Г.Качурівська. Про резольвенту диференціально-граничного оператора типу Штурма-Ліувілля з багатоточково-інтегральними крайовими умовами / Г.Качурівська // Вісник ТНТУ. — 2014. — Том 73. — № 1. — С.269-275. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 513.88

Г. Качурівська, канд. фіз.-мат. наук

Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України «Бережанський агротехнічний інститут»

ПРО РЕЗОЛЬВЕНТУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА ТИПУ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ З БАГАТОТОЧКОВО-ІНТЕГРАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

***Резюме**. Застосовуючи методи функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь, встановлено умову, яка гарантує приналежність даного комплексного числа до резольвентної множини диференціально-граничного оператора типу Штурма-Ліувілля з багатоточково-інтегральними крайовими умовами та побудовано його резольвенту (іншими словами, знайдено умови, достатні для коректного розв'язання відповідного операторного рівняння та знайдено його розв'язок). Описано множину власних значень досліджуваного оператора.*

***Ключові слова:** гільбертів простір, оператор, резольвента, власне значення.*

H. Kachurivska

ON THE RESOLVENT OF THE DIFFERENTIAL-BOUNDARY OPERATOR OF THE STURM-LIOUVILLE TYPE WITH MULTIPOINT-INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS

***Summary.** The problem of construction a resolvent in the theory of perturbation is of special importance. In fact, when the relation between the resolvents of perturbed operator and non-perturbed one, as well as the spectral properties of the first are known, one can obtain some information about the properties of the batter (proper value asymptotics, completeness of the proper values system, spectrum nature, etc). In the case of additive perturbations, this relation is expressed by the Weinstein–Aronszajn type formula, whereas the Krein formula are used in the case, when both the perturbed and the non-perturbed operators are self-adjoint extensions of this symmetric operator. However, these results were obtained under assumption that both the perturbed and the non-perturbed operators have the same domain. Systematic studying of differential-boundary operators with non-classical boundary conditions gave rise to new theoretical operator models in the theory of perturbations, that change not only the operator action law, but also its domain. One of such models is the theory of related operators introduced by V.E. Lyantse who established a connection between resolvents of the related operators. The objective of this paper is to apply the abstract results previously obtained by the author to the case, when the non-perturbed operator is a differential operator acting in the Hilbert space of infinite-dimensional vector-valued functions. Using the methods of functional analysis and differential equations, the condition ensuring that a given complex number belongs to the resolvent set of the differential-boundary Sturm–Liouville type operator with multi-points integral boundary conditions have been established and its resolvent has been built. That is, conditions efficient for the corresponding operator equation solution have been established and the solution has been found. The set of proper values of the operator has been described. The obtained results are theoretical, but they can be applied while solving the operator equations and studying the spectral characteristics of the operators under consideration.*

***Key words:** Hilbert space, operator, resolvent, proper value.*

Умовні позначення:

$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень та ядро (лінійного) оператора *T*;

$B(X,Y)$ – сукупність лінійних обмежених операторів $T: X \to Y$ таких, що $D(T) = X$; $B(X) = B(X,X)$;

I_X – тотожне перетворення простору *X*;

T^* – оператор, спряжений з оператором T;

$\rho(T)$ – резольвентна множина оператора T;

$\sigma_p(T)-$ множина власних значень цього оператора;

$\oplus-$ символ ортогональної суми,

$$H_0^n \equiv \underbrace{H_0 \oplus ... \oplus H_0}_{n \text{ разів}}.$$

Постановка проблеми. Резольвента оператора – одне з найважливіших понять у функціональному аналізі. За допомогою резольвенти можна не тільки розв'язувати відповідні операторні рівняння, в тому числі рівняння математичної фізики, а й досліджувати спектральні характеристики розглядуваного оператора.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача про побудову резольвенти є надзвичайно актуальною, зокрема у теорії збурень. Вона привертає увагу багатьох дослідників. Щоправда, переважно розглядалася ситуація, коли збурений і незбурений оператори мають однакову область визначення. Однак, протягом останніх десятиліть, з'явилися праці, у яких автори відмовляються від цього припущення (див. [1], [2] та цитовану там літературу). У статті автора [3] результати, викладені в [1], [2], перенесено на більш загальну ситуацію й частково їх посилено.

Метою даної роботи є застосування абстрактних результатів, про які йде мова в [3], на ситуацію, коли незбурений оператор – це диференціальний оператор у (гільбертовому) просторі нескінченновимірних вектор-функцій.

Постановка задачі. Нехай H_0- комплексний гільбертів простір, $\forall x \in [a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ $p(x) = p(x)^* \in B(H_0)-$ додатно визначений оператор, причому функція $x \mapsto p(x)$ є сильно неперервною,

$$l[y] = -y'' + p(x)y \qquad (1)$$

(тут і далі усі похідні в (1) розуміємо у класичному сенсі), а L та L_0- відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені в гільбертовому просторі $H = L_2(H_0;(a,b))$ виразом (1) (деталі – див. [4], [5]).

Припустимо, що $a < c_1 < c_2 < b$ і визначимо оператори $L_{\min}$, $L_{\max}$ за допомогою співвідношень

$$D(L_{\min}) = \{y \in D(L_0) : y(c_i) = 0, i = 1,2\}, \quad L_{\min} \subset L_0;$$
$$D(L_{\max}) = \{y \in H : y \text{ абсолютно неперервна на } [a,b], \ y' \text{ абсолютно неперервна на}$$
$$[a, c_1 - 0] \cup [c_1 + 0, c_2 - 0] \cup [c_2 + 0, b], \ l[y] \in H\},$$
$$\forall y \in D(L_{\max}) \quad L_{\max} y = l[y].$$

Далі припустимо, що

$$\forall y \in H \quad \Phi_i y = \int_a^b \varphi_i(x)^* y(x) dx,$$

де для всякого $x \in [a,b]$ $\varphi_i(x) \in B(H_0)$, причому $\varphi_i \in L_2(H_0,(a,b))$ $(i = 1,2)$, а $\alpha_{ij} \in B(H_0^4)$ $(i, j = 1,...,4)$, такі, що операторна матриця $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^4$ оборотна в $B(H_0^4)$.

Покладемо

$$u_i(y) = \alpha_{i1} y'(a) - \alpha_{i2} y'(b) + \alpha_{i3} y(a) + \alpha_{i4} y(b) \ \ (i = 1,...,4)$$

і визначимо оператор T за допомогою співвідношень

$$D(T)=\{y\in D(L_{\max}):u_i(y)=y(c_i)+\Phi_i y, u_{i+2}(y)=y'(c_i+0)-y'(c_i-0), i=1,2\} \quad (2)$$

$$\forall y\in D(T) \quad Ty=l[y]+\varphi_1(\cdot)u_3(y)+\varphi_2(\cdot)u_4(y). \quad (3)$$

Результати дослідження. Для побудови резольвенти оператора (2)–(3) розглянемо спочатку рівняння $-Y''+p(x)Y-\lambda Y=0$ і позначимо через $\{Y_1(x,\lambda),Y_2(x,\lambda)\}$ фундаментальну систему його $B(H_0)$-значних розв'язків, які задовольняють умови

$$Y_1(a,0)=I_{H_0},\quad Y_2(a,0)=0,\quad Y_1(b,0)=0,\quad Y_2(b,0)=I_{H_0}.$$

Відомо (див. [4], [5]), що така система існує і що загальний розв'язок рівняння $l[y]=\lambda y$ має вигляд

$$y(x,\lambda)=Y_1(x,\lambda)k_1+Y_2(x,\lambda)k_2,$$

де $k_1,k_2\in H_0$, а операторна матриця

$$W(x,\lambda)=\begin{pmatrix} Y_1(x,\lambda) & Y_2(x,\lambda)\\ Y_1'(x,\lambda) & Y_2'(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

оборотна в $B(H_0\oplus H_0)$ при довільних $x\in[a,b], \lambda\in \mathbf{C}$.

Введемо позначення

$$W(x,\lambda)^{-1}=\begin{pmatrix} \tilde{Y}_{11}(x,\lambda) & \tilde{Y}_1(x,\lambda)\\ \tilde{Y}_{21}(x,\lambda) & \tilde{Y}_2(x,\lambda)\end{pmatrix},$$

$$g(x,\xi,\lambda)=\pm\frac{1}{2}\left[Y_1(x,\lambda)\tilde{Y}_1(\xi,\lambda)+Y_2(x,\lambda)\tilde{Y}_2(\xi,\lambda)\right],$$

причому знак «+» беремо при $x>\xi$, а «–» при $x<\xi$;

$$\hat{f}(x,\lambda)=\int_a^b g(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi,\quad f\in H; \quad (4)$$

$$\hat{\varphi}_i(x,\lambda)=\int_a^b g(x,\xi,\lambda)\varphi_i(\xi)d\xi,\quad i=1,2; \quad (5)$$

$$\hat{\phi}_i(x,\lambda)=\int_a^b g(x,\xi,\lambda)\phi_i(\xi)d\xi, \quad (6)$$

де

$$\phi_i(x)=\begin{cases} Y_2(x,0)\tilde{Y}_2(c_i,0), & a\le x<c_i,\\ -Y_1(x,0)\tilde{Y}_1(c_i,0), & c_i<x\le b,\end{cases}\quad i=1,2.$$

Повторюючи, як і в [6], міркування, наведені в [4] для випадку $\dim H_0 < \infty$, переконуємося, що

$$y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{2} Y_i(x,\lambda)k_i + \hat{f}(x,\lambda) \quad (f \in H, k_1, k_2 \in H_0) \tag{7}$$

– загальний розв'язок рівняння $l[y] - \lambda y = f$. Крім цього,

$$l[\hat{\varphi}_i] - \lambda\hat{\varphi}_i = \varphi_i, \quad l[\hat{\phi}_i] - \lambda\hat{\phi}_i = \phi_i, \quad i = 1,2. \tag{8}$$

Відзначимо, що кожен розв'язок рівняння $Ty - \lambda y = f$ є розв'язком рівняння

$$l[y + \phi_1 u_3(y) + \phi_2 u_4(y)] + \varphi_1 u_3(y) + \varphi_2 u_4(y) - \lambda y = f. \tag{9}$$

У свою чергу, y задовольняє рівняння (9) тоді і тільки тоді, коли існують $k_3, k_4 \in H_0$ такі, що

$$l[y - \phi_1 k_3 - \phi_2 k_4] - \varphi_1 k_3 - \varphi_2 k_4 - \lambda y = f, \tag{10}$$

$$u_3(y) = -k_3, \; u_4(y) = -k_4. \tag{11}$$

Рівняння (10) еквівалентне такому:

$$l[y - \phi_1 k_3 - \phi_2 k_4] - \lambda(y - \phi_1 k_3 - \phi_2 k_4) = f + \varphi_1 k_3 + \varphi_2 k_4 + \lambda(\phi_1 k_3 + \phi_2 k_4).$$

Враховуючи (4)–(8), бачимо, що це рівняння має розв'язок тоді і тільки тоді, коли існують $k_1, k_2 \in H_0$ такі, що

$$y(x,\lambda) = \hat{f}(x,\lambda) + Y_1(x,\lambda)k_1 + Y_2(x,\lambda)k_2 + [\phi_1(x) + \lambda\hat{\phi}_1(x,\lambda) + \hat{\varphi}_1(x,\lambda)]k_3 +$$
$$+ [\phi_2(x) + \lambda\hat{\phi}_2(x,\lambda) + \hat{\varphi}_2(x,\lambda)]k_4.$$

Іншими словами,

$$y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{4} Y_i(x,\lambda)k_i + \hat{f}(x,\lambda), \tag{12}$$

де

$$Y_{i+2}(x,\lambda) = \phi_i(x) + \lambda\hat{\phi}_i(x,\lambda) + \hat{\varphi}_i(x,\lambda), \quad i = 1,2.$$

Покладемо

$$v_i(Y) = \begin{cases} u_i(Y) - \int_a^b \varphi_i(x)^* Y(x)dx - Y(c_i), & i = 1,2, \\ u_i(Y), \quad i = 3,4 \end{cases}. \tag{13}$$

Враховуючи (11) та (13), доходимо висновку, що функція (12) є розв'язком рівняння $Ty - \lambda y = f$ тоді й тільки тоді, коли

$$v_1(y)=v_2(y)=0,\; v_3(y)+k_3=v_4(y)+k_4=0. \tag{14}$$

Підставляючи в (14) замість y праву частину рівності (12), отримуємо систему чотирьох лінійних рівнянь відносно невідомих $k_1,\ldots,k_4$

$$\Delta(\lambda)k=-v(\widehat{f}),$$

де

$$\Delta(\lambda)=\begin{pmatrix} v_1(Y_1) & v_1(Y_2) & v_1(Y_4) \\ v_2(Y_1) & v_2(Y_2) & v_2(Y_4) \\ v_3(Y_1) & v_3(Y_3)+I_{H_0} & v_3(Y_4) \\ v_4(Y_1) & v_4(Y_3) & v_4(Y_4)+I_{H_0} \end{pmatrix}, \quad k=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_4 \end{pmatrix}, \quad v(\widehat{f})=\begin{pmatrix} v_1(\widehat{f}) \\ \vdots \\ v_4(\widehat{f}) \end{pmatrix}.$$

Враховуючи (12) і тотожності

$$v_i(\widehat{f})=v_i\left(\int_a^b g(\cdot,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right)=\int_a^b v_i g(\cdot,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi, \quad i=1,\ldots,4,$$

бачимо, що має місце

Теорема: Нехай $\Delta(\lambda)^{-1}\equiv(\delta_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^4\in B(H_0^4)$.

Тоді $\lambda\in\rho(T)$ і

$$\forall f\in H \quad ((T-\lambda I_H)^{-1}f)(x)=\int_a^b G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi,$$

де

$$G(x,\xi,\lambda)=g(x,\xi,\lambda)-\sum_{i,j=1}^4 Y_i(x,\lambda)\delta_{ij}(\lambda)v_j(g(\cdot,\xi,\lambda)).$$

Наслідок: Для того, щоб комплексне число λ було власним значенням оператора T, необхідно і достатньо, щоб справджувалася умова

$$\ker\Delta(\lambda)\neq\{0\}. \tag{15}$$

Справді, $Ty=\lambda y$ тоді й тільки тоді, коли $y=\sum_{i=1}^4 Y_i(x,\lambda)k_i$,

де

$$\Delta(\lambda)k=0. \tag{16}$$

Тому, якщо $\lambda \in \sigma_p(T)$, то існують $k_1,...,k_4 \in H_0$ (не всі дорівнюють нулю) такі, що справджується (16).

Необхідність умови (15) доведено.

Достатність її випливає з того, що якщо

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i(x,\lambda)k_i = 0, \tag{17}$$

то $k_1 = ... = k_4 = 0.$ Справді, нехай справджується (17). Подіявши на обидві частини цієї рівності оператором $L_{\max} - \lambda I_H$, бачимо, що

$$\varphi_1(x)k_3 + \varphi_2(x)k_4 = 0,$$

а, отже,

$$\int_a^b g(x,\xi,\lambda)(\varphi_1(\xi)k_3 + \varphi_2(\xi)k_4)d\xi = 0.$$

Виходячи звідси і з (17), отримуємо

$$Y_1(x,\lambda)k_1 + Y_2(x,\lambda)k_2 + (\phi_1(x) + \lambda\widehat{\phi}_1(x,\lambda))k_3 + (\phi_2(x) + \lambda\widehat{\phi}_2(x,\lambda))k_4 = 0,$$

або, що еквівалентно

$$\phi_1(x)k_3 + \phi_2(x)k_4 = -(Y_1(x,\lambda)k_1 + Y_2(x,\lambda)k_2 + \lambda\widehat{\phi}_1(x,\lambda)k_3 + \lambda\widehat{\phi}_2(x,\lambda)k_4).$$

Звідси і з результатів праці [7] бачимо, що це є можливим тільки при $k_1 = ... = k_4 = 0.$ Наслідок доведено.

Висновки. Встановлено достатні умови належності деякого комплексного числа до резольвентної множини оператора типу Штурма-Ліувілля з багатоточково-інтегральними крайовими умовами. Описано множину власних значень вказаного оператора. Отримані результати мають теоретичний характер, проте можуть бути застосовані при розв'язуванні операторних рівнянь та дослідженні спектральних характеристик розглянутих операторів.

Conclusions. Sufficient conditions of a complex number relation to resolvent set operator of the Sturm-Liouville type with multipoint-integral boundary conditions are established. The set of eigenvalues of proper values of this operator is described. These results are theoretical in nature, but can be used for solving operator equations and investigation of the spectral characteristics of these operators.

Список використаної літератури

1. Лянце, В.Э. Методы теории неограниченных операторов [Текст] / В.Э. Лянце, О.Г. Сторож. – К.: Наук. думка, 1983. – 212 с.
2. Мильо, О.Я. Про один клас скінченновимірних збурень додатно визначеного оператора [Текст] / О.Я. Мильо, О.Г. Сторож // Доп. НАН України. – 1996. – № 11. – С. 39 – 44.
3. Піпа, Г.М. Про резольвенту збурення, яке змінює область визначення власного розширення додатно визначеного оператора [Текст] / Г.М. Піпа // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 1. – С. 15 – 20.
4. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы [Текст] / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

5. Рофе-Бекетов, Ф.С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций [Текст] / Ф.С. Рофе-Бекетов // Докл. АН СССР. – 1969. – 184, № 5. – С. 1034 – 1037.
6. Сторож, О.Г. Про умови розв'язності і резольвенту диференціально-граничного оператора другого порядку в просторі вектор-функцій [Текст] / О.Г. Сторож // Укр. мат. журн. – 1995. –47, № 4. – С. 517 – 524.
7. Піпа, Г.М. Про диференціально-граничний оператор типу Штурма-Ліувілля з багатоточково-інтегральними крайовими умовами у просторі нескінченновимірних вектор-функцій [Текст] / Г.М. Піпа, О.Г. Сторож // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 34 – 39.

Отримано 20.11.2013