

УДК 539.3

М. Саврук, докт. фіз.-мат. наук; В. Кравець, канд. фіз.-мат. наук

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

РОЗРАХУНКИ ДИНАМІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНИХ ДВОВИМІРНИХ ТІЛАХ З КРИВОЛІНІЙНИМИ ТРІЩИНАМИ

Резюме. Розв'язано плоскі динамічні задачі теорії пружності для тіл з гладкими криволінійними тріщинами, на берегах яких діють нормальні та дотичні динамічні навантаження. Застосовано модифікований метод скінченних різниць за часом у поєднанні з методом сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь за просторовими змінними. Використовуючи фундаментальний розв'язок рівнянь Гельмгольца для плоских задач динамічної теорії пружності, побудовано інтегральні зображення хвильових потенціалів. На їх основі крайову задачу для гладких криволінійних тріщин зведено до послідовного (у кожен вузловий момент часу) розв'язування сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Числові розв'язки інтегральних рівнянь отримано методом механічних квадратур. Обчислено динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень для криволінійних тріщин по дугах кола, параболи та півеліпса за нормальних та дотичних ударних навантажень на їх берегах. Проаналізовано вплив форми та кривини контурів тріщини на зміну поведінки коефіцієнтів інтенсивності напружень у часі.

Ключові слова: плоска динамічна задача, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, скінченні різниці, криволінійна тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень.

M. Savruk, V. Kravets

CALCULATION OF DYNAMIC STRESS INTENSITY FACTORS IN ELASTIC TWO-DIMENSIONAL BODIES WITH CURVILINEAR CRACKS

Summary. A solution method for the dynamic problems of elasticity theory for infinity bodies with smooth curvilinear cracks is developed. The plane dynamic problems of elasticity theory for bodies with smooth curvilinear cracks are solved for the case of normal and tangential dynamic loads at the crack faces. A modified finite difference method with respect to the time variable only in combination with the method of singular integral-differential equations for the space variables is applied. For zero initial conditions the equations of motion are reduced to homogeneous systems of differential equations for determination of displacements at fixed time nodes. For the two-dimensional dynamic problems of the crack theory the efficient solution of these differential equations is obtained by the boundary integral equation method. Using the fundamental solution of the Helmholtz equation for plane problems of elasticity theory the integral representation of the wave potential is built. On this basis the boundary problem for the smooth curvilinear cracks is reduced to the step by step (with respect to the nodal points of time) solution of the singular integral-differential equations.

Numerical solutions of this integral equations are obtained by the method of mechanical quadratures. The direct approach to the method of mechanical quadratures for numerical solution of integral-differential equations, in which kernels along with regular components contain singularity of Cauchy and logarithmic singularity was used. This approach allows to use the standard quadrature formulas to calculate the integrals at the unclosed contours without extracting singularities in the integrand kernels.

The dynamic stress intensity factors are computed for curved cracks of different configurations (circular, parabolic and semielliptic arcs) for normal and shear impact loads on their faces. The influence of the shape and curvature contours of the crack on the behavior of stress intensity factors in time is analyzed. It was found that the main influence on the behavior of dynamic stress intensity factors is not the relative deflection of the crack contour and its form – especially in the vicinity of the crack tips. In particular cases of the uniformly distributed normal or shear impact loadings at the rectilinear crack faces our results are consistent with the data obtained by the other methods.

Key words: plane dynamic problem, singular integral-differential equations, finite differences, curvilinear crack, stress intensity factor

Постановка проблеми. У процесі експлуатації різного виду несучих елементів конструкцій за умов інтенсивних швидкозмінних динамічних навантажень у матеріалах цих елементів з'являються та поширюються тріщиноподібні дефекти різних форм. Для розроблення методів підвищення надійності конструкцій, прогнозування залишкового ресурсу їх окремих елементів треба вміти визначати граничну рівновагу таких тіл зі стаціонарними тріщинами, характер поширення нестационарних тріщин та швидкості їх підростання. Для проведення цих розрахунків необхідно мати залежності динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) від часу для стаціонарних тріщин, які знаходяться під дією різного виду заданих динамічних (ударних, імпульсних, гармонічних) навантажень. Ідеалізована модель поширення магістральної тріщини, яка ґрунтується на понятті КІН у її вершинах та критеріях нестійкого поширення макротріщини, не охоплює багатьох проблем динамічного руйнування [1], однак вона є практично єдиною, що дозволяє реально дослідити руйнування елементів конструкцій на макрорівні.

Детальне висвітлення основних аналітико-числових методів динамічної теорії пружності та механіки руйнування, які останнім часом набули широкого розвитку, можна знайти у монографіях [1 – 6]. Динамічні задачі теорії пружності, як правило, розв'язують за допомогою інтегральних перетворень Лапласа або Фур'є за часом. У просторі цих перетворень крайові задачі зводились до розв'язування відповідних граничних інтегральних рівнянь [7 – 10]. Використання обернених перетворень Лапласа чи Фур'є до отриманих таким чином розв'язків інтегральних рівнянь пов'язане з певними математичними труднощами, що призводить до зростання похибок розрахованих кінцевих результатів. Для динамічних задач теорії пружності застосовували також метод скінченних різниць, в основному як і за часом, так і за просторовими змінними [2, 11, 12]. Розроблено новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування, який не використовує інтегральні перетворення Лапласа або Фур'є, а ґрунтується на модифікованому методі скінченних різниць тільки за часом [13]. Ефективність запропонованого методу підтверджена у процесі отримання розв'язків антиплоских [14 – 16], плоских [17 – 19] та осесиметричних [20, 21] динамічних задач теорії пружності для областей з круговими отворами, прямолінійними тріщинами та включеннями за різного виду змінного у часі навантаження (ударного та імпульсного).

У даній праці на основі поєднання модифікованого методу скінченних різниць за часом [13] та сингулярних інтегро-диференційних рівнянь за просторовими змінними [17 – 19, 22 – 24] розв'язано плоску динамічну задачу механіки руйнування для нескінченного пружного тіла з гладкою криволінійною тріщиною, на берегах якої задані довільно залежні від часу самозрівноважені напруження. Визначено загальний напружено-деформований стан такого тіла та проведено числові розрахунки динамічних КІН за ударних навантажень на берегах гладких криволінійних тріщин по дузі кола, параболи та півеліпса.

Модифікований метод скінченних різниць за часом [13]. Розглянемо основні крайові динамічні задачі для ізотропного пружного тіла S з межевою поверхнею L . Рівняння руху в переміщеннях за відсутності масових сил мають вигляд

$$c_{imkl}u_{k,ml} = \rho \partial^2 u_i / \partial t^2, \quad (1)$$

де u_i – компоненти вектора переміщень у декартовій системі координат ($Ox_1x_2x_3$); ρ – густина пружного тіла. Сталі матеріалу c_{imkl} для ізотропного тіла виражаються через коефіцієнти Ламе λ, μ : $c_{imkl} = \lambda \delta_{im} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{mk})$, де δ_{kl} – символ Кронекера. Тут за індексами, що повторюються, ведемо підсумовування; кома перед

індексом означає похідну по координаті з даним індексом. Індекси $i, m, k, l \in \{1; 2\}$ – для двовимірних областей та $i, m, k, l \in \{1; 2; 3\}$ – у загальному просторовому випадку.

На межі L пружної області S задані напруження та переміщення

$$\sigma_{im} n_m = T_{ik} u_k = p_i(x, t), \quad x \equiv (x_1, x_1, x_3) \in L_\sigma, \quad u_i = v_i(x, t), \quad x \in L_u; \quad L_\sigma \cup L_u = L. \quad (2)$$

Тут n_m – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні L ; $p_i(x, t), v_i(x, t)$ – відомі функції точок межі та часу; $T_{ik} = c_{ijkl} n_j \partial / \partial x_l$ – диференційний оператор; поверхня L є сукупністю зовнішньої межі тіла, країв вирізів та контурів розрізів-тріщин.

Вважатимемо, що в початковий момент часу $t = 0$ тіло знаходиться в стані спокою, тобто початкові умови мають вигляд

$$u_i = 0, \quad \partial u_i / \partial t = 0 \quad \text{для} \quad t = 0, \quad x \equiv (x_1, x_1, x_3) \in S. \quad (3)$$

Для розв'язування динамічної задачі теорії пружності (1 – 3) застосуємо метод скінченних різниць тільки за часом. Подамо дискретні моменти часу t_j у вигляді

$$t_j = \sum_{v=1}^j \Delta t_v, \quad \Delta t_v = t_v - t_{v-1}, \quad t_0 = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

і вважатимемо, що скінченні різниці за часом відрізняються між собою: $\Delta t_v \neq \Delta t_k$ ($v, k = \overline{1, j}; v \neq k$) Використавши вирази для лівих різницевих похідних за часом, прийдемо до системи неоднорідних диференційних рівнянь для знаходження компонент переміщень у j -ий момент часу $u_k^j = u_k(t_j)$

$$c_{imkl} u_{k,ml}^j - \rho \frac{u_i^j}{\Delta t_j^2} = -\rho(1 - \delta_{1j}) \left(\frac{u_i^{j-1}}{\Delta t_j^2} + \frac{u_i^{j-1} - (1 - \delta_{j2}) u_i^{j-2}}{\Delta t_j \Delta t_{j-1}} \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Подамо загальний розв'язок рівнянь (5) у вигляді суми

$$u_i^j = \sum_{v=1}^j \omega_{jv} \hat{u}_i^v, \quad (6)$$

де \hat{u}_i^v – доповняльні розв'язки рівнянь (5); ω_{jv} – невідомі коефіцієнти. Підставивши вираз функції u_i^j (6) у рівняння (5), отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих функцій \hat{u}_i^v

$$\sum_{v=1}^j \omega_{jv} \left[c_{imkl} \hat{u}_{k,ml}^v - \rho \frac{\hat{u}_i^v}{\Delta t_j^2} \right] = -\rho(1 - \delta_{1j}) \left[\frac{1}{\Delta t_j^2} \sum_{v=1}^{j-1} \omega_{j-1,v} \hat{u}_i^v + \frac{1}{\Delta t_j \Delta t_{j-1}} \left(\sum_{v=1}^{j-1} \omega_{j-1,v} \hat{u}_i^v - (1 - \delta_{j2}) \sum_{v=1}^{j-2} \omega_{j-2,v} \hat{u}_i^v \right) \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Вважаючи, що функції \hat{u}_i^v задовольняють однорідну систему диференційних рівнянь

$$c_{imkl} \hat{u}_{k,ml}^j - \rho \hat{u}_i^j / \Delta t_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

отримаємо рекурентні співвідношення для визначення коефіцієнтів ω_{jv} [13]

$$\omega_{jj} = 1, \quad \omega_{j+1,j} = \frac{\Delta t_j}{\Delta t_j - \Delta t_{j+1}}; \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\omega_{j,j-m} = \frac{\Delta t_{j-m}^2}{\Delta t_{j-m}^2 - \Delta t_j^2} \left[\left(1 + \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}} \right) \omega_{j-1,j-m} - \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}} \omega_{j-2,j-m} \right]; \quad (j = 3, 4, \dots; m = 2, 3, \dots, j-1). \quad (8)$$

Враховуючи подання (6), для диференційних рівнянь (7) отримаємо крайові умови

$$T_{ik}\hat{u}_k^j = \hat{p}_i^j = p_i^j - \sum_{m=1}^{j-1} \omega_{jm} T_{ik} \hat{u}_k^m = p_i^j - \sum_{m=1}^{j-1} \omega_{jm} \hat{p}_i^m, \quad \hat{p}_i^1 = p_i^1, \quad x \in L_\sigma; \quad (9)$$

$$\hat{u}_i^j = v_i^j - \sum_{m=1}^{j-1} \omega_{jm} \hat{u}_i^m, \quad \hat{u}_i^1 = v_i^1, \quad x \in L_u.$$

Тут $p_i^j = p_i(x, t_j)$, $v_i^j = v_i(x, t_j)$ – відомі значення компонент крайових напружень і переміщень (2) у момент часу $t = t_j$; \hat{p}_i^j – значення напружень, що відповідають переміщенням \hat{u}_i^j .

Таким чином, динамічну задачу теорії пружності (1) – (3) зведено до послідовного розв’язування незалежних крайових задач для визначення переміщень \hat{u}_i^j . За нульових початкових умов (3) необхідно розв’язати крайові задачі (7), (9). У даній роботі цей підхід використано для отримання розв’язків плоскої динамічної задачі теорії пружності для нескінченної площини з гладкою криволінійною тріщиною.

Основні співвідношення динамічної теорії пружності двовимірних ізотропних областей. Для плоскої задачі лінійної теорії пружності компоненти переміщень точки тіла S (в декартовій системі координат $Oxyz$) виражаються через хвильові потенціали $\Phi_1(x, y, t), \Phi_2(x, y, t)$ – дійсні функції двох просторових координат (x, y) і часу t [2 – 4]

$$u(x, y, t) = \partial\Phi_1/\partial x + \partial\Phi_2/\partial y; \quad v(x, y, t) = \partial\Phi_1/\partial y - \partial\Phi_2/\partial x. \quad (10)$$

За узагальненим законом Гука для ізотропного пружного тіла в умовах плоскої деформації ненульові компоненти напружень мають вигляд

$$\sigma_x(x, y, t) = \lambda \nabla^2 \Phi_1 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} \right); \quad \sigma_y(x, y, t) = \lambda \nabla^2 \Phi_1 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} \right); \quad (11)$$

$$\tau_{xy}(x, y, t) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_z(x, y, t) = \lambda \nabla^2 \Phi_1(x, y, t),$$

де $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – двовимірний оператор Лапласа.

Використовуючи рівняння руху тіла у переміщеннях (1) та подання (10), динамічна задача зводиться до розв’язування двох хвильових рівнянь [2]

$$\nabla^2 \Phi_m(x, y, t) - \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 \Phi_m(x, y, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (m = 1, 2), \quad (12)$$

де $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – швидкості поширення поздовжніх та поперечних пружних хвиль у пружному ізотропному тілі з густиною ρ .

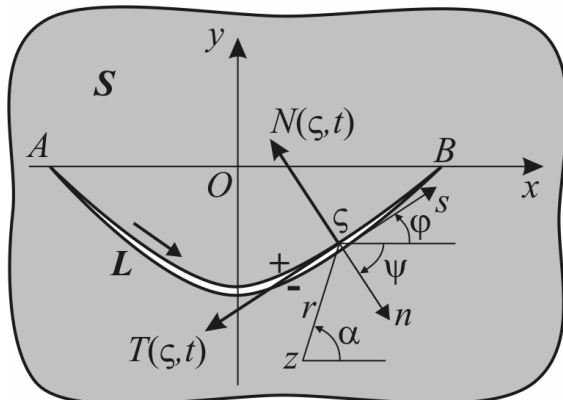


Рисунок 1. Криволінійна тріщина під динамічним навантаженням

Figure 1. Curvilinear crack under dynamic loading

Формулювання задачі. Дослідимо напружено-деформований стан (за умов плоскої деформації) двовимірного пружного тіла (область S) з тунельною вздовж осі Oz гладкою криволінійною тріщиною L , береги якої знаходяться під дією довільно розподілених самозрівноважених динамічних напружень (рис.1)

$$\{N(\zeta, t) + iT(\zeta, t)\}^\pm = f(\zeta, t); \quad \zeta \in L, \quad (13)$$

які за співвідношенням [22, 25]

$$2\{N(\zeta, t) + iT(\zeta, t)\} = \sigma_x(\zeta, t) + \sigma_y(\zeta, t) - \exp(-2i\psi)\{\sigma_y(\zeta, t) - \sigma_x(\zeta, t) - 2i\tau_{xy}(\zeta, t)\} \quad (14)$$

визначаються через напруження (11) і відповідно – через граничні значення ($z = x + iy \rightarrow \zeta = \xi + i\eta \in L$) хвильових потенціалів $\Phi_1(\zeta, t), \Phi_2(\zeta, t)$, які задовольняють диференційні рівняння (12). Тут $N(\zeta, t), T(\zeta, t)$ – нормальні та дотичні напруження в точці $\zeta \in L$ у момент часу t ; верхні індекси «+» «-» вказують на граничні значення відповідних величин на лівому та правому берегах тріщини; ψ – кут зовнішньої нормалі до лівого берега тріщини у точці $\zeta \in L$ (рис. 1); $f(\zeta, t)$ – задана комплексна функція точки контуру та часу.

Нульові початкові умови (3) для переміщень (10) та напружень (11), а також для їхніх похідних за часом стосовно хвильових потенціалів матимуть вигляд

$$\Phi_m(z, t)|_{t=0} = 0; \partial\Phi_m(z, t)/\partial t|_{t=0} = 0; \quad (m=1,2). \quad (15)$$

Для розв'язування плоскої динамічної задачі теорії пружності (12), (13), (15) застосовано модифікований метод скінченних різниць за часом [13]. Використовуючи подання для дискретних часових вузлів $t = t_j$ (4), загальні розв'язки хвильових рівнянь (12) шукаємо у вигляді сум (6)

$$\Phi_m^j = \Phi_m(z, t_j) = \sum_{\nu=1}^j \omega_{j\nu} \hat{\Phi}_m^\nu(z); \quad (m=1,2) \quad j=1,2,3,\dots, \quad (16)$$

де $\omega_{j\nu}$ відомі коефіцієнти, знайдені за рекурентними формулами (8), $\hat{\Phi}_m^\nu(z) \equiv \hat{\Phi}_m(z, t_\nu)$ ($z = x + iy \in S$) – дві множини нових невідомих функцій. Хвильові рівняння (12) за нульових початкових умов (15) зведуться до двох систем однорідних диференційних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}_m^j(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_m^j(z)}{\partial y^2} - \chi_{mj}^2 \hat{\Phi}_m^j(z) = 0; \quad (m=1,2) \quad j=1,2,3,\dots, \quad \chi_{mj} = 1/(c_m \Delta t_j) \quad (17)$$

відносно функцій $\hat{\Phi}_m^j(z) \equiv \hat{\Phi}_m(z, t_j)$.

За рахунок лінійного характеру подань загальних розв'язків (16) крайові умови (13), записані згідно з виразами (11), (14) через нові невідомі функції $\hat{\Phi}_m^j(\zeta), \zeta \in L$, набудуть вигляду

$$\hat{N}^j(\zeta) + i\hat{T}^j(\zeta) = \hat{f}^j(\zeta) \equiv f^j(\zeta) - \sum_{\nu=1}^{j-1} \omega_{j\nu} \hat{f}^\nu(\zeta); \quad j=2,3,\dots; \quad \zeta \in L, \quad (18)$$

де $f^j(\zeta) = f(\zeta, t_j)$; $\hat{f}^1(\zeta) = f^1(\zeta)$; $\hat{f}^j(\zeta)$ – значення в момент часу $t = t_j$ крайових напружень (13), які відповідають переміщенням $\hat{u}^j(\zeta), \hat{v}^j(\zeta)$ та значенням хвильових потенціалів $\hat{\Phi}_1^j(\zeta), \hat{\Phi}_2^j(\zeta)$ на контурі тріщини.

Напружено-деформований стан тіла. Інтегральні зображення хвильових потенціалів диференційних рівнянь (17) запишемо у загальному вигляді [18, 24]

$$\hat{\Phi}_m(z) = \int_L \left\{ p_m(\zeta) K_0(\chi_m r) ds + q_m(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\chi_m r) d\zeta + r_m(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\chi_m r) d\bar{\zeta} \right\}; \quad m=1,2, \quad (19)$$

через невідомі функції $p_m(\zeta) \equiv \hat{p}_m(\zeta, t_j), q_m(\zeta) \equiv \hat{q}_m(\zeta, t_j), r_m(\zeta) \equiv \hat{r}_m(\zeta, t_j)$. Тут для спрощення запису опущено часові індекси j в усіх відповідних виразах і величинах (зокрема, вважатимемо $\hat{\Phi}_m(z) \equiv \hat{\Phi}_m^j(z), \chi_m \equiv \chi_{mj}$); s – дугова абсциса точки $\zeta = \xi + i\eta \in L, \bar{\zeta} = \xi - i\eta$; $K_0(\chi_m r) = \pi H_0^{(1)}(i\chi_m r)/2$ – фундаментальний розв'язок рівнянь Гельмгольца (12) [23, 24], де $r = |\zeta - z|$; $K_0(r), H_0^{(1)}(ir)$ – функції Макдональда та Ганкеля відповідно [26]. Для вибраної системи знаків параметрів криволінійного контуру тріщини (рис. 1) маємо $d\zeta/ds = ds/d\bar{\zeta} = \exp(i\varphi) = i \exp(i\psi)$; $d\bar{\zeta}/d\zeta = \exp(-2i\varphi) = -\exp(-2i\psi)$, де $\varphi = \varphi(\zeta), \psi = \psi(\zeta) = \varphi(\zeta) - \pi/2$ – кути дотичної та нормалі до контуру тріщини у точці

$\zeta \in L$ відносно осі Ox ; $\zeta - z = r \exp(i\alpha)$.

На основі інтегральних зображень (19) визначено поле переміщень $\hat{u}(z) + i\hat{v}(z)$ для довільної точки тіла $z \in S$ з гладкою криволінійною тріщиною. Використовуючи вирази для відповідних похідних функцій Макдональда [26], отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{u}(z) + i\hat{v}(z) = & \int_L \exp(i\alpha) \{p_1(\zeta) \chi_1 K_1(\chi_1 r) - ip_2(\zeta) \chi_2 K_1(\chi_2 r)\} ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_L \left\{ \langle q_1(\zeta) \chi_1^2 K_0(\chi_1 r) - iq_2(\zeta) \chi_2^2 K_0(\chi_2 r) \rangle d\zeta + \exp(2i\alpha) \langle r_1(\zeta) \chi_1^2 K_2(\chi_1 r) - ir_2(\zeta) \chi_2^2 K_2(\chi_2 r) \rangle d\bar{\zeta} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Враховуючи асимптотичну поведінку функцій Макдональда для малих аргументів [18, 26], виділимо у виразі (20) сингулярні інтеграли типу Коші. Застосувавши формули Сохотського-Племеля [22, 25] для граничних значень цих інтегралів на розімкненому контурі L , отримаємо зв'язок між функціями $p_1(\zeta), p_2(\zeta)$ (19) зі стрибком переміщень на контурі тріщини

$$[\hat{u}(\zeta) + i\hat{v}(\zeta)]_L \equiv \{\hat{u}(\zeta) + i\hat{v}(\zeta)\}^+ - \{\hat{u}(\zeta) + i\hat{v}(\zeta)\}^- = 2\pi \exp(i\psi) \{p_1(\zeta) - ip_2(\zeta)\}; \zeta \in L. \quad (21)$$

Використавши вирази для хвильових потенціалів (19), визначено напруження у довільній точці тіла $z \in S$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x(z) + \hat{\sigma}_y(z) = & (\lambda + \mu) \left\{ 2\chi_1^2 \int_L p_1(\zeta) K_0(\chi_1 r) ds - \chi_1^3 \int_L K_1(\chi_1 r) \langle q_1(\zeta) \exp(-i\alpha) d\zeta + r_1(\zeta) \exp(i\alpha) d\bar{\zeta} \rangle \right\} \\ \hat{\sigma}_y(z) - \hat{\sigma}_x(z) + 2i\hat{\tau}_{xy}(z) = & \mu \int_L \exp(-2i\alpha) \left\{ -p_1(\zeta) 2\chi_1^2 K_2(\chi_1 r) - ip_2(\zeta) 2\chi_2^2 K_2(\chi_2 r) \right\} ds + \\ & + \mu \int_L \left\{ \exp(-3i\alpha) \langle q_1(\zeta) \chi_1^3 K_3(\chi_1 r) + iq_2(\zeta) \chi_2^3 K_3(\chi_2 r) \rangle d\zeta + \right. \\ & \left. + \exp(-i\alpha) \langle r_1(\zeta) \chi_1^3 K_1(\chi_1 r) + ir_2(\zeta) \chi_2^3 K_1(\chi_2 r) \rangle d\bar{\zeta} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Граничні значення напружень на контурі тріщини ($z \rightarrow \zeta_0 \in L$) мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu} \{ \hat{N}(\zeta_0) + i\hat{T}(\zeta_0) \} = & \left\{ \hat{\sigma}_x(\zeta_0) + \hat{\sigma}_y(\zeta_0) - e^{-2i\psi_0} (\hat{\sigma}_y(\zeta_0) - \hat{\sigma}_x(\zeta_0) - 2i\hat{\tau}_{xy}(\zeta_0)) \right\} / \mu = \\ = & 2\sigma \chi_1^2 \int_L p_1(\zeta) K_0(\chi_1 r_0) ds + 2 \int_L \left\{ \overline{p_1(\zeta)} \chi_1^2 K_2(\chi_1 r_0) - i \overline{p_2(\zeta)} \chi_2^2 K_2(\chi_2 r_0) \right\} e^{-2i(\psi_0 - \alpha_0)} ds - \\ & - \int_L \left\{ q_1(\zeta) \sigma \chi_1^3 K_1(\chi_1 r_0) + e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \overline{r_1(\zeta)} \chi_1^3 K_1(\chi_1 r_0) - i \overline{r_2(\zeta)} \chi_2^3 K_1(\chi_2 r_0) \right\} e^{-i\alpha_0} d\zeta - \\ & - \int_L \left\{ r_1(\zeta) \sigma \chi_1^3 K_1(\chi_1 r_0) + e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \overline{q_1(\zeta)} \chi_1^3 K_3(\chi_1 r_0) - i \overline{q_2(\zeta)} \chi_2^3 K_3(\chi_2 r_0) \right\} e^{i\alpha_0} d\bar{\zeta}, \end{aligned} \quad (23)$$

де $\zeta - \zeta_0 = r_0 \exp(i\alpha_0)$; $\exp(i\psi_0) = -id\zeta_0 / ds_0$; $\sigma = (\lambda + \mu) / \mu = 1 / (1 - 2\nu) = const$, ν – коефіцієнт Пуассона.

Хвильові потенціали (19) і відповідно переміщення (20) та напруження (22) перевизначені невідомими функціями-густинами $p_m(\zeta), q_m(\zeta), r_m(\zeta), m = 1, 2$. Для зменшення їх кількості у поданні (19) використаємо умови неперервності напружень при переході через контур тріщини та відсутності гіперсингулярних інтегралів у цих виразах [18, 24]. У результаті отримаємо залежності

$$q_1(\zeta) = -iq_2(\zeta), \quad r_1(\zeta) = ir_2(\zeta) = \overline{q_1(\zeta)}, \quad \zeta \in L, \quad (24)$$

а вираз

$$\pi \chi_2^2 q_1(\zeta) = id[\hat{u}(\zeta) + i\hat{v}(\zeta)] / d\zeta \quad (25)$$

визначає фізичний зміст шуканої густини $q_1(\zeta)$. Таким чином, враховуючи залежності (24) інтегральні зображення хвильових потенціалів (19) (а, отже, й усі величини компонент переміщень та напружень у тілі з тріщиною) можна подати через функції

$p_1(\zeta), p_2(\zeta)$ (21) і $q_1(\zeta)$ (25), або через одну комплексну функцію стрибка переміщень на контури тріщини та її похідну

$$\widehat{g}(\zeta) \equiv \widehat{g}(\zeta, t_j) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} [\widehat{u}(\zeta) + i\widehat{v}(\zeta)]_L, \quad \widehat{g}'(\zeta) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} \frac{d}{d\zeta} [\widehat{u}(\zeta) + i\widehat{v}(\zeta)]_L, \quad (26)$$

де для плоскої деформації тіла $\kappa = 3 - 4\nu = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$.

Інтегро-диференційні рівняння. Враховуючи співвідношення для шуканих функцій (25), (26) та залежності між функціями (24), за допомогою виразу для напружень (23) задовольнимо крайові умови задачі (18) й отримаємо послідовний набір (у кожен момент часу $t = t_j$ (4)) систем комплексних сингулярних інтегро-диференційних рівнянь відносно функції стрибків переміщень (26)

$$\int_L \{L_{11}(\zeta, \zeta_0) \widehat{g}(\zeta) d\zeta + L_{12}(\zeta, \zeta_0) \overline{\widehat{g}(\zeta)} d\bar{\zeta}\} + \int_L \{L_{21}(\zeta, \zeta_0) \widehat{g}'(\zeta) d\zeta + L_{22}(\zeta, \zeta_0) \overline{\widehat{g}'(\zeta)} d\bar{\zeta}\} = \pi \widehat{f}(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L. \quad (27)$$

Тут ядра L_{mk} ($m, k = 1, 2$) визначаємо співвідношеннями

$$\begin{aligned} L_{11}(\zeta, \zeta_0) &= \chi_1^2 \frac{1-\nu}{2} \left\{ -\sigma K_0(\chi_1 r_0) + \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \left\langle K_2^0(\chi_1 r_0) + \frac{\chi_2^2}{\chi_1^2} K_2^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta}; \\ L_{12}(\zeta, \zeta_0) &= \chi_1^2 \frac{1-\nu}{2} \left\{ -\sigma K_0(\chi_1 r_0) + \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \left\langle K_2^0(\chi_1 r_0) - \frac{\chi_2^2}{\chi_1^2} K_2^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta}; \\ L_{21}(\zeta, \zeta_0) &= \chi_1 \left\{ \frac{K_1(\chi_1 r_0)}{2} + (1-\nu) \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \left\langle \frac{2/\chi_1}{|\zeta - \zeta_0|} - \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} K_1(\chi_1 r_0) - \frac{\chi_2}{\chi_1} K_1(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{|\zeta - \zeta_0|}{\zeta - \zeta_0}; \\ L_{22}(\zeta, \zeta_0) &= \chi_1 \left\{ \frac{K_1(\chi_1 r_0)}{2} + (1-\nu) \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \left\langle -\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} K_3^0(\chi_1 r_0) + \frac{\chi_2}{\chi_1} K_3^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{|\zeta - \zeta_0|}{\zeta - \zeta_0}, \end{aligned} \quad (28)$$

де $K_0(\chi r_0), K_1(\chi r_0)$ – функції Макдональда дійсних аргументів ($\chi \in \{\chi_1, \chi_2\}, r_0 = |\zeta - \zeta_0|$); $K_2^0(\chi r) = K_2(\chi r) - 2/(\chi^2 r^2)$, $K_3^0(\chi r) = K_3(\chi r) - 8/(\chi^3 r^3)$; функція $\widehat{f}(\zeta_0) = \widehat{f}^j(\zeta_0)$ визначена у крайових умовах (18) у кожен момент часу $t = t_j, j = 1, 2, \dots$. Зауважимо, що у ядрах L_{11}, L_{12} є логарифмічна особливість (при $\zeta \rightarrow \zeta_0$), у ядрі L_{21} – сингулярність типу Коші, а ядро L_{22} – регулярне. Розв'язки рівнянь (27) повинні також задовольняти додаткову умову [17, 22, 24]

$$\int_L \widehat{g}'(\zeta) d\zeta = 0; \quad \widehat{g}(\zeta) = \widehat{g}'(\zeta, t_j); \quad \zeta \in L, \quad (29)$$

яка забезпечує однозначність переміщень при обході контуру тріщини L .

Отримавши розв'язки цих рівнянь (значення функцій $\widehat{g}(\zeta, t_j), \widehat{g}'(\zeta, t_j)$), за інтегральними зображеннями хвильових потенціалів (19), залежностями між функціями (24), виразами для переміщень (20) і напружень (22), (23), та використавши подання модифікованого методу скінченних різниць за часом (16), визначимо напружено-деформований стан тіла з тріщиною у довільний момент часу $t = t_j (j = 1, 2, 3, \dots)$.

Числове розв'язування інтегро-диференційних рівнянь з наявними у їх ядрах логарифмічними особливостями та сингулярностями типу Коші проведено методом механічних квадратур [23] у випадку гладкої криволінійної тріщини з параметричним рівнянням контуру

$$\zeta = aw(\xi), \quad \xi \in [-1; 1], \quad (30)$$

де a – основний лінійний параметр задачі ($2a = |AB|$, де $A = aw(-1) = (-a; 0)$, $B = aw(+1) = (a; 0)$ – ліва та права вершини тріщини). У безрозмірних змінних інтегро-

диференційне рівняння (27) набуде вигляду

$$\int_{-1}^1 \{L_{11}(\xi, \xi_0) \widehat{g}_0(\xi) + L_{12}(\xi, \xi_0) \overline{\widehat{g}_0}(\xi)\} d\xi + \\ + \int_{-1}^1 \{L_{21}(\xi, \xi_0) \widehat{g}_0'(\xi) + L_{22}(\xi, \xi_0) \overline{\widehat{g}_0'}(\xi)\} d\xi = \widehat{\pi}_0(\xi_0), \quad \xi_0 \in [-1; 1], \quad (31)$$

де ядра $L_{11}(\xi, \xi_0) = a^2 L_{11}(\zeta, \zeta_0) w'(\xi)$, $L_{12}(\xi, \xi_0) = a^2 L_{12}(\zeta, \zeta_0) \overline{w'}(\xi)$, $L_{21}(\xi, \xi_0) = a L_{21}(\zeta, \zeta_0)$, $L_{22}(\xi, \xi_0) = a L_{22}(\zeta, \zeta_0)$ визначені виразами (28); $\widehat{f}_0(\xi_0) \equiv \widehat{f}(\xi_0, \tau_v) = \widehat{f}(\zeta_0) / p$, де $\tau_v = c_2 t_v / a$, $v = \overline{1, j}$ – безрозмірні часові вузли (4); $\widehat{g}_0(\xi) \equiv \widehat{g}_0(\xi, \tau_k) = \widehat{g}(\zeta) / (ap)$, $\widehat{g}_0'(\xi) \equiv \widehat{g}_0'(\xi, \tau_k) = \widehat{g}'(\zeta) w'(\xi) / p$, де p – силовий параметр розмірності напружень.

Числове розв'язування інтегро-диференційних рівнянь (31) зведено до знаходження функції $\widehat{g}_0'(\xi)$, а для визначення $\widehat{g}_0(\xi)$ використано інтегрування інтерполяційного поліному функції $\widehat{g}_0'(\xi)$ [23]. Невідому функцію $\widehat{g}_0'(\xi)$ шукаємо у класі функцій необмежених на кінцях проміжку інтегрування $\widehat{g}_0'(\xi) = \widehat{u}(\xi) / \sqrt{1 - \xi^2}$, де функція $\widehat{u}(\xi)$ на відрізку $\xi \in [-1; 1]$ задовольняє умовам Гелдера [22].

У подальших розрахунках використано прямий підхід методу механічних квадратур [19] до числового розв'язування отриманих інтегро-диференційних рівнянь (31), у ядрах яких поряд з регулярними складовими містяться сингулярності типу Коші та логарифмічні особливості. Цей підхід дозволяє застосовувати стандартні квадратурні формули (по вузлах Чебишова 1-го та 2-го родів) [22] для обчислення інтегралів по розімкнених контурах без виділення сингулярностей у ядрах підінтегральних виразів, що значно спрощує процес зведення інтегро-диференційних рівнянь (31) до систем лінійних алгебричних рівнянь відносно значень функції $\widehat{u}(\xi_k)$ у n вузлових точках $\xi_k = \cos(\pi(2k - 1) / (2n))$, $k = \overline{1, n}$ – коренях поліномів Чебишова 1-го роду.

Використавши інтерполяційний поліном Лагранжа для шуканої функції $\widehat{u}(\xi)$, знайдено її граничні значення на кінцях проміжку інтегрування $\widehat{u}(\pm 1) \equiv \widehat{u}(\pm 1, \tau_v)$. Через ці величини, що відповідають проміжним моментам безрозмірного часу $\tau = \tau_v$ ($v = \overline{1, j}$), визначено проміжні значення КІН, які для криволінійних тріщин мають вигляд [22] $\widehat{K}_I^\pm(t_k) - i \widehat{K}_{II}^\pm(t_k) = \mp p \sqrt{\pi |aw'(\pm 1)|} \widehat{u}(\pm 1, \tau_k) / w'(\pm 1)$. Реальні динамічні КІН у кожен момент часу t_j (4) знаходимо за прийнятими поданнями (типу (16)) модифікованого методу скінченних різниць за часом. Відносні величини динамічних КІН обчислено за формулами

$$F_I^\pm(\tau_j) - i F_{II}^\pm(\tau_j) \equiv \frac{K_I^\pm(t_j) - i K_{II}^\pm(t_j)}{p \sqrt{\pi a}} = \mp \frac{\sqrt{|w'(\pm 1)|}}{w'(\pm 1)} \sum_{v=1}^j \omega_{jv} \widehat{u}(\pm 1, \tau_v); \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

для лівої $F_I(A) = F_I^-(\tau_j)$, $F_{II}(A) = F_{II}^-(\tau_j)$ та правої $F_I(B) = F_I^+(\tau_j)$, $F_{II}(B) = F_{II}^+(\tau_j)$ вершин тріщини (рис. 1) у кожен безрозмірний вузловий момент часу $\tau = \tau_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots$).

Результати дослідження. Проведено числові розрахунки відносних динамічних КІН (32) у вершинах гладких криволінійних тріщин від безрозмірного часу $\tau = c_2 t / a$ за дії розподілених уздовж їх берегів та ударних у часі напружень (13)

$$N(\xi, \tau) + iT(\xi, \tau) = (-p(\xi) + iq(\xi))H(\tau), \quad H(\tau) = \{0, \tau \leq 0; 1, \tau > 0\}. \quad (33)$$

Обчислення проводили за плоскої деформації ($\kappa = 3 - 4\nu$) нескінченного пружного тіла для різних форм та центральних прогинів криволінійних тріщин з додатково згущеними часовими вузлами біля точки $\tau = 0$

$$\tau_j = \sum_{v=1}^j \Delta\tau_v, \quad \Delta\tau_v = \tau_v - \tau_{v-1}, \quad \tau_0 = 0; \quad j = \overline{1,28}; \quad \Delta\tau_v = \tau_1 + (v-1)^2 h/j; \quad v = \overline{2, j};$$

за таких значень параметрів: $\nu = 0.3$; $n = 32$; $j = 28$; $\tau_1 = 0.01$; $h = 0.02$.

Розглядали тріщини по дузі:

параболи $w(\xi) = \xi + i\varepsilon(\xi^2 - 1)$; $\xi \in [-1; +1]$, (34)

півеліпса $w(\xi) = [2\xi - i\varepsilon(1 - \xi^2)] / (1 + \xi^2)$, (35)

кола $w(\xi) = (\xi - i\varepsilon) / (1 - i\varepsilon\xi)$, (36)

де $\varepsilon = \delta/a$ – відносний вертикальний прогин контуру тріщини.

Форми криволінійних тріщин по-різному впливають на зміни КІН у часі за дії рівномірно розподілених нормальних ударних навантажень на берегах тріщин (рис. 2). Розрахунки проведено для тріщин по дузі параболи (34) (рис. 2а), півеліпса (35) (рис. 2б) та кола (36) (рис. 2в) за навантажень (33), де $q(\xi) = 0$; $p(\xi) = p = const$. На характер зміни в часі відносних динамічних КІН (32) нормального відриву $F_I(\tau)$ (суцільні лінії) та поперечного зсуву $F_{II}(\tau)$ (штрихові лінії), їх максимальні значення поряд з основним геометричним параметром тріщини $\varepsilon = \delta/a$ суттєво впливає форма контуру тріщини, особливо – в околі її кінців.

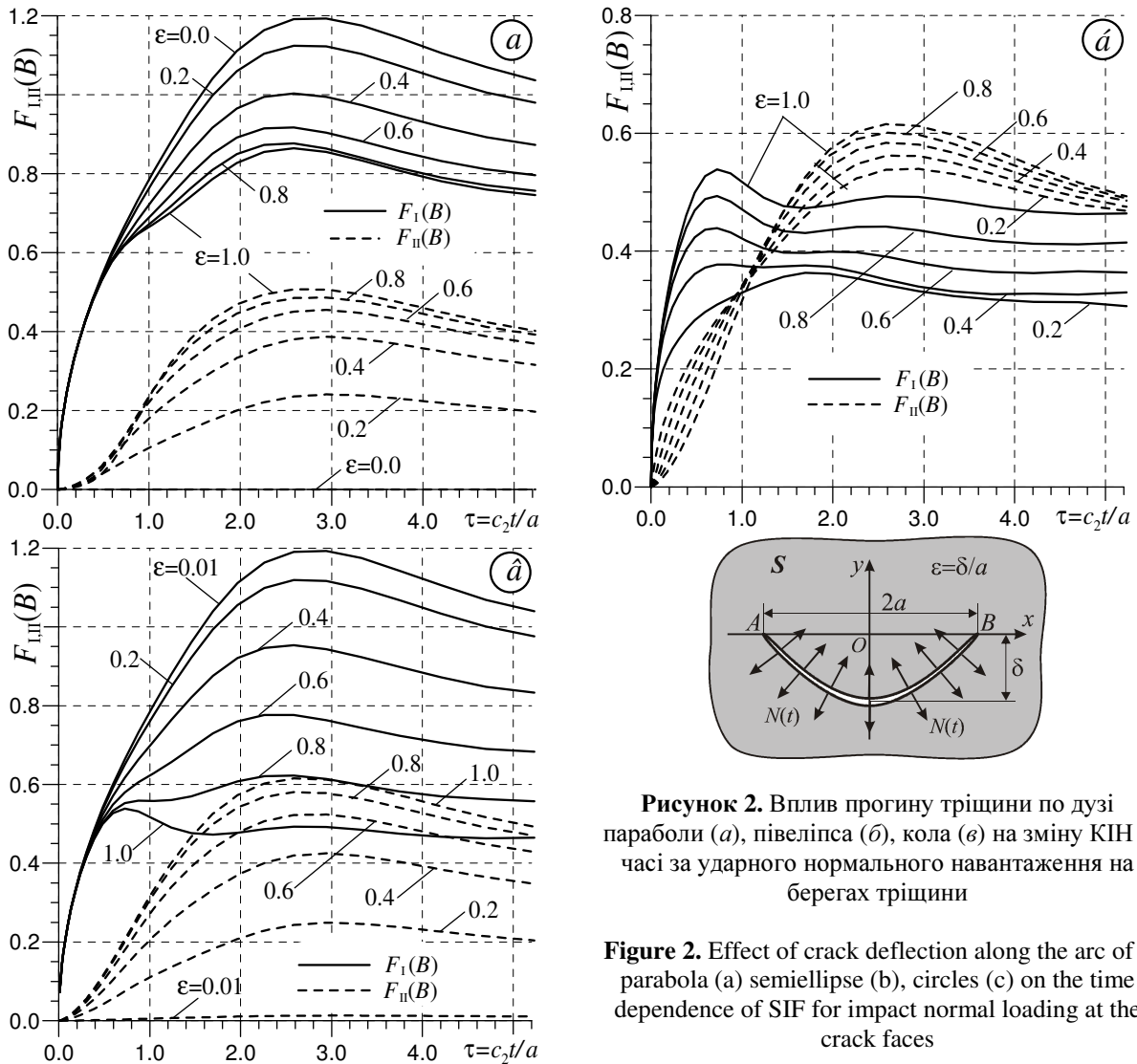


Рисунок 2. Вплив прогину тріщини по дузі параболи (а), півеліпса (б), кола (в) на зміну КІН у часі за ударного нормального навантаження на берегах тріщини

Figure 2. Effect of crack deflection along the arc of a parabola (a) semiellipse (b), circles (c) on the time dependence of SIF for impact normal loading at the crack faces

За одночасної дії сталих уздовж контуру криволінійної тріщини нормальних та дотичних ударних навантажень поведінка динамічних КІН у двох вершинах тріщини суттєво різняться (рис. 3). Ця відмінність відсутня для прямолінійної тріщини ($\varepsilon = 0$), однак значно зростає зі збільшенням параметра ε , зокрема, $F_I(A)$ з часом суттєво зростає (рис. 3а), а $F_I(B)$ – спадає і стає від’ємною величиною, що свідчить про появу контакту берегів тріщини біля вершини B . Розрахунки проведено для тріщини по дузі параболи (34) з різними центральними прогинами ($\varepsilon \in \{0; 0.5; 1; 1.5; 2\}$) за дії ударних навантажень (33), де $p(\xi) = q(\xi) = p = const$.

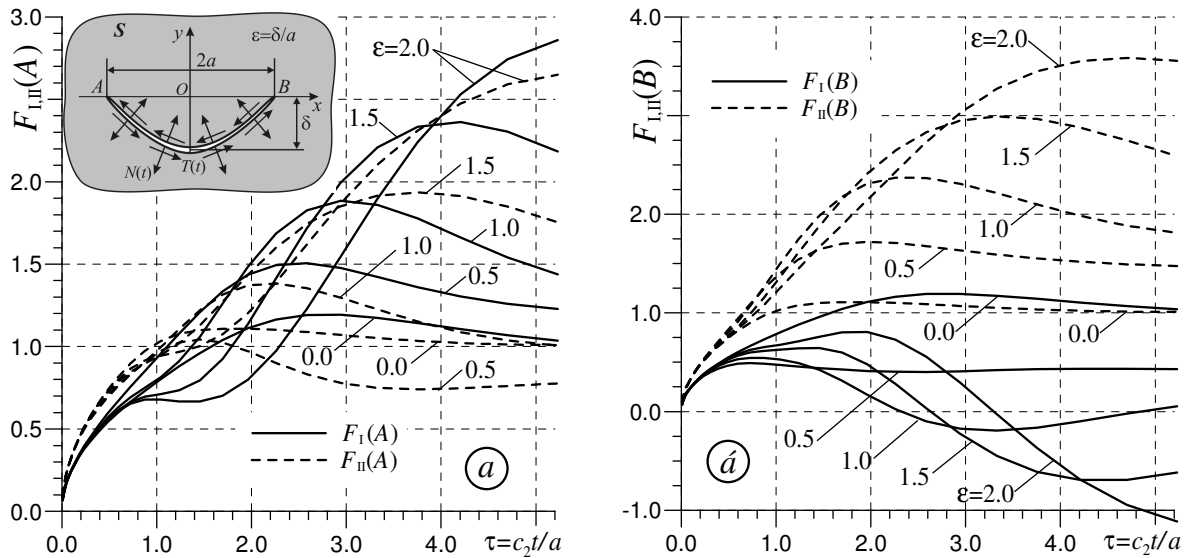


Рисунок 3. Часові залежності відносних КІН у лівій (а) та правій (б) вершинах параболическої тріщини за рівномірно розподілених нормальних та дотичних навантажень

Figure 3. Time dependence of relative SIF at the left (a) and right (b) tips of a parabolic crack by uniformly distributed normal and shear loadings.

Для плоскої деформації пружного тіла з прямолінійною тріщиною ($\varepsilon = 0$) за ударних у часі та сталих уздовж контуру нормальних або дотичних напружень обчислені значення відносних КІН $F_I(\tau), F_{II}(\tau)$ добре узгоджуються з відомими [2, 18, 27].

Запропонований метод розрахунку динамічних КІН дозволяє розглядати також змінні вздовж контурів криволінійних тріщин нормальні та дотичні динамічні навантаження. На рис. 4 показано поведінку динамічних КІН (32) у відносному часі за одночасної дії змінних по контуру тріщин як нормальних (симетричних відносно параметра контуру $\xi \in [-1; +1]$), так і дотичних (антисиметричних відносно ξ) ударних навантажень (33): $p(\xi) = -p\sqrt{1-\xi^2}$; $q(\xi) = p\xi$; $\xi = \cos(\theta) \in [-1; +1]$, $\theta \in [0; \pi]$. У цьому випадку $F_I(B) = F_I(A)$, $F_{II}(B) = F_{II}(A)$, і домінують є КІН другого роду (штрихові лінії) – за рахунок наявних максимальних дотичних напружень у вершинах тріщини. Розглянуто тріщини по дузі параболи (34) (рис. 4а), півеліпса (35) (рис. 4б) та кола (36) (рис. 4в) з різними відносними прогинами $\varepsilon = \delta/a \in \{0; 0.5; 1; 1.5; 2\}$. На окремих часових проміжках і для певних значень параметра прогину контурів тріщин по дугах півеліпса та кола (рис. 4б, в) тут також можливий контакт берегів тріщини ($F_I(B) < 0$).

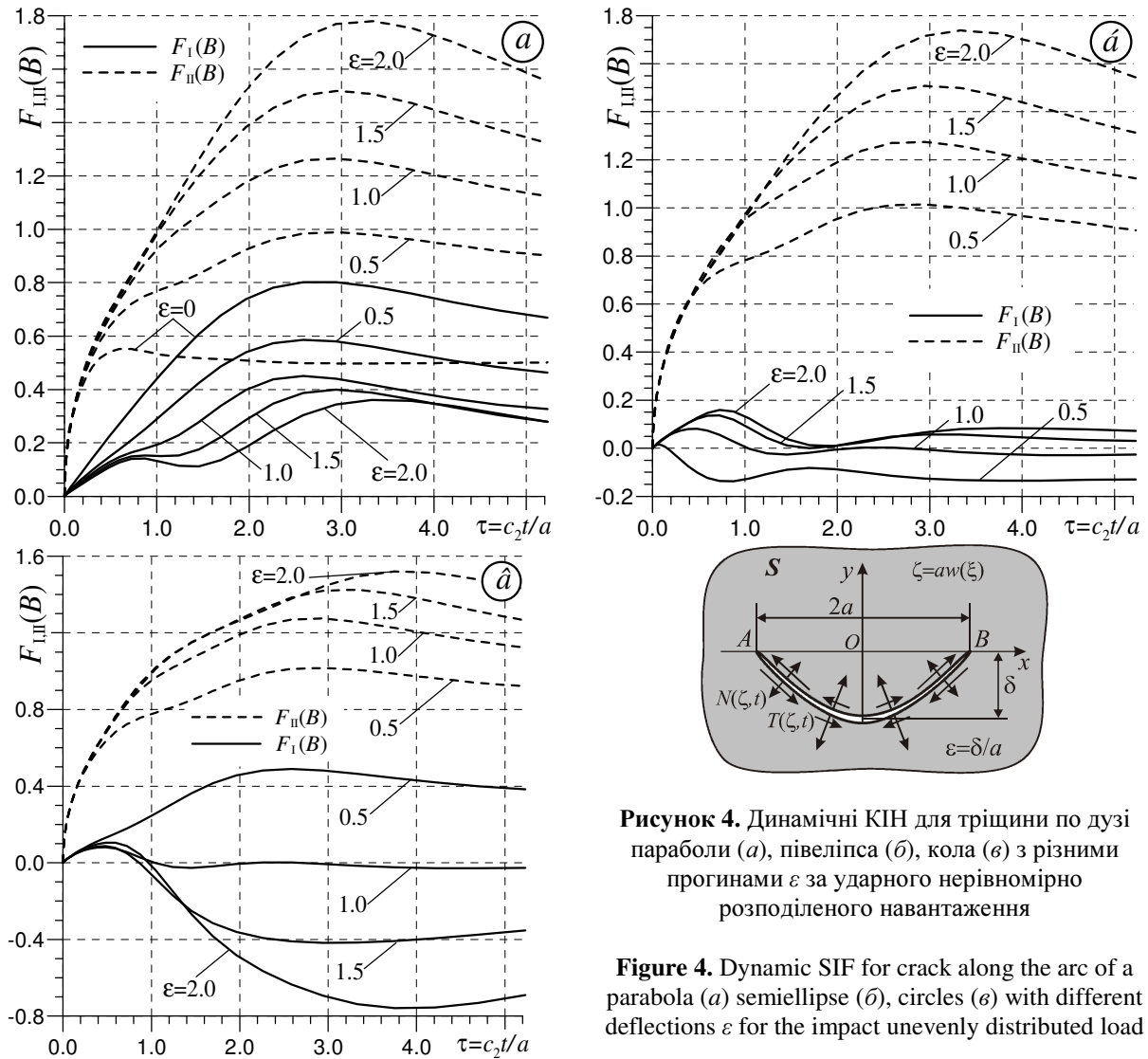


Рисунок 4. Динамічні КІН для тріщини по дузі параболи (а), півеліпса (б), кола (в) з різними прогинами ε за ударного нерівномірно розподіленого навантаження

Figure 4. Dynamic SIF for crack along the arc of a parabola (a) semiellipse (b), circles (c) with different deflections ε for the impact unevenly distributed load

Висновки. Використання методу сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь за просторовими змінними та модифікованого методу скінченних різниць за часом дає змогу ефективно розв'язувати динамічні задачі теорії пружності для тіл з тріщинами, на берегах яких діють різного роду динамічні навантаження. Плоскі динамічні задачі для нескінченних тіл з гладкими криволінійними тріщинами зведено до послідовного розв'язування систем сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень на берегах тріщин у кожен вузловий момент часу. Розвинуто метод механічних квадратур до числового розв'язування отриманих інтегро-диференціальних рівнянь, ядра яких містять сингулярності типу Коші та логарифмічні особливості. Ефективність розвинутого методу підтверджено числовими розрахунками динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень за різних ударних навантажень на берегах криволінійних тріщин (по дугах кола, параболи, півеліпса). Проаналізовано вплив форми та кривини контурів тріщин на зміну в часі коефіцієнтів інтенсивності напружень за різних нормальних та дотичних ударних навантажень. Встановлено, що основний вплив на характер поведінки динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень має не величина відносного прогину контуру тріщини, а її форма, особливо – в околах вершин тріщини. В окремих випадках ударних навантажень на берегах прямолінійних тріщин отримано результати порівняно з відомими, знайденими іншими методами.

Conclusions. Taking advantage of the method of singular integral-differential equations for the space variables and modified method of finite difference for time makes possible to solve effectively dynamic problems of elasticity theory for bodies with cracks on the faces which are under various dynamic loads. The plane dynamic problems for infinite bodies with smooth curvilinear cracks are reduced to the solution of singular integral-differential equations for displacement jumps on the crack contours at each nodal point in time. The mechanical quadratures method is developed to obtain the numerical solution of integral-differential equations, whose kernels contain singularity of Cauchy type and logarithmic singularity. The effectiveness of the developed method is confirmed by numerical calculations of the dynamic stress intensity factors for various impact loads on the faces of curvilinear cracks (circular, parabolic and semielliptic arcs). The influence of the shape and curvature crack contours at time changing of the stress intensity factors is analyzed for various normal and tangential impact loads. It is found that the main influence on the behavior of dynamic stress intensity factors is not the relative deflection of the crack contour, but its shape - especially in the crack tip regions. In the particular cases of impact loads at the faces of rectilinear cracks the results are compared with the known, obtained by other methods.

Список використаної літератури

1. Партон, В.З. Динамика хрупкого разрушения [Текст] / Партон, В.З., Борисковский В.Г. – М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.
2. Sih, G.C. Mechanics of Fracture. 4: Elastodynamic Crack Problems, Leyden: Noordhoff International Publishing – 1977. – 352 p.
3. Freund, L.B. Dynamic Fracture Mechanics - Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998. – 564 p.
4. Ravi-Chandar, K. Dynamic Fracture – Amsterdam, Netherlands, Elsevier. – 2004. – 254 p.
5. Борисковский, В.Г. Динамическая механика разрушения; Итоги науки и техники [Текст] / В.Г. Борисковский, В.З. Партон. – М.: ВИНТИ, 1983. – 16. – 84 с.
6. Поручиков, В.Б. Методы динамической теории упругости [Текст] / В.Б. Поручиков. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
7. Angel, Y.C. On the reduction of elastodynamic crack problems to singular integral equations // Int. J. Eng. Sci. – 1988. – 26, № 7. – P. 757 – 764.
8. Chen, W. Cauchy singular integral equation method for transient antiplane dynamic problems / W. Chen, R. Tang // Eng. Fract. Mech. – 1996. – 54, № 2, – P. 177 – 187.
9. Мыхаськів, В.В. Решение динамических задач теории упругости для тел с трещинами посредством преобразования Фурье [Текст] / В.В. Мыхаськів, М.В. Хай // Докл. АН УССР – 1987. – А. – С. 27 – 30.
10. Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3D dynamic crack problems / J. Sladek, V. Sladek, V.V. Mykhas'kiv, V.Z. Stankevych // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2003. – 27. – P. 203 – 213.
11. Chen, Y.M. Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the hemp code) // Eng. Fract. Mech. – 1975. – 7, № 4. – P. 653 – 660.
12. Peuser, T. Stress intensity factors of plane dynamic problems, Fracture and Fatigue. Elasto-Plasticity. Thin Sheet and Micromechanisms Problems, Proc. 3rd Colloq. Fract. / T. Peuser, D. Gross. – 1980 – P. 461 – 473.
13. Саврук, М.П. Новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування [Текст] / М.П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – N 4. – С. 7 – 11.
14. Саврук, М. Динамічна задача для тіла з тріщиною за антиплоскої деформації [Текст] / М. Саврук, О. Матвісів // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій; за заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: ФМІ НАН України. – 2004. – С. 255 – 260.
15. Попов, В.Г. Розв'язання динамічної антиплоскої задачі для тіла з включенням методом скінченних різниць за часом [Текст] / В.Г. Попов, О.П. Мойсеєнок // Фіз.-хім. механіка матеріалів – 2005 – 41, № 4 – С. 19 – 25.
16. Осів, Я.П. Динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень у тілі з тріщиною за антиплоскої деформації під дією зосереджених сил [Текст] / Я.П. Осів // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій; за заг. ред. Панасюка В.В. – Львів: ФМІ НАН України. – 2009. – С. 161 – 166.

17. Кравець, В.С. Про поєднання методів сингулярних інтегро-диференційних рівнянь та скінченних різниць за часом у плоских динамічних задачах теорії тріщин [Текст] / В.С. Кравець // *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*; за заг. ред. Панасюка В.В. – Львів: ФМІ НАН України, 2009. – С. 289 – 294.
18. Кравець, В.С. Метод сингулярних інтегро-диференційних рівнянь у плоских динамічних задачах механіки руйнування [Текст] В.С. Кравець // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2010. – 46, № 2. – С. 95 – 110.
19. Savruk, M.P. Combination of time finite difference and boundary integral equation methods in dynamic problems of fracture mechanics / M.P. Savruk, V.S. Kravets / *Preceeding Int.Conf. "Integral Equations – 2010"*, 25 – 27 August 2010. – Lviv: PAIS, 2010. – P. 127 – 133.
20. Саврук, М.П. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра [Текст] / М.П. Саврук, Л.Й. Онишко, М.М. Сенюк // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2008. – 44, № 1. – С. 7 – 13.
21. Онишко, Л.Й. Напружений стан порожнистого двошарового циліндра під динамічним навантаженням [Текст] / Л.Й. Онишко, М.М. Сенюк // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2009. – 45, № 1. – С. 55 – 62.
22. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
23. Панасюк, В.В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двухмерных задачах дифракции [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
24. Фильштинский, Л.А. Диффракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде [Текст] / Л.А. Фильштинский // *Механика твердого тела* – 1991. – № 4. – С. 119 – 127.
25. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
26. Справочник по специальным функциям [Текст]; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
27. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т. 2: Пер.с англ. [Текст]; под. ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.

Отримано 20.08.2013