких відповідна квантова теорія поля є тривіальною або нетривіальною. Метод, розвинений у даній роботі, являє собою науковий та методичний апарат для використання в інших галузях науки [12, 13].

**Conclusions.** Within the axiomatic Euclidean quantum theory of the field characteristic functions for the model with the exponential interaction in the two-dimension space without ultra-violet and spacious cut-offs have been built constructively. The limitation on the principle and auxiluary connection constants, under which the corresponding quantum theory of the field is either trivial or non-trivial, has been found. The method, developed in this paper, is of great scientific and methodical value for application in other branches of science.

## Список використаної літератури


1. Остервальдер, К. Эвклидовы функции Грина и обобщённые функции Вайтмана [Текст] / К. Остервальдер // Конструктивная теория поля. – «Мир» Москва. – 1977. – С. 48 – 73.
2. Глимм, Д. Бозонные квантовополевые модели [Текст] / Д. Глимм, А. Джаффе // Конструктивная теория поля. – «Мир» Москва. – 1977. – С. 99 – 168.
3. Саймон, Б. Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля [Текст] / Б. Саймон // Конструктивная теория поля. – «Мир» Москва. – 1976. – 357 с.
4. Albeverio, S. Some results for the exponential interaction in two and more dimensions. / S. Albeverio, G. Galavotti, K. Hegh-Krohn // Comm. Math. Phys. – 1979. – Vol. 70, № 2. – P. 187 – 192.
5. Raczka, R. On the existance of quantum field models in fourdimensional time / R. Raczka // Phys. Rew. Lett. – 1978. – V. 41, № 8. – P. 1210 – 1212.
6. Osipov, E. On trivialyty of the $:\exp\lambda\varphi:_4$ – quantum field theory in a finite volume / E. Osipov // Novosibirsk IM. –1979. –Preprint Tph – 102. –12 p.
7. Гончар, М.С. Про розв’язність узагальнених рівнянь Швінгера для функцій Гріна евклідової теорії поля [Текст] / М.С. Гончар // ДАН УРСР, серія А. – 1972. – Т. 8. – С. 675 – 678.
8. Гончар, Н.С. Эвклидова теория поля для экспоненциальной двумерной модели без ультрафиолетового обрезания [Текст] / Н.С. Гончар, Р.С. Мацкив // ДАН УССР, серія А. – 1985. – № 1. – С. 11 – 14.
9. Гончар, Н.С. Экспоненциальная двумерная модель эвклидовой теории поля [Текст] / Н.С. Гончар, Р.С. Мацкив // УМЖ – 1990. – Т. 42. – С. 469 – 477.
10. Мацьків, Р.С. Побудова функцій Швінгера для експоненціальної моделі евклідової теорії поля [Текст] / Р.С. Мацьків // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Чернівці «Прут». – 2003. – Вип. 10. – С. 222 – 226.
11. Мацьків, Р.С. Побудова евклідівських функцій Гріна для експоненціальної моделі в аксіоматиці Остервальдера-Шрадера [Текст] / Р.С. Мацьків // Тринадцята Міжнародна конференція ім. акад. М. Кравчука. – Київ, 2010. – С. 80.
12. Gonchar, N.S. Mathematical Foundations of information Economics / N.S. Gonchar // Kiev: 2008. – ITP NAS Ukraine. – 468 p.
13. Гончар, Н.С. Критические состояния в динамической модели обмена и явление рецессии [Текст] / Н.С. Гончар, А.С. Жохин // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». – 2013, № 1. –С. 126 – 134.


*Отримано 01.07.2013*