І.Габрусєва. Контактна задача про стиснення ізотропного шару двома параболоїдальними штампами з урахуванням поля залишкових деформацій / І.Габрусєва, Б.Шелестовський // Вісник ТНТУ. — 2014. — Том 73. — № 1. — С.44-52. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

І. Габрусєва; Б. Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО СТИСНЕННЯ ІЗОТРОПНОГО ШАРУ ДВОМА ПАРАБОЛОЇДАЛЬНИМИ ШТАМПАМИ З УРАХУВАННЯМ ПОЛЯ ЗАЛИШКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ

Резюме. *Наведено розв'язання контактної задачі про стиснення попередньо напруженого ізотропного шару двома співвісними параболоїдальними штампами. Розглянуто числовий приклад та побудовано функції розподілу контактних напружень і переміщень для обох граничних площин шару. Проаналізовано вплив залишкових деформацій на розподіл контактних напружень під штампами.*

Ключові слова: *напруження, ізотропний шар, кільцевий штамп, залишкові деформації, попередні напруження.*

I. Habrusieva, B. Shelestovskiy

PRESSING BY PRESSURE OF TWO HARD PARABOLIC PUNCHES OF THE ISOTROPIC LAYER WITH THE RESIDUAL DEFORMATIONS

Summary. *Increasing reliability and durability of structures and mechanisms is one of the most actual tasks of modern construction and engineering. As it is known [2], residual deformation is almost always available in the structural elements and machine parts. The nature of their appearance can be very different: irreversible deformation (plasticity, creep), structural changes in the material, changes of the aggregate state in some areas, mechanical, chemical and technological processes, etc. Resulted stress, can cause fracture and accelerate some phase transitions, corrosion.*

Consideration of the residual strains under development of the important structural elements of machines and installations can estimate more accurately the material strength life and significantly reduce its costs, while maintaining the necessary functional characteristics of the elements in general. That is why the study of the contact interaction of the elastic bodies with residual deformations is up to date and will remain so in the future.

Research problems of the contact interaction of the preliminary stressed bodies in our country and abroad had appeared in the sufficient quantity only by the end of the last century. First of all it is due to the fact that the linear elasticity theory does not consider of residual stresses in bodies. In general, strict formulation of such problems requires the use of system of the nonlinear elasticity theory, however, for the sufficiently large values of the initial stresses its linearized version can be referred to.

Current level of linearized elasticity theory and mathematical techniques, combined with the rapid development of computer technology makes it possible to form effectively a variety of computational models in a wide range of tasks. Complete enough description and classification of works devoted to the theory of contact

interaction of the preliminary stressed bodies with rigid punches can be found in [1]. But the interaction of the complex configuration circular punches with the residual deformation elastic half-space and layer stays not studied enough.

In the article the solution of the contact problem of compression of the preliminary stressed isotropic layer with two parabolic punches using the linearized theory of elasticity was built. All calculations are performed in the location of strain y_i*, which are associated with the coordinates of the initial state relations* $y_i = \lambda_i x_i \ \ (i = 1,2,3)$*, where* λ_i *– coefficient of linear elongation element directed along the Cartesian axis* x_i*.*

Using the basic relations of the linearized elasticity theory, the problem is treated as the construction of the solution of the double integral equations with kernels involving the Bessel functions. The authors have developed a method of approximate solutions of this type. The main idea of this method is to represent the unknown distribution function of the contact stresses in the form of the Fourier series with unknown coefficients and to construct a system of the linear equations for finding them.

To demonstrate the proposed methods the numerical example of the construction of the contact stresses distribution function is presented in the paper.

Besides, the residual deformation field characteristics effect on the amount and nature of the contact stresses under punches has been analyzed.

Key words: *contact stresses, annular punch, isotropic layer, residual deformations.*

Вступ. Надзвичайно важливою задачею сучасного машинобудування є підвищення надійності та довговічності конструкцій і механізмів. Для збільшення точності таких розрахунків необхідно враховувати залишкові деформації [1], що майже завжди наявні в елементах конструкцій та деталях машин. Неврахування попередніх напружень, що присутні у елементах конструкцій, машин та споруд, не дозволяє точно оцінювати реальний напружений стан. Такі неточні розрахунки можуть призвести до руйнування зразків або ж до невиправданого збільшення витрат матеріалу на їх виготовлення. Саме тому врахування залишкових деформацій при дослідженні контактної взаємодії пружних тіл є надзвичайно важливим завданням на сьогодні та залишатиметься таким у майбутньому. Взаємодію жорстких штампів та пружних тіл із наявними залишковими деформаціями досліджували багато вітчизняних та закордонних вчених [2]. Контактні задачі для тіл із початковими напруженнями при конкретній формі пружного потенціалу розглядали Александров В.М., Філіпова Л.М., Арутюнян Н.Х., Сметаніна Б.І. та інші. Розв’язок задач кручення для пружних тіл з початковими напруженнями, а також плоских та просторових контактних задач для пружних тіл з початковими напруженнями наведено у працях Гузя О.М., Бабича С.Ю., Глухова Ю.П., Рудніцкого В.Б.

Строга постановка задач, що враховують наявність у тілах залишкових напружень, у загальному потребує застосування апарата нелінійної теорії пружності. Проте при досить великих значеннях початкових напружень можна обмежитись її лінеаризованим варіантом.

На сьогодні рівень лінеаризованої теорії пружності та математичних методів, у поєднанні з бурхливим розвитком комп’ютерної техніки, дають можливість ефективно формувати різноманітні розрахункові моделі стосовно широкого кола задач. У працях [6, 7] апарат лінеаризованої теорії пружності успішно використовується для побудови тривимірної моделі скінченого елемента та вивчення з її допомогою ефектів взаємодії волокон під час мікродеформацій у з’єднаннях, підсилених ізотропними та анізотропними волокнами.

Проте все ще недостатньо вивченим залишається питання взаємодії жорстких кільцевих та параболоїдальних штампів складної конфігурації з пружним ізотропним шаром, у якому наявні залишкові деформації.

Розглянемо осесиметричну задачу про стиснення попередньо напруженого ізотропного шару товщиною $2h$ двома співвісними жорсткими параболоїдальними штампами (рис.1).

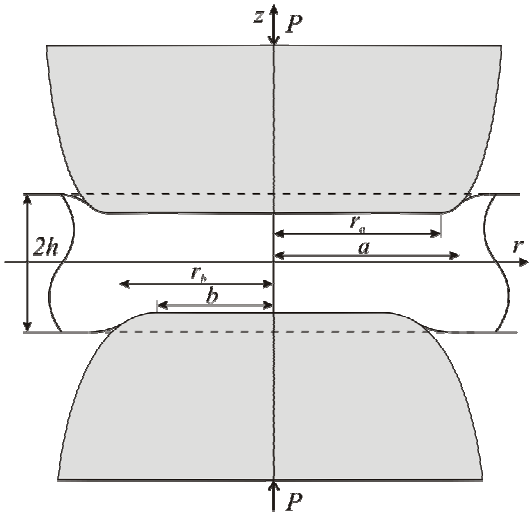

Рисунок 1. Схема контактної взаємодії.

Figure 1. Scheme of contact interaction.

Розв'язок задачі будемо проводити у рамках лінеаризованої теорії пружності з використанням термінології та позначень монографії [3]. Усі викладки проведено у координатах деформованого стану y_i, що пов'язані із лагранжовими координатами (які у початковому, недеформованому стані, співпадають з декартовими) співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, де λ_i – коефіцієнти видовження лінійного елемента, направленого вздовж декартової осі x_i. Штампи втискуються у шар поступально без обертання й тертя під дією постійної сили P. Будемо вважати, що їх дія викликає у шарі малі збурення основного однорідного напружено-деформованого стану, для якого виконуються умови $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$; $S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}$, де S_0^{ii} – складові тензора початкових напружень.

Кожен зі штампів утворено обертанням навколо спільної осі вітки параболи та відрізка прямої, яка перпендикулярна до осі параболи. Осі парабол, що обмежують штампи, паралельні до спільної осі обертання, яка співпадає з лінією дії сили P.

Виберемо циліндричну систему координат (O, r, θ, z) так, щоб координатна площина (O, r, θ) співпадала із серединною площиною шару, а вісь Oz – із віссю симетрії штампів (рис.1).

Граничні умови поставленої задачі матимуть такий вигляд:

$$\sigma_{zz}(r,h) = 0,\ a \le r; \tag{1}$$

$$\sigma_{rz}(r,h) = 0,\ 0 \le r < \infty; \tag{2}$$

$$u_z(r,h) = w_1(r),\ 0 \le r \le a; \tag{3}$$

$$\sigma_{zz}(r,-h) = 0,\ b \le r; \tag{4}$$

$$\sigma_{rz}(r,-h) = 0,\ 0 \le r < \infty; \tag{5}$$

$$u_z(r,-h) = w_2(r),\ 0 \le r \le b. \tag{6}$$

Функції $w_1(r)$ та $w_2(r)$ описують форму штампів. Виберемо їх у такому вигляді:

$$w_1(r) = \begin{cases} w_1(a) - 2R_1(a - r_a)^2,\ 0 \le r < r_a; \\ w_1(a) + 2R_1\left[(r - r_a)^2 - (a - r_a)^2\right],\ r_a \le r \le a. \end{cases} \tag{7}$$

$$w_2(r) = \begin{cases} w_2(b) + 2R_2(b - r_b)^2,\ 0 \le r < r_b; \\ w_2(b) + 2R_2\left[(b - r_b)^2 - (r - r_b)^2\right],\ r_b \le r \le b. \end{cases} \tag{8}$$

де R_1 та R_2 – радіуси кривини парабол, якими обмежено верхній та нижній штампи.

Компоненти тензора контактних напружень та вектора переміщень у осесиметричному випадку можна записати у вигляді [1]

$$\sigma_{zz}(r,z)=c_{33}\int_0^\infty \alpha^3\left\{A_1 ch(\alpha z)+A_2\left[s\cdot ch(\alpha z)+\alpha z sh(\alpha z)\right]+\right.$$
$$\left.+B_1 sh(\alpha z)+B_2\left[s\cdot sh(\alpha z)+\alpha z ch(\alpha z)\right]\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha\,;$$
$$\sigma_{rz}(r,z)=-c_{31}\int_0^\infty \alpha^3\left\{A_1 sh(\alpha z)+A_2\left[s_0\cdot sh(\alpha z)+\alpha z ch(\alpha z)\right]+\right.$$
$$\left.+B_1 ch(\alpha z)+B_2\left[s_0\cdot ch(\alpha z)+\alpha z sh(\alpha z)\right]\right\}J_1(\alpha r)\,d\alpha\,;$$
$$u_z(r,z)=m_1\int_0^\infty \alpha^2\left\{A_1 sh(\alpha z)+A_2\left[s_1\cdot sh(\alpha z)+\alpha z ch(\alpha z)\right]+\right.$$
$$\left.+B_1 ch(\alpha z)+B_2\left[s_1\cdot ch(\alpha z)+\alpha z sh(\alpha z)\right]\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha\,.$$

Коефіцієнти c_{31}, c_{33}, m_1, s, s_0 та s_1, в останніх співвідношеннях, залежать від характеру пружного потенціалу і підбираються у кожному окремому випадку, відповідно до [3]. Невідомі функції A_1, B_1, A_2, B_2 визначаються із граничних умов задачі. На верхній граничній площині шару, при $z=h$, отримаємо

$$c_{33}\int_0^\infty \alpha^3\left\{A_1 ch(\alpha h)+A_2\left[s\cdot ch(\alpha h)+\alpha h sh(\alpha h)\right]+\right.$$
$$\left.+B_1 sh(\alpha h)+B_2\left[s\cdot sh(\alpha h)+\alpha h ch(\alpha h)\right]\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha=0,\ a\le r<\infty; \tag{9}$$
$$-c_{31}\int_0^\infty \alpha^3\left\{A_1 sh(\alpha h)+A_2\left[s_0\cdot sh(\alpha h)+\alpha z ch(\alpha h)\right]+\right.$$
$$\left.+B_1 ch(\alpha h)+B_2\left[s_0\cdot ch(\alpha h)+\alpha h sh(\alpha h)\right]\right\}J_1(\alpha r)\,d\alpha=0,\ 0\le r<\infty; \tag{10}$$
$$m_1\int_0^\infty \alpha^2\left\{A_1 sh(\alpha h)+A_2\left[s_1\cdot sh(\alpha h)+\alpha h ch(\alpha h)\right]+\right.$$
$$\left.+B_1 ch(\alpha h)+B_2\left[s_1\cdot ch(\alpha h)+\alpha h sh(\alpha h)\right]\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha=w_1(r),\ 0\le r\le a. \tag{11}$$

Аналогічно на нижній граничній площині шару, при $z=-h$, матимемо

$$c_{33}\int_0^\infty \alpha^3\left\{A_1 ch(\alpha h)+A_2\left[s\cdot ch(\alpha h)+\alpha h sh(\alpha h)\right]-\right.$$
$$\left.-B_1 sh(\alpha h)-B_2\left[s\cdot sh(\alpha h)+\alpha h ch(\alpha h)\right]\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha=0,\ a\le r<\infty; \tag{12}$$
$$-c_{31}\int_0^\infty \alpha^3\left\{-A_1 sh(\alpha h)-A_2\left[s_0\cdot sh(\alpha h)+\alpha z ch(\alpha h)\right]+\right.$$
$$\left.+B_1 ch(\alpha h)+B_2\left[s_0\cdot ch(\alpha h)+\alpha h sh(\alpha h)\right]\right\}J_1(\alpha r)\,d\alpha=0,\ 0\le r<\infty; \tag{13}$$
$$m_1\int_0^\infty \alpha^2\left\{-A_1 sh(\alpha h)-A_2\left[s_1\cdot sh(\alpha h)+\alpha h ch(\alpha h)\right]+\right.$$
$$\left.+B_1 ch(\alpha h)+B_2\left[s_1\cdot ch(\alpha h)+\alpha h sh(\alpha h)\right]\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha=w_1(r),\ 0\le r\le a. \tag{14}$$

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношень (10) та (13), отримаємо вирази для A_1, B_1 через A_2, B_2

$$A_1=\frac{-1}{sh(\alpha h)}\left[s_0\cdot sh(\alpha h)+\alpha h ch(\alpha h)\right]A_2\,,$$

$$B_1 = \frac{-1}{ch(\alpha h)}\left[s_0 \cdot ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)\right] B_2 . \qquad (15)$$

Ввівши дві невідомі функції $x(r)$ та $y(r)$, задані на відрізках $[0,a]$ та $[0,b]$ відповідно, продовжимо співвідношення (9) та (12) на додатну піввісь $[0,\infty)$

$$c_{33}\int_0^\infty \alpha^3 \left\{A_1 ch(\alpha h) + A_2\left[s \cdot ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)\right] + \right.$$

$$\left. + B_1 sh(\alpha h) + B_2\left[s \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)\right]\right\} J_0(\alpha r)\, d\alpha = x(r)\eta(a-r),\ 0 \le r < \infty; \qquad (16)$$

$$c_{33}\int_0^\infty \alpha^3 \left\{A_1 ch(\alpha h) + A_2\left[s \cdot ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)\right] - \right.$$

$$\left. - B_1 sh(\alpha h) - B_2\left[s \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)\right]\right\} J_0(\alpha r)\, d\alpha = y(r)\eta(b-r),\ 0 \le r < \infty. \qquad (17)$$

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до рівнянь (16) та (17), за допомогою співвідношень (15), отримаємо систему відносно невідомих A_2, B_2. Розв'язавши її, матимемо

$$\alpha^2 A_2 = \frac{1}{2c_{33}\Delta_1(\alpha)}\left[I_1(\alpha) + I_2(\alpha)\right],\ \alpha^2 B_2 = \frac{1}{2c_{33}\Delta_2(\alpha)}\left[I_1(\alpha) - I_2(\alpha)\right], \qquad (18)$$

де

$$I_1(\alpha) = \int_0^a r x(r) J_0(r\alpha)\, dr,\ I_2(\alpha) = \int_0^b r y(r) J_0(r\alpha)\, dr,$$

$$\Delta_1(\alpha) = \frac{1}{sh(\alpha h)}\left[(s - s_0) ch(\alpha h) sh(\alpha h) - \alpha h\right],$$

$$\Delta_2(\alpha) = \frac{1}{ch(\alpha h)}\left[(s - s_0) ch(\alpha h) sh(\alpha h) + \alpha h\right].$$

Підставивши у співвідношення (11) та (14) вирази (7), (8), (15), (18), будемо мати

$$\frac{m_1(s_1 - s_0)}{2c_{33}}\int_0^\infty \left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)} + \frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right) I_1(\alpha) - \left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)} - \frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right) I_2(\alpha)\right] \times$$

$$\times\left(J_0(\alpha r) - J_0(\alpha a)\right) d\alpha = -2R_1 (a - r_a)^2 \eta(a-r) +$$

$$+ 2R_1\left[(r - r_a)^2 - (a - r_a)^2\right]\left\{\eta(r - r_a) - \eta(r - a)\right\}; \qquad (19)$$

$$\frac{m_1(s_1 - s_0)}{2c_{33}}\int_0^\infty \left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)} - \frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right) I_1(\alpha) - \left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)} + \frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right) I_2(\alpha)\right] \times$$

$$\times\left(J_0(\alpha r) - J_0(\alpha b)\right) d\alpha = 2R_2 (b - r_b)^2 \eta(b-r) +$$

$$+ 2R_2\left[(b - r_b)^2 - (r - r_b)^2\right]\left\{\eta(r - r_b) - \eta(r - b)\right\}. \qquad (20)$$

Невідомі функції $x(r)$ та $y(r)$ визначають розподіл контактних напружень під штампами. Врахувавши їх неперервність, а також рівність нулю на границі області контакту (при $r = a$ та $r = b$), представимо $x(r)$ та $y(r)$ у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є за функціями Бесселя, тобто у вигляді

$$x(r) = \sum_{n=1}^{N} a_n J_0\left(\frac{r}{a}\beta_n\right),\ y(r) = \sum_{n=1}^{N} b_n J_0\left(\frac{r}{b}\beta_n\right), \qquad (21)$$

де β_n – додатні корені рівня $J_0(x)=0$.

Підставивши співвідношення (21) у рівності (19) та (20), отримаємо

$$\frac{m_1(s_1-s_0)}{2c_{33}}\left\{\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^\infty\left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)}+\frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right)I_n^{(1)}(\alpha)\left(J_0(\alpha r)-J_0(\alpha a)\right)d\alpha-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{n=1}^{N}b_n\int_0^\infty\left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)}-\frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right)I_n^{(2)}(\alpha)\left(J_0(\alpha r)-J_0(\alpha a)\right)d\alpha\right\}=\right.$$

$$=2R_1(r-r_a)^2\eta(r-r_a)-2R_1(a-r_a)^2,\ 0\le r\le a; \tag{22}$$

$$\frac{m_1(s_1-s_0)}{2c_{33}}\left\{\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^\infty\left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)}-\frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right)I_n^{(1)}(\alpha)\left(J_0(\alpha r)-J_0(\alpha b)\right)d\alpha-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{n=1}^{N}b_n\int_0^\infty\left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)}+\frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right)I_n^{(2)}(\alpha)\left(J_0(\alpha r)-J_0(\alpha b)\right)d\alpha\right\}=\right.$$

$$=-2R_2(r-r_b)^2\eta(r-r_b)+2R_2(b-r_b)^2,\ 0\le r\le b, \tag{23}$$

$$I_n^{(1)}(\alpha)=\int_0^a rJ_0\left(\frac{r}{a}\beta_n\right)J_0(r\alpha)dr,\ I_n^{(2)}(\alpha)=\int_0^b rJ_0\left(\frac{r}{b}\beta_n\right)J_0(r\alpha)dr.$$

Помноживши співвідношення (22) та (23) на $r\cdot J_0\left(\frac{r}{a}\beta_q\right)$ та $r\cdot J_0\left(\frac{r}{b}\beta_q\right)$, $q=\overline{1,N}$ відповідно і проінтегрувавши отримані вирази по r від 0 до a та від 0 до b, отримаємо

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}a_nK_{qn}^{(11)}(\alpha)-\sum_{n=1}^{N}b_nK_{qn}^{(12)}(\alpha)=B_q^{(1)},\\&\sum_{n=1}^{N}a_nK_{qn}^{(21)}(\alpha)-\sum_{n=1}^{N}b_nK_{qn}^{(22)}(\alpha)=B_q^{(2)}.\end{aligned} \tag{24}$$

$$K_{qn}^{(11)}(\alpha)=\int_0^\infty\left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)}+\frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right)I_n^{(1)}(\alpha)\left[I_q^{(1)}(\alpha)-J_0(a\alpha)F_q^{(1)}\right]d\alpha;$$

$$K_{qn}^{(12)}(\alpha)=\int_0^\infty\left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)}-\frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right)I_n^{(2)}(\alpha)\left[I_q^{(1)}(\alpha)-J_0(a\alpha)F_q^{(1)}\right]d\alpha;$$

$$K_{qn}^{(21)}(\alpha)=\int_0^\infty\left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)}-\frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right)I_n^{(1)}(\alpha)\left[I_q^{(2)}(\alpha)-J_0(b\alpha)F_q^{(2)}\right]d\alpha;$$

$$K_{qn}^{(22)}(\alpha)=\int_0^\infty\left[\left(\frac{ch(\alpha h)}{\Delta_2(\alpha)}+\frac{sh(\alpha h)}{\Delta_1(\alpha)}\right)I_n^{(2)}(\alpha)\left[I_q^{(2)}(\alpha)-J_0(b\alpha)F_q^{(2)}\right]d\alpha;$$

$$B_q^{(1)}=\frac{4c_{33}R_1}{m_1(s_1-s_0)}\left[\int_{r_a}^{a}r(r-r_a)^2J_0\left(\frac{r}{a}\beta_q\right)dr-(a-r_a)^2\int_0^a rJ_0\left(\frac{r}{a}\beta_q\right)dr\right];$$

$$B_q^{(2)}=\frac{4c_{33}R_2}{m_1(s_1-s_0)}\left[(b-r_b)^2\int_0^b rJ_0\left(\frac{r}{b}\beta_q\right)dr-\int_{r_b}^{b}r(r-r_b)^2J_0\left(\frac{r}{b}\beta_q\right)dr\right];$$

$$F_q^{(1)} = \int_0^a rJ_0\left(\frac{r}{a}\beta_q\right)dr\,,\ F_q^{(2)} = \int_0^b rJ_0\left(\frac{r}{b}\beta_q\right)dr\,.$$

Використавши метод суперпозиції та ввівши позначення

$$a_n = \frac{4c_{33}}{m_1\left(s_1 - s_0\right)}\left[R_1 a_n^{(1)} + R_2 a_n^{(2)}\right],\ b_n = \frac{4c_{33}}{m_1\left(s_1 - s_0\right)}\left[R_1 b_n^{(1)} + R_2 b_n^{(2)}\right], \tag{25}$$

із (24) отримаємо системи відносно невідомих $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(1)}$ та $b_n^{(2)}$, $n = \overline{1, N}$.

Величини R_1 та R_2 у співвідношеннях (25) знаходимо з умов рівноваги штампів

$$2\pi\int_0^a r\sigma_{zz}\left(r, h\right)dr = P\,,\ 2\pi\int_0^b r\sigma_{zz}\left(r, -h\right)dr = P\,. \tag{26}$$

Із умов (26) та співвідношень (21), (25) отримаємо систему відносно $R^{(1)}$ та $R^{(2)}$

$$\begin{cases} R^{(1)} \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^{(1)} F_q^{(1)} + R^{(2)} \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^{(2)} F_q^{(1)} = 1, \\ R^{(1)} \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} b_n^{(1)} F_n^{(2)} + R^{(2)} \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} b_n^{(2)} F_q^{(2)} = 1, \end{cases} \tag{27}$$

$$R^{(i)} = \frac{4c_{33}}{m_1\left(s_1 - s_0\right)}\frac{2\pi}{P}\cdot R_i,\ i = 1, 2.$$

Розв'язавши систему (27), із співвідношень (21) та (25), отримаємо формули для знаходження розподілу контактних напружень під штампами

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}\left(r, h\right) &= \frac{P}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\left[R^{(1)} a_n^{(1)} + R^{(2)} a_n^{(2)}\right] J_0\left(\frac{r}{a}\beta_n\right), \\ \sigma_{zz}\left(r, -h\right) &= \frac{P}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\left[R^{(1)} b_n^{(1)} + R^{(2)} b_n^{(2)}\right] J_0\left(\frac{r}{b}\beta_n\right), \end{aligned} \tag{28}$$

а також функції, що описують вертикальні переміщення точок верхньої та нижньої площин шару:

$$u_z\left(r, h\right) = \frac{m_1\left(s_1 - s_0\right)}{2c_{33}}\frac{P}{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left(R^{(1)} a_n^{(1)} + R^{(2)} a_n^{(2)}\right)\int_0^\infty\left(\frac{ch\left(\alpha h\right)}{\Delta_2\left(\alpha\right)} + \frac{sh\left(\alpha h\right)}{\Delta_1\left(\alpha\right)}\right) I_n^{(1)}\left(\alpha\right) J_0\left(\alpha r\right) d\alpha - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{N}\left(R^{(1)} b_n^{(1)} + R^{(2)} b_n^{(2)}\right)\int_0^\infty\left(\frac{ch\left(\alpha h\right)}{\Delta_2\left(\alpha\right)} - \frac{sh\left(\alpha h\right)}{\Delta_1\left(\alpha\right)}\right) I_n^{(2)}\left(\alpha\right) J_0\left(\alpha r\right) d\alpha\right\},$$

$$u_z\left(r, -h\right) = \frac{m_1\left(s_1 - s_0\right)}{2c_{33}}\frac{P}{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left(R^{(1)} a_n^{(1)} + R^{(2)} a_n^{(2)}\right)\int_0^\infty\left(\frac{ch\left(\alpha h\right)}{\Delta_2\left(\alpha\right)} - \frac{sh\left(\alpha h\right)}{\Delta_1\left(\alpha\right)}\right) I_n^{(1)}\left(\alpha\right) J_0\left(\alpha r\right) d\alpha - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{N}\left(R^{(1)} b_n^{(1)} + R^{(2)} b_n^{(2)}\right)\int_0^\infty\left(\frac{ch\left(\alpha h\right)}{\Delta_2\left(\alpha\right)} + \frac{sh\left(\alpha h\right)}{\Delta_1\left(\alpha\right)}\right) I_n^{(2)}\left(\alpha\right) J_0\left(\alpha r\right) d\alpha\right\}.$$

За допомогою розв'язаної задачі досліджено вплив форми жорсткого штампа, а також наявності залишкових деформацій у шарі на характер розподілу контактних напружень. Числовий аналіз проведено для випадку, коли шар є стискуваним тілом із наявним пружним потенціалом гармонічного типу. Параметри штампів вибрано такими: $R^{(1)} = R^{(2)} = 5$, $r_a = 0$, $r_b = 0.3$.

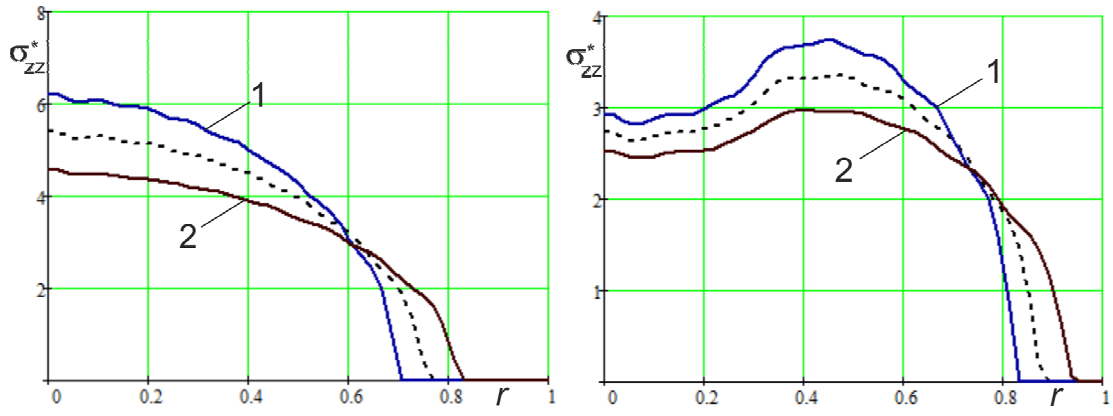

Рисунок 2. Розподіл контактних напружень під штампами.

Figure 2. Distribution of contact stresses under the punches.

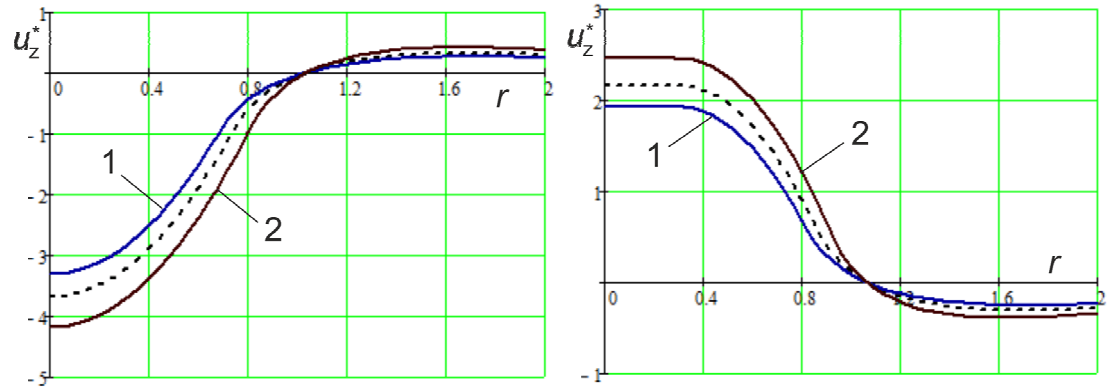

Рисунок 3. Переміщення точок граничних площин шару.

Figure 3. Moving of the boundary points of the layer.

На рис.2 зображено графіки безрозмірної функції $\sigma_{zz}^{*} = \frac{2\pi}{P}\sigma_{zz}(r)$, що описує розподіл контактних напружень під верхнім та нижнім штампами. А на рис.3 – безрозмірної функції $u_z^{*} = \frac{2\pi}{P}\frac{2c_{33}}{m_1(s_1 - s_0)}u_z(r)$, яка описує переміщення точок верхньої та нижньої граничної площин шару. Пунктирна крива на рис.2 та 3 відповідає відсутності у шарі залишкових деформацій ($\lambda_1 = 1$), крива 1 – наявності залишкових деформацій розтягу ($\lambda_1 > 1$), а крива 2 – стиску ($\lambda_1 < 1$).

Висновки. Проведений числовий аналіз дає можливість стверджувати, що поява у тілі залишкових деформацій розтягу викликає звуження ділянки контакту та збільшення абсолютного значення контактних напружень. Виникнення деформацій стиску спричиняє розширення ділянки контакту та зменшення абсолютного значення контактних напружень. Достовірність зроблених висновків підтверджує їх узгодження із результатами, отриманими іншими авторами [4, 5].

Conclusions. Numerical example of searching components of contact stresses for both contact areas is considered. Numerical analysis allows to state that the appearance of the residual tensile strain in the body causes a narrowing of the contact area and increasing of the absolute value of the contact stresses. Appearance of the compression strains causes the

broadening of contact area and reduces the absolute value of the contact stresses. Reliability of conclusions confirms their agreement with the results obtained by other authors [4, 5].

Список використаної літератури

1. Гузь, А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (окончательними) напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницкий, 2006. – 710 с.
2. Бабич, С.Ю. Контактные задачи для упругих тел. С начальними напряжениями применительно к жестким и упругим штампам [Текст] / С.Ю. Бабич, А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41–69.
3. Гузь, А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь – Киев : Наукова думка, 1983. – 296 с.
4. Гузь, О. М. Контактна взаємодія тіл з початковими (залишковими) напруженнями [Текст] / О.М. Гузь, В.Б. Рудницький // Проблеми математичного моделювання сучасних технологій: Зб. наук. пр. за матеріалами міжнар. наук.-техн. конф. – Хмельницький: ХДУ, 2004. – С. 5–35.
5. Габрусєва, І.Ю. Контактна взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим півпростором [Текст] / І.Ю. Габрусєва, Б. Г. Шелестовський // Вісник ТНТУ. – Тернопіль. – 2009. – №3.
6. Lapusta, Y. Three-dimensional FE model for fiber interaction effects during microbuckling in composites with isotropic and anisotropic fibers / Lapusta Y., Harich J., Wagner W. // Communications in numerical methods in engineering – 2008 – Volume: 24 – Issue: 12 – P. 2206–2215.
7. Harich, J. 3D FE-modeling of surface and anisotropy effects during micro-buckling in fiber composites / Harich J., Lapusta Y., Wagner W. // Composite structures – 2009 – Volume: 89 – Issue: 4 – P. 551–555.

Отримано 28.11.2013