

УДК 519.6

В. Дейнека<sup>1</sup>, академік НАН України, докт. фіз.-мат. наук;  
М. Петрик<sup>2</sup>, канд. техн. наук; П. Василюк<sup>2</sup>, канд. техн. наук; Н. Бабій<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

<sup>2</sup>Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНОГО ПЕРЕНЕСЕННЯ В БАГАТОШАРОВИХ НАНОПЛІВКАХ ОКСИДНОЇ СТРУКТУРИ (ДОСЛІДЖЕННЯ ЗРАЗКА ЗА ТЕХНОЛОГІЄЮ ВИРОБНИЦТВА БАЗАЛЬТОВОГО СУПЕРТОНКОГО ВОЛОКНА)

**Резюме.** Побудовано математичну модель дифузійного перенесення в неоднорідних багат шарових наноплівках оксидної структури на основі дослідження зразка, створеного за технологією виробництва базальтового супертонкого волокна (БСТВ). Досліджувані наноплівки можуть використовуватися як термо- і агресивнозахисні покриття робочих органів технологічного обладнання, що працюють у високоагресивних середовищах. Отримано просторово-розподілені концентраційні розподіли структурних складових компонентів наноплівок для різних технологічних зрізів та часових тривалостей формування технологічного мультишару наноплівки.

**Ключові слова:** перенесення, математична модель, наноплівки, мультишари, концентраційні розподіли, інтегральні перетворення.

V. Deineka, M. Petryk, P. Vasyluk, N. Babiy

## MATHEMATIC MODELING OF THE DIFFUSION TRANSFER IN THE MULTILAYER NANO-OXIDE FILMS (SAMPLE INVESTIGATION OF THE TECHNOLOGY OF THE BASALT SUPER-FINE FIBER MANUFACTURING)

**Summary.** Development of modern technologies that integrate a miniaturized physical systems has stimulated a large number of papers on the study of the kinetics of mass transfer processes in multilayer nanofilms that are used in resource-saving technologies. Alloys of iron-chromium systems are used as a structural material in atomic power engineering in the production of mineral fibers. Oxides, including multilayer ones, are widely used in the semiconductor technology. The chemical composition of oxides is determined by such components as Cr, Al, Si, rare-earth metals. If Al content is increased to 3%, the heat resistance of the alloy dramatically increases, since the formation of the external aluminum oxide prevents the penetration of oxygen into the inner layers. Determination of diffusion characteristics allows to correct the chemical composition of alloys and predict the operating life of their operation.

The mathematical model of diffusion transfer in heterogeneous environments that describes the process of forming thin oxide nano films multilayers, which are used as thermo- and aggressive-protective coverings of processing equipment operating members in highly corrosive environments, has been constructed.

Spatially distributed concentration distributions of nanofilm structural components (aluminium, silicon) for various technological shears of oxide nanofilm and time durations of forming the technological nanofilm multilayer have been obtained in the result of modeling.

The results can be used to increase the effectiveness of experimental researches of transfer in multicompositional polycompositional and in researching the properties of new nanomaterials.

**Key words:** mass transfer, mathematical modeling, nano films, concentration distributions, integral transformation.

**Постановка проблеми.** Важливим напрямом ресурсозбереження та підвищення технологічних характеристик матеріалів є застосування наноплівок та нанопокриттів

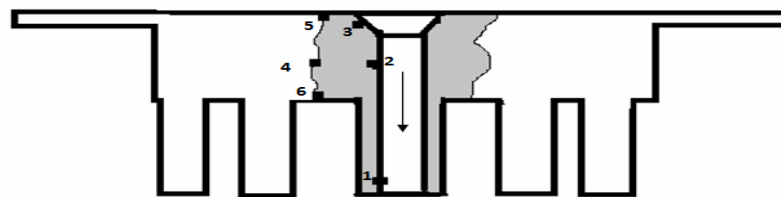
різного призначення, при цьому необхідно вивчити кінетику процесів перенесення в багатошарових наноплівках. Сплави системи залізо-хром використовують як конструкційний матеріал в атомній енергетиці, при виробництві мінеральних волокон. У напівпровідниковій техніці застосовуються багатошарові оксиди, хімічний склад яких визначається такими компонентами, як Cr, Al, Si, PЗМ. Утворення на поверхні багатошарових оксидів забезпечує високу жаростійкість в інтервалі 1000 – 1300°C. Серед інших інтерес викликають сплави (мас. %) Fe-35Cr-(0,5; 3) Al. При вмісті 0.5% Al на поверхні сплаву утворюються оксиди за схемою Me-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-FeCrO. Якщо вміст Al підвищений до 3%, то оксиди розташовуються за такою схемою: Me-FeCrO-AlO. При цьому різко зростає жаростійкість сплаву, оскільки утворення зовнішніх оксидів алюмінію перешкоджає проникненню кисню у внутрішні шари. Загальна товщина окалини при цьому зменшується у 3 – 4 рази. Визначення дифузійних характеристик дозволяє скоригувати хімічний склад сплавів і прогнозувати ресурс їх роботи.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У працях Василюка П.М., Гаврилюка В.П. експериментально вивчалися дифузійні ефекти в багатошарових тонких оксидних плівках Me-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-FeCr<sub>2</sub>O<sub>4</sub> та Me-FeCr<sub>2</sub>O<sub>4</sub>-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, які запропоновані для використання як ефективні термо- та корозійностійкі нанопокриття робочих вузлів обладнання, що працюють у високотемпературних та агресивних середовищах (рідке скло, оптоволокно, базальтоволокно тощо), забезпечуючи економію матеріалів [3 – 5]. Задачі вивчення дифузії в багатошарових плівках вимагають розроблення нових методів моделювання і математичних моделей для опису явищ, які враховують наявність переходів (інтерфейсів) між суміжними шарами. Ефективними методами, які найповніше враховують проаналізовані вище особливості, є методи інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа, Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля, Конторовича – Лебедева, з використанням яких отримані розв'язки різних типів краєвих задач математичної фізики однорідних структур, у тому числі задачі дифузії для різних середовищ та можливість їх математичного моделювання [10].

**Метою роботи** є створення математичної моделі процесів дифузійного перенесення в багатошарових наноплівках оксидної структури для отримання концентраційних розподілів дифундованих компонент (кремнію, молібдену та алюмінію) на кожному з шарів.

**Фізична задача і математична модель** процесу дифузії в багатошарових плівках. Розглянуто багатошарове, що складається з n шарів середовище.

Схематичний вигляд досліджуваного зразка за технологією виробництва базальтового волокна (БСТВ) зображено на рис. 1.



**Рисунок 1.** Схематичний вигляд зразка

**Figure 1.** Scheme representation of the sample

З метою отримання повноти картини аналізу вибрано шість позицій (точок), у яких здійснювались експериментальні зрізи (заміри) щодо кількісного складу означених вище компонентів. Розподіл елементів сплаву за технологією виробництва базальтового волокна з робочою температурою 1573 К вивчали в точках: 1 – межа сплав-повітря-розплав; 2, 4 – об'єм сплаву; 6 – межа сплав-повітря; 5 – межа сплав-розплав. Точки для зрізів вибирали з урахуванням ступеня контакту з агресивним

робочим середовищем (розплав скла) поверхні, покритої нановлівкою даної оксидної структури. Точки Т.1 – Т.3 є точками безпосереднього контакту з агресивним середовищем, ранжовані в порядку зменшення ступеня контакту з агресивним середовищем. Точки Т.4 – Т.6 не мають безпосереднього контакту з агресивним середовищем, однак розміщені в безпосередній близькості до нього і внаслідок цього піддаються значним термічним навантаженням. Аналогічно, точки Т.4 – Т.6 також ранжовані в порядку зменшення ступеня термічного навантаження.

На основі експериментів П. Василюка отримано концентраційні розподіли елементів (кремнію, молібдену, алюмінію) [3, 5], які використані як вхідні параметри для математичного моделювання процесу дифузії.

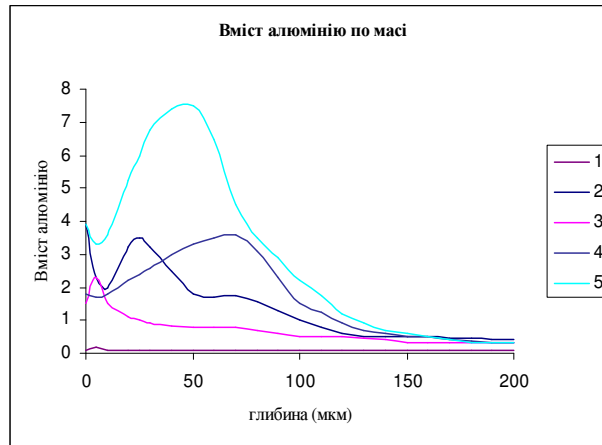


Рисунок 2. Експериментальні концентраційні розподіли для алюмінію

Figure 2. Experimental concentration distributions of Al

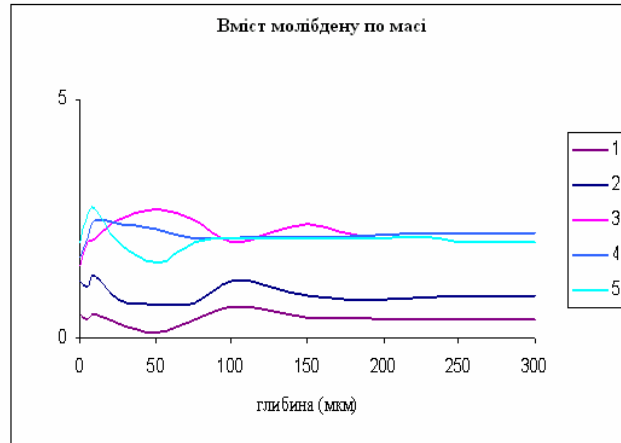


Рисунок 3. Експериментальні концентраційні розподіли для молібдену

Figure 3. Experimental concentration distributions of Mo

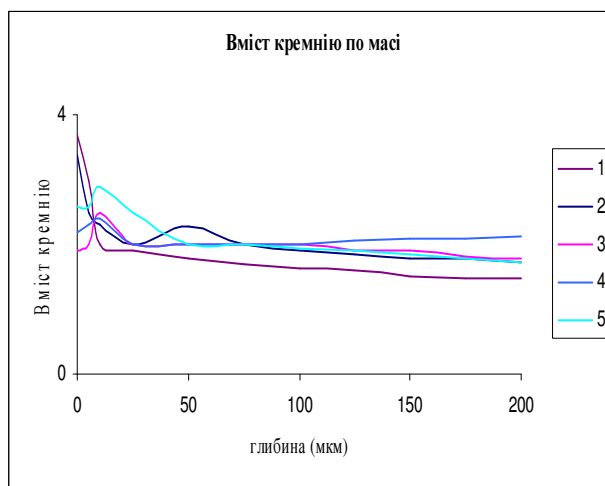


Рисунок 4. Експериментальні концентраційні розподіли для кремнію

Figure 4. Experimental concentration distributions of Si

Припустивши, що процес дифузії атомів складових компонентів оксидних плівок (алюміній, молібден, кремній) – головна причина змішування системи, то концентраційні профілі для такої багатошарової системи можна отримати з рівнянь Фіка в комбінації з крайовими умовами зовнішніх шарів і умовами контакту між послідовними шарами.

Запропоновано математичну модель процесу перенесення шляхом дифузії в плоскому багатошаровому по товщині плівки середовищі (рис. 1). Значення місцевої миттєвої концентрації  $C_k(t, x, z)$  як розв’язок наступної системи диференціальних рівнянь другого порядку

$$\frac{\partial}{\partial t} C_k(t, x, z) + \gamma_k^2 C_k = D_0 \frac{\partial^2 C_k}{\partial x^2} + D_{z_k} \frac{\partial^2 C_k}{\partial z^2}; \quad (1)$$

в області  $I_n = \left\{ t > 0, x \in (0, R), z : z \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (l_{k-1}, l_k); l_0 \geq 0; l_{n+1} = \infty \right\}$ ,

де  $D_k$  – коефіцієнти дифузії в  $k$ -му фрагменті (елементі) багатошарового середовища.

Відповідні початкові умови мають вигляд

$$C_k(t, x, z)|_{t=0} = C_{0k}(x, z) \equiv C_{0k}(z), \quad k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Крайові умови та інтерфейсні умови між суміжними шарами вздовж осі  $z$

$$\left[ \alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0 \right] C_1(t, x, z)|_{z=l_0} = C_{l_0}(t, x); \quad \frac{\partial C_{n+1}}{\partial z}|_{z=\infty} = 0, \quad (3)$$

$$\left[ \left[ \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right] C_k - \left[ \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right] C_{k+1} \right]_{z=l_k} = 0, \quad j = \overline{1, 2}; k = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Крайові умови по змінній  $x$

$$\frac{\partial C_k}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, C_k \Big|_{x=R} = C_{1_k}(t, z). \quad (5)$$

Зокрема інтерфейсні умови (4), записані в узагальненому вигляді як умови третього роду, з урахуванням специфіки досліджуваної проблеми набудуть вигляду

$$\begin{aligned} [C_k - C_{k+1}]_{z=l_k} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} [D_k C_k - D_{k+1} C_{k+1}]_{z=l_k} &= 0, k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4_1)$$

Тут використані позначення  $\alpha_{ij}^k, \beta_{ij}^k; k = \overline{0, n}; i, j = \overline{1, 2}$  – коефіцієнти, що визначають крайові умови й умови контакту як умови третього роду.

В нашому випадку  $\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1; \alpha_{11}^k = D_k, \alpha_{12}^k = D_{k+1}; \alpha_{21}^k = \alpha_{22}^k = 0; \beta_{s1}^k = \beta_{s2}^k = 0, s = \overline{1, 2}; (k = \overline{1, n}); C_k, k = \overline{1, n+1}$  – концентрації в k-му шарі багат шарового середовища вздовж осі z; x, z – просторові координати; t – час;  $D_k, k = \overline{1, n+1}$  – коефіцієнт дифузії в напрямку осі z;  $D_0$  – коефіцієнт дифузії в напрямку осі x;  $\Delta l_k = l_k - l_{k-1}; k = \overline{1, n+1}$  – товщина k-го шару;  $l = l_{n+1} - l_0$  – товщина плоского неоднорідного по товщині середовища; R – півширина середовища.

Точний аналітичний розв’язок задачі, описаної рівняннями (1) – (4) безпосередньо виписується шляхом застосування інтегральних перетворень Фур’є [5, 10]

$$\begin{aligned} C_k(t, x, z) &= \int_0^t \int_0^R \int_0^{l_k} W_{l_0, k}(t - \tau, x, \zeta, z) C_0(\tau, \zeta) d\zeta d\tau + \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^R \int_0^{l_{k_1}} H_{k, k_1}(t - \tau, x, \zeta, z, \xi) \cdot C_0(\zeta, \xi) \cdot \delta_+(t) \sigma_{k_1} d\zeta d\xi d\tau + \\ &+ \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^{l_{k_1}} W_{R, k_1}(t - \tau, x, z, \xi) \cdot C_1(\tau, \xi) \sigma_{k_1} d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

де:

- функція Гріна (функція впливу крайової умови для поверхні впливу z=10)

$$W_{l_0, k}(t, x, z, \xi) = \frac{2}{R} \sum_{m=0}^{\infty} W_{l_0, k}^m(t - \tau, z) (-1)^m \frac{\cos \eta_m \xi}{\eta_m};$$

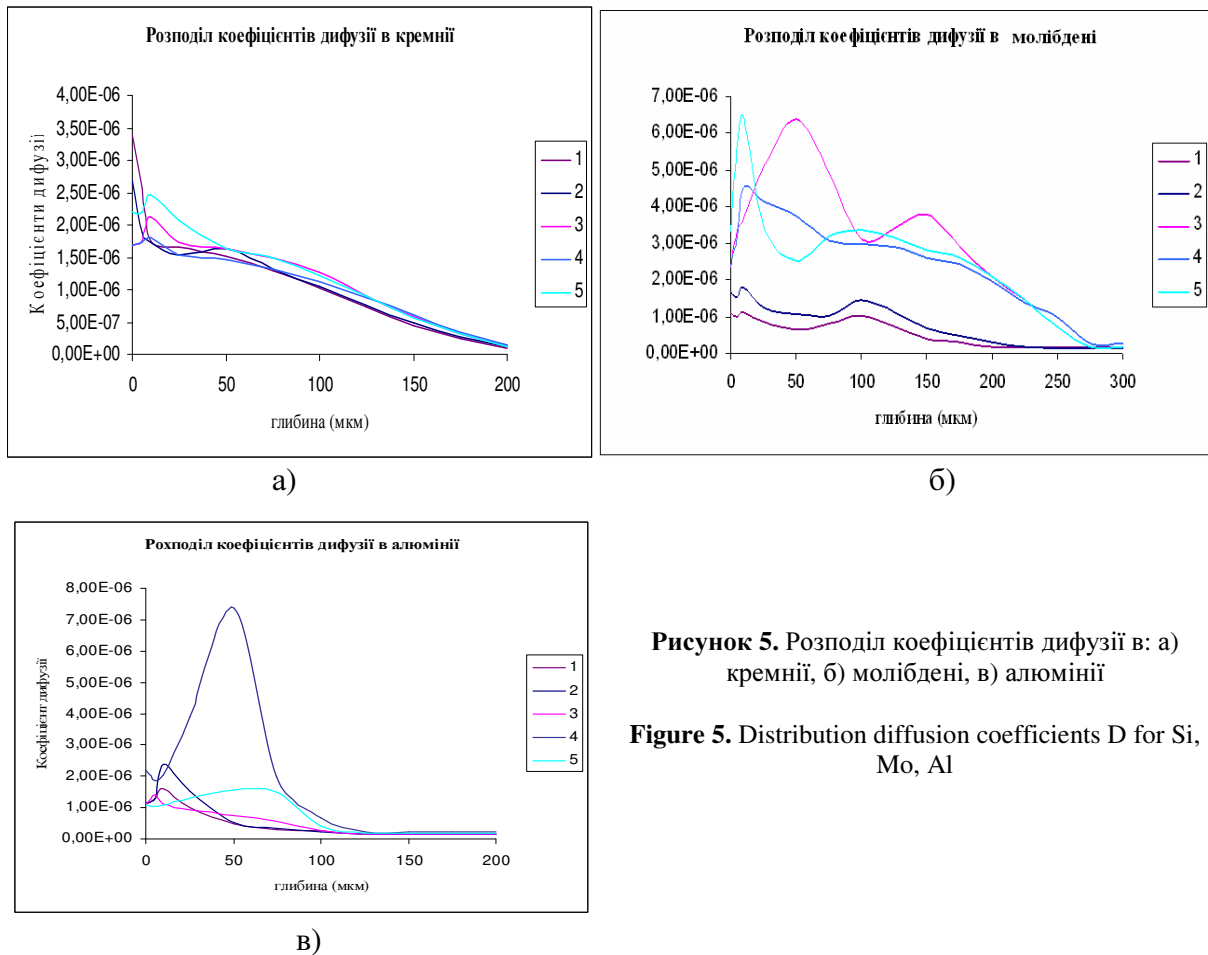
- функція Гріна (функція впливу крайової умови для поверхні впливу x=R)

$$W_{R, k_1}(t, x, \zeta, z, \xi) = \frac{2}{R} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-D_0 \eta_m^2 t} D_0 (-1)^{m+1} \eta_m \mathcal{E}_{k, k_1}^m(t; z, \xi) (-1)^m \cdot \cos \eta_m x;$$

- функція впливу Коші неоднорідностей системи

$$H_{k,k_1}(t; x, \zeta; z, \xi) = \frac{2}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{k,k_1}^m(t, z, \xi) \cdot \cos \eta_m \xi \cdot \cos \eta_m x.$$

**Результати числового моделювання: аналіз модельних і експериментальних концентраційних профілів.** На рис 5 – 6 наведено отримані на основі методів теорії оптимального керування станом розподіленіми системами, розробленими Дейнекою В.С. [12 – 14], апробованими та реалізованими в моделях переносу, викладених у працях [6 – 9], розподіли коефіцієнтів дифузії кремнію та алюмінію з використанням аналітичного розв’язку моделі (6) та даних експериментальних спостережень (рис. 2 – 3).

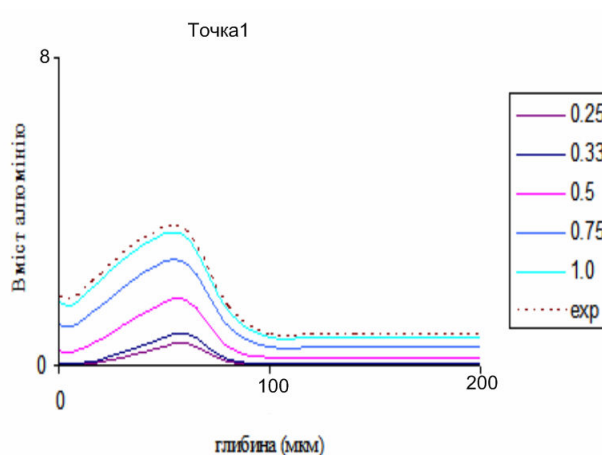


**Рисунок 5.** Розподіл коефіцієнтів дифузії в: а) кремнії, б) молибдені, в) алюмінії

**Figure 5.** Distribution diffusion coefficients  $D$  for Si, Mo, Al

Як жаро-, так і корозійна стійкість сплавів визначається вмістом, в першу чергу, алюмінію, який забезпечує утворення захисних поверхневих оксидів. Розглянемо результати комп’ютерного моделювання концентраційних розподілів алюмінію в кожній з п’яти точок.

На рис. 6 наведено результати числового моделювання та використані сліди експериментальних спостережень (exp), що відображають уміст алюмінію. Ці концентраційні розподіли побудовані для різних часових тривалостей формування технологічного мультишару наноплівки: приведений час, що дорівнює (1Т), відповідає

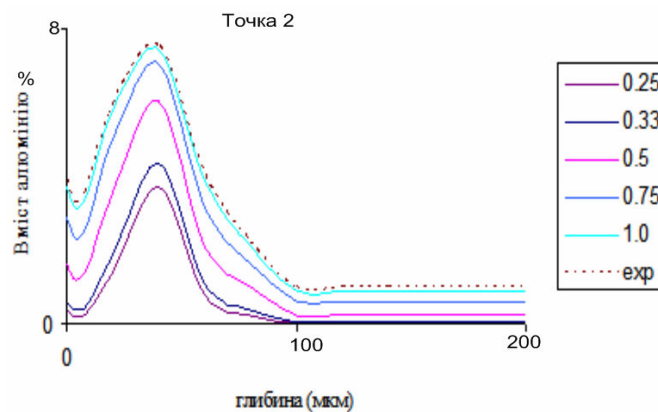


експериментальному часу (20 діб). Тривалості формування технологічного мультишару наноплівки за рахунок молекулярної дифузії вказаних компонентів розбиті на 5 періодів, що включають формування захисного мультишару від початкового періоду ( $0.25T$ ) до кінцевого ( $1T$ ).

**Рисунок 6.** Модельні концентраційні розподіли алюмінію (точка 1)

**Figure 6.** Modelling concentration distributions of Al (point 1)

Як бачимо з графіка на рис. 6, для точки T.1 характерним є майже повне співпадання вмісту алюмінію на глибині понад 100 мкм при приведеному часі  $0.25T$  та  $0.33T$  (тобто на першій третині експерименту), причому цей вміст близький до нуля. Найбільший приріст вмісту алюмінію спостерігається при приведеному часі від  $0.33T$  до  $0.75T$ . Максимальне відхилення концентрації алюмінію для періоду завершення формування захисного мультишару наноплівки від експериментального профілю не перевищує 2–3%, що дає підставу сказати про достовірність математичної моделі та можливості практичного використання отриманих результатів.

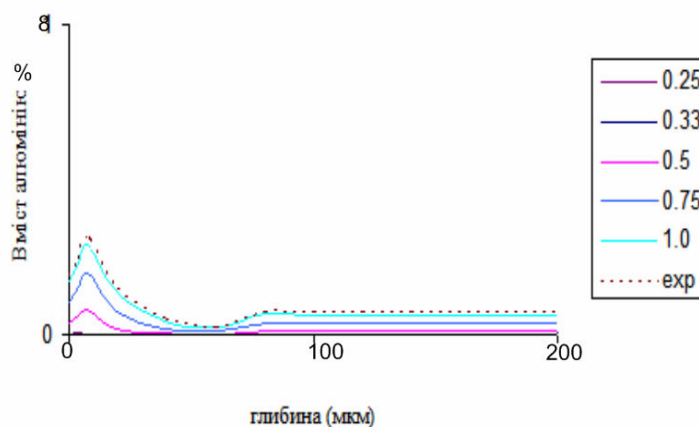


**Рисунок 7.** Модельні концентраційні розподіли алюмінію (точка 2)

**Figure 7.** Modelling concentration distributions of Al (point 2)

На рис. 7 бачимо, що для точки T.2 найбільший приріст вмісту алюмінію спостерігається при приведеному часі від  $0.33T$  до  $0.5T$ . Максимальне відхилення концентрації алюмінію для періоду  $1T$  від exp дорівнює близько 3%.

Точка 3



**Рисунок 8.** Модельні концентраційні розподіли алюмінію (точка 3)

**Figure 8.** Modelling concentration distributions of Al (point 3)

З графіка на рис. 8 бачимо, що для точки Т.3 характерним є найбільший приріст вмісту алюмінію при приведеному часі від 0,5Т до 0,75Т.

Для точки Т.4 концентрація алюмінію є стала і дорівнює близько 0,65%. Це можна пояснити тим, що ця точка має найменший ступінь термічного навантаження (рис. 9).

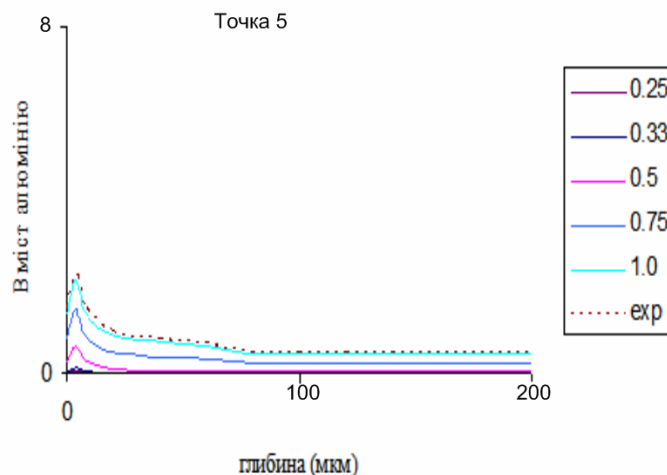


Рисунок 9. Модельні концентраційні розподіли алюмінію (точка 5)

Figure 9. Modelling concentration distributions of Al (point 5)

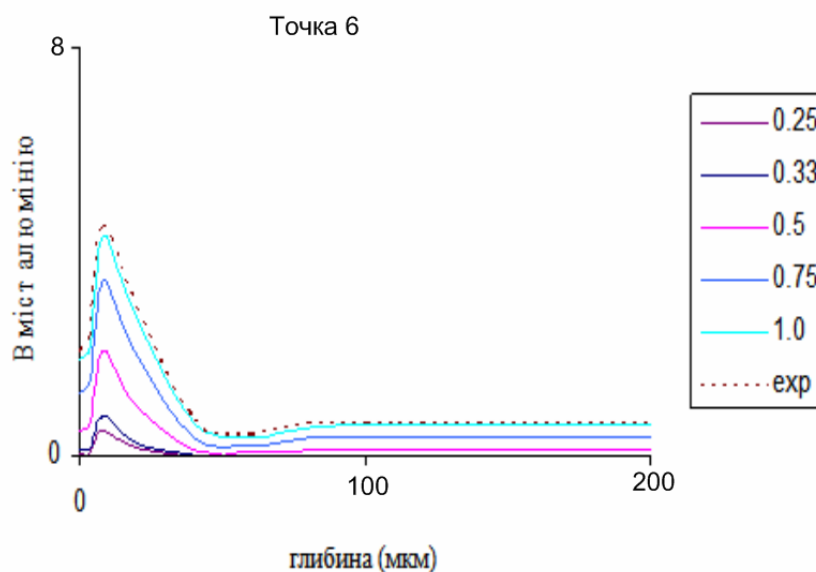


Рисунок 10. Модельні концентраційні розподіли алюмінію (точка 6)

Figure 10. Modelling concentration distributions of Al (point 6)

Як бачимо з рис. 6 – 10 профілі, отримані шляхом моделювання, є добре узгоджені з відповідним експериментальним профілем при наближенні тривалості формування мультишару до періоду кінцевого завершення формування захисного мультишару наноплівки. Максимальне відхилення не перевищує 2 – 3%, що дає змогу говорити про достовірність математичної моделі та можливості практичного використання отриманих результатів.



Розглянемо результати комп'ютерного моделювання концентраційних розподілів молибдену в кожній з п'яти точок, які наведені на рис. 11 – 16. Для аналізу на кожному з графіків наведено також експериментальні дані (exp).

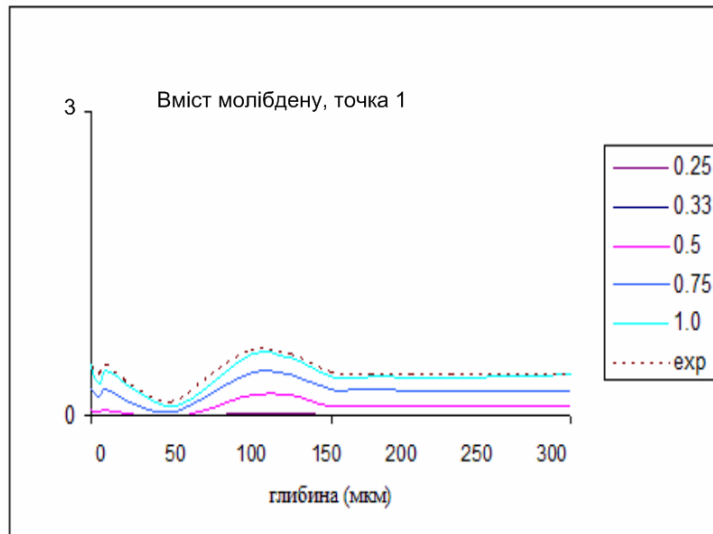


Рисунок 11. Модельні концентраційні розподіли молибдену (точка 1)

Figure 11. Modelling concentration distributions of Mo (point 1)

Як і для алюмінію, для молибдену часові тривалості формування технологічного мультишару наноплівки (20 діб) були розбиті на 5 періодів. У точці Т.1 зростання вмісту молибдену починається при експлуатації протягом понад 6 діб (0,33Т). На глибині, більшій від 150 мкм, концентрація молибдену практично стала.

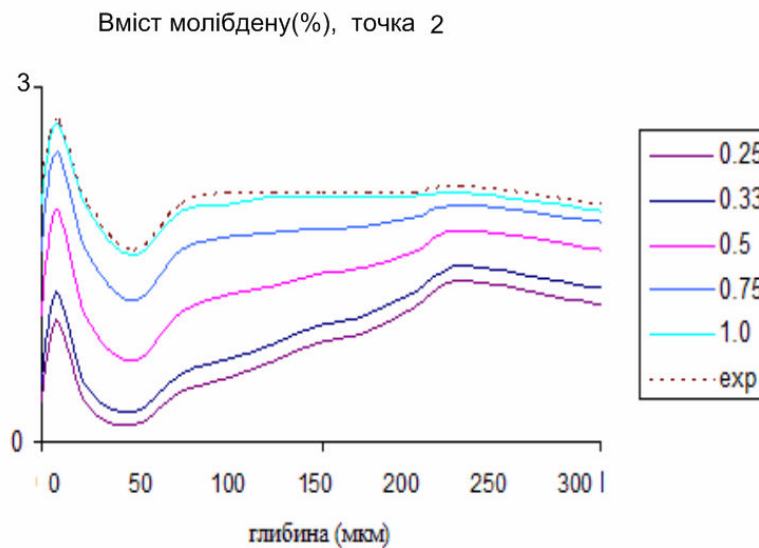
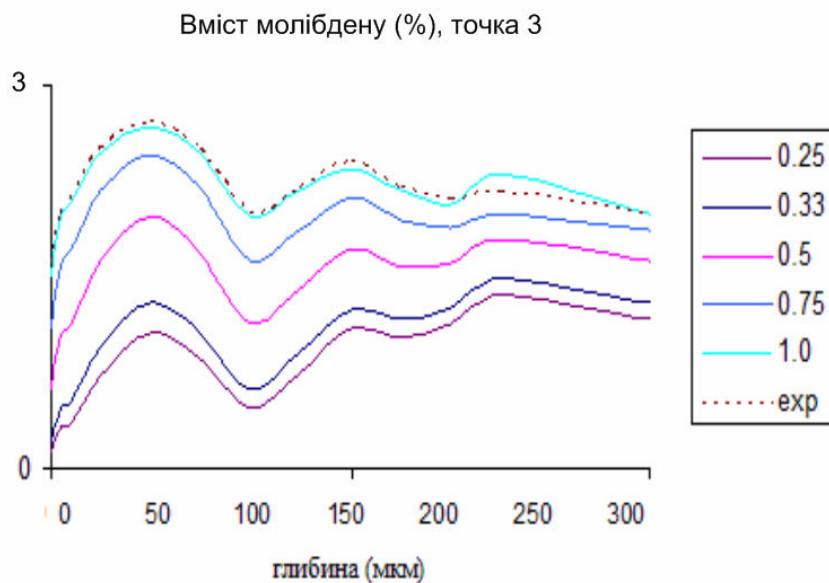


Рисунок 12. Модельні концентраційні розподіли молибдену (точка 2)

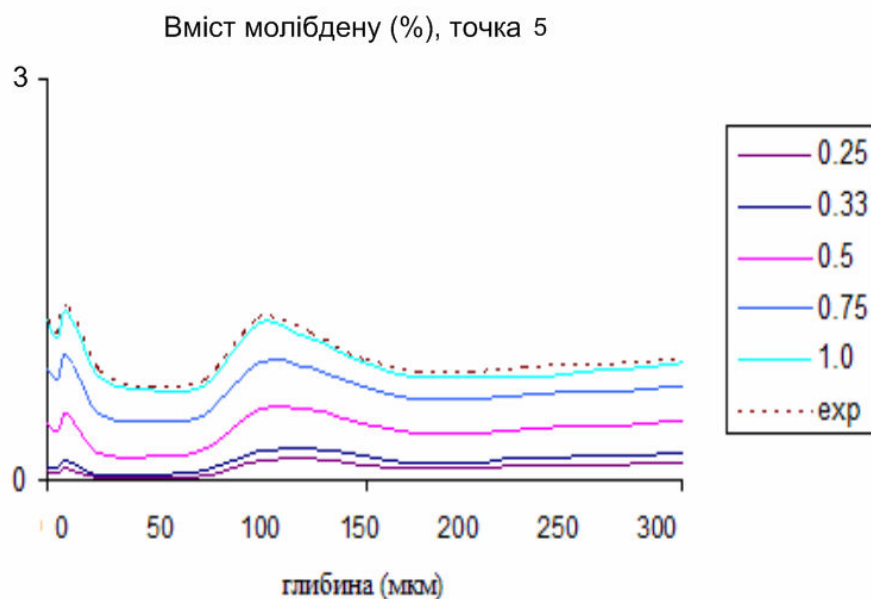
Figure 12. Modelling concentration distributions of Mo (point 2)

На рис. 1 бачимо, що для точки Т.2 найбільший приріст вмісту молибдену спостерігається при приведеному часі від 0,33Т до 1Т. Максимальне відхилення концентрації алюмінію для періоду 1Т від exp дорівнює близько 3%.



**Рисунок 13.** Модельні концентраційні розподіли молибдену (точка 3)

**Figure 13.** Modelling concentration distributions of Mo (point 3)



**Рисунок 14.** Модельні концентраційні розподіли молибдену (точка 5)

**Figure 14.** Modelling concentration distributions of Mo (point 5)

З графіка на рис. 14 бачимо, що для точки Т.5 характерним є найменший приріст вмісту молибдену при приведеному часі від 0,25Т (5діб) до 0,33Т (7 діб). Похибка модельних результатів (співвідносно з експериментальними) на глибині до 100 мкм – 1%, на глибині від 100 до 200 мкм – 1,5 – 2%, на глибині від 200 до 300 мкм – 1,5 – 3%.

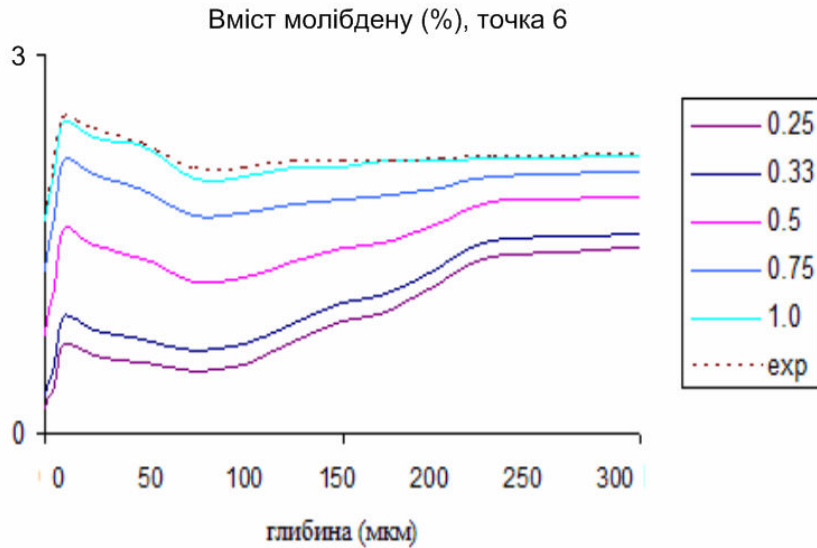
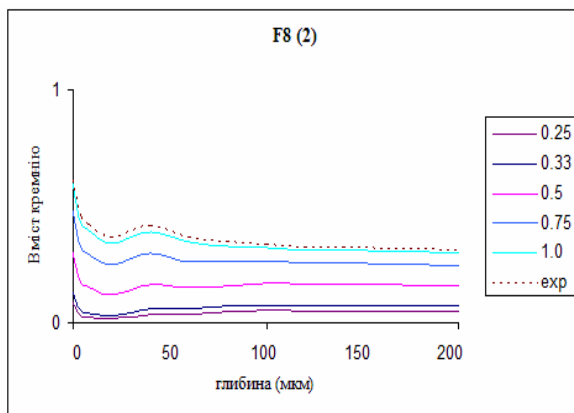


Рисунок 15. Модельні концентраційні розподіли молібдену (точка 6)

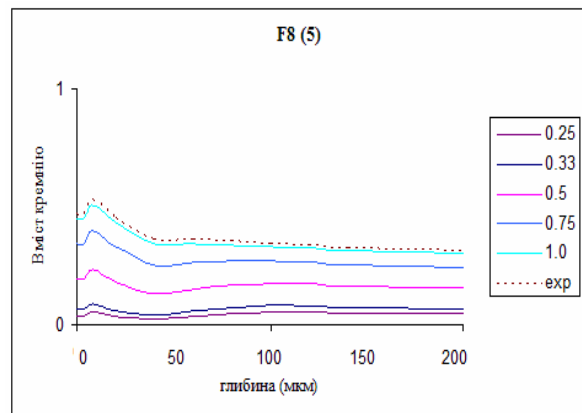
Figure 15. Modelling concentration distributions of Mo (point 6)

Як демонструють результати моделювання для точки Т.6 концентрація молібдену для кожного з експлуатаційного періоду є сталою на глибині від поверхні зразка від 230 мкм.

Аналізуючи графіки на рис. 11 – 15, можна зробити висновок, що модельні профілі узгоджуються з відповідними експериментальними профілями (відхилення в межах 2 – 3%).



T.1



T.2

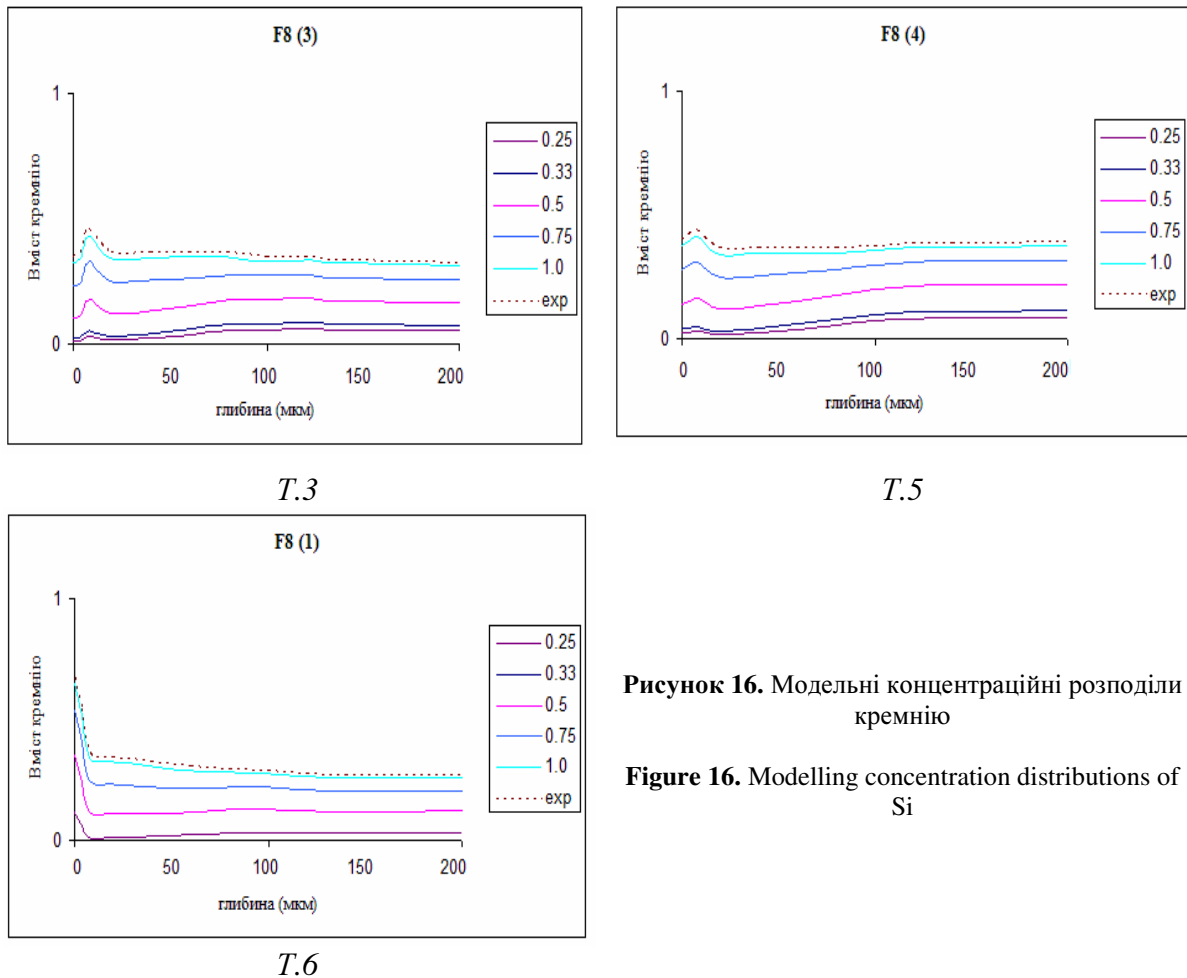


Рисунок 16. Модельні концентраційні розподіли кремнію

Figure 16. Modelling concentration distributions of Si

На рис. 16 наведено результати комп'ютерного моделювання вмісту кремнію в кожній з п'яти точок, де проводився експериментальний аналіз (exp). У точках T.1 – T.3 зростання вмісту кремнію починається при експлуатації протягом більше 6 діб (0,33T). На глибині, більшій від 100 мкм (для T.1), більшій 130 мкм (для T.2), більшій 110 мкм (для T.3), більшій 160 мкм (для T.5), більшій 130 мкм (для T.6), концентрація кремнію практично стала. Як бачимо з рис. 16, профілі, отримані шляхом моделювання концентраційних розподілів кремнію, добре узгоджуються з відповідним експериментальним профілем при наближенні тривалості формування мультишару до періоду кінцевого завершення формування захисного мультишару наноплівки. Максимальне відхилення не перевищує 2 – 3%, що дає підстави казати про достовірність математичної моделі та можливості практичного використання отриманих результатів. Результати моделювання можуть бути використані для підвищення ефективності експериментальних досліджень переносу в багатокомпонентних мультикомпозицях та дослідженні властивостей нових наноматеріалів.

**Висновки.** Побудовано математичну модель дифузійного перенесення в неоднорідних мультикомпонентних середовищах, що описує процес формування мультишарів тонких оксидних наноплівок, які використовуються як термо- і агресивнозахисні покриття робочих органів технологічного обладнання, що працюють у високоагресивних середовищах. Отримані просторово-розподілені концентраційні розподіли структурних складових компонентів наноплівок (алюмінію, молібдену, кремнію) для різних технологічних зрізів оксидної наноплівки та часових тривалостей формування технологічного мультишару наноплівки. Результати можуть бути використані для підвищення ефективності експериментальних досліджень переносу в

багатокомпонентних мультикомпозиатах та дослідженні властивостей нових наноматеріалів.

**Conclusions.** The mathematical model of diffusion transfer in heterogeneous environments that describes the process of forming thin oxide nano films multilayers which are used as termo- and aggressive-protective coverings of processing equipment operating members in highly corrosive environments has been constructed. Spatially distributed concentration distributions of nanofilm structural components (aluminium, silicium, molibden) for various technological shears of oxide nanofilm and time durations of forming the technological nanofilm multilayer have been obtained in the result of modelling.

### Список використаної літератури

1. Mehrer H. Diffusion in Solids / Mehrer H. // Springer, 2007. – P. 650.
2. Kärger J. Diffusion fundamentals / Kärger J., Grinberg F., Heitjans P. – Leipziger Univiersite. – 2005. – 615 p.
3. Petryk M. Mathematical modeling and research for diffusion processes in multilayer and nanoporous media, Fluid Transport in Nanoporous Materials. / M. Petryk, O. Shabliy, M. Leniuk, P. Vasylyuk // Springer Publishers. – 2006. – Volume 219. – P. 639 – 655.
4. Василюк, П. Високотемпературне руйнування залізохромових сплавів [Текст] / П. Василюк // Вісник ТНТУ. – 2011. – Спецвипуск. – Частина 2. – С. 173 – 177.
5. Дифузійні процеси в оксидних шарах залізохромових сплавів [Текст] / О. Шаблій, М. Петрик, П. Василюк, І. Катеринюк // Вісник ТДТУ. – 2000. – Т. 5, № 3. – С. 5 – 11.
6. Дейнека, В.С. Идентификация параметров неоднородных задач диффузии в наномультиматериалах с использованием градиентных методов [Текст] / В.С. Дейнека, М.Р. Петрик // Компьютерная математика. – 2012. – № 1. – С. 41 – 51.
7. Дейнека, В.С. Идентификация кинетических параметров массопереноса в многокомпонентных системах конкурентной диффузии в неоднородных нанопористых средах [Текст] / В.С. Дейнека, М.Р. Петрик, Ж. Фрессард // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – №5. – С. 46 – 64.
8. Дейнека, В.С. Функциональная идентификация коэффициентов внутричастичной диффузии в неоднородном слое нанопористых частиц / В.С. Дейнека, М.П. Петрик, Д.М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2012. – №2. – С. 10 – 31.
9. Дейнека, В.С. Идентификация кинетических параметров однокомпонентного адсорбционного массопереноса в микропористых каталитических средах / В.С. Дейнека, М.Р. Петрик, Д.М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2011. – №2. – С. 12 – 25.
10. Ленюк, М.П. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних і нанопористих середовищах [Текст] / М.П. Ленюк, М.Р. Петрик. – К.: Наукова думка, 2000. – 372 с.
11. Deineka V.S. Identifying kinetic parameters of mass transfer in components of multicomponent heterogeneous nanoporous media of a competitive diffusion system / V.S. Deineka, M.R. Petryk, J. Fraissard // Cybernetics and System Analysis, Springer New York. – 2011. – Vol. 47, Number 5. – P. 705 – 723.
12. Дейнека, В.С. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. – К.: Наук. думка, 2003. – 506 с.
13. Сергиенко, И.В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем [Текст] / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – Киев: Наукова думка, 2009. – 638 с.
14. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. – New York: Kluwer Academic Publishers. – 2005. – 400 p.

Отримано 17.05.2013