

УДК 539.3

Г. Габрусєв, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ШАРУ З КОЛОВИМИ ЛІНІЯМИ РОЗДІЛУ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ЙОГО ПОВЕРХНІ

Резюме. Розроблено алгоритм дослідження напруженого стану, що виникає в трансверсально ізотропному шарі в результаті теплообміну за законом Ньютона між шаром та зовнішнім середовищем при наявності ліній розділу граничних умов третього роду для температури на граничних площинах шару.

Ключові слова: напруження, трансверсально ізотропний шар, тепловий контакт, теплообмін за законом Ньютона.

H. Habrusiev

THE PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR TRANSVERSAL ISOTROPIC LAYER WITH CIRCLE LINES OF THE BOUNDARY CONDITIONS DISTRIBUTION ON ITS SURFACE

Summary. In modern engineering many constructions, machine parts and device units operate under sufficient heat loads. Thermal stresses, which occur, can be of critical values and be crucial while structural designing. That is why the problems of thermoelasticity, which became of special importance in the middle of the last century [1, 2] are actual nowadays. The objective of the paper in question is the development of the method for the investigation of the stress state in the axis-symmetric problems of thermoelasticity, when the distribution lines of the boundary conditions of the 3-d order are available for the temperature on the boundary planes of the transversal isotropic layer.

To demonstrate the developed method the problem of thermoelasticity for the transversal isotropic layer, when three circle lines of the boundary conditions distributions for the temperature are available, has been solved. Plane-parallel, transversal isotropic layer of the finite thickness $2h$ has been analyzed. The boundary plane of the layer are considered to be parallel to the isotropy and free from the external loads. Heat exchange according to the Newton law takes place between the points of the layer boundary planes and external environments, three lines of the boundary conditions distribution of the 3-d order for the temperature as the concentric circles being available on the upper layer boundary plane. The temperature of the external environment, which correspond different areas of the boundary planes, are different. Heat-exchange coefficients between the layer points and external environments are different too.

To solve the problem the main equations and relations of the thermoelasticity theory for the transversal isotropic bodies obtained in the papers by W. Novatsky [3], has been used.

When the boundary conditions of the problem are provided, the system of integral equations is obtained. To solve it the unknown function as the segment of the generalized Fourier's series according to the Bessel's function is introduced. The system of linear equations relatively unknown coefficients has been obtained. The system was built so, that the more the number of its equations is, the more accurate the solution of the task is. That is, taking advantage of the developed method, the problem of thermoelasticity can be solved with the preliminary defined accuracy.

To demonstrate the developed method the numerical example has been analyzed. Expressions for the functions of temperature and stress distributions in the layer have been built. Using the obtained functions the effect of the environment temperature and conditions of contact with the layer on the temperature distribution in the layer, as well as on the value and nature of stresses inside the layer, has been analyzed.

Key words: stresses, transversal isotropic layer, thermal contact, heat exchange according to the Newton law.

Вступ. Механіка контактної взаємодії деформівного твердого тіла – важливий розділ механіки суцільних середовищ, що активно розвивається і постійно знаходиться у центрі уваги дослідників. Це пояснюється тим, що всі механізми та конструкції складаються із взаємодіючих деталей, а розподіл контактних зусиль між цими деталями заздалегідь невідомий і може бути знайдений лише в результаті розв’язання контактних задач. Визначення закону зміни контактних напружень на ділянці взаємодії дозволяє сформулювати граничні умови в напруженнях на поверхні контактуючих тіл і зайнятися розв’язанням простішої задачі – визначення напружено-деформованого стану всередині взаємодіючих тіл. Цілий ряд задач у галузі будівництва та машинобудування призводять до необхідності розв’язання задач термопружності. У процесі визначення їх розв’язку необхідно з’ясувати питання про вплив температурних полів на розподіл напружень, на розміри області контакту тощо. Багато вітчизняних, та закордонних науковців розглядали задачі термопружності [1–6]. Великий інтерес до такого типу задач пояснюється тим, що температурні напруження, які виникають у пружних тілах під впливом значних температурних градієнтів, можуть набувати критичних значень і відігравати вирішальну роль при розрахунках на міцність. У зв’язку з цим задачі термопружності, які набули особливого розвитку в середині минулого століття, не втрачають актуальності й до нині.

Метою запропонованої роботи і є розроблення алгоритму дослідження напруженого стану в задачах термопружності за наявності ліній розділу граничних умов третього роду для температури на граничних площинах трансверсально ізотропного шару.

Постановка задачі. Розглянемо плоскопаралельний, трансверсально ізотропний шар скінченної товщини $2h$. Будемо вважати, що граничні площини шару паралельні до площин ізотропії і вільні від зовнішніх навантажень. Між точками граничних площин шару і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона. При цьому на верхній граничній площині шару є три лінії розділу граничних умов третього роду у вигляді концентричних кіл. Температура зовнішнього середовища, що відповідає різним областям граничних площин, які відокремлені лініями розділу – різна. Коефіцієнти теплообміну між точками шару і зовнішнім середовищем також різні.

Зафіксуємо циліндричну систему координат (O, r, φ, z) так, щоб координатна площина $z=0$ співпадала з серединною площиною шару. Вісь OZ направимо перпендикулярно до граничних площин, рівняння яких відносно вибраної системи матимуть вигляд $z = h$ та $z = -h$ (рис.1).

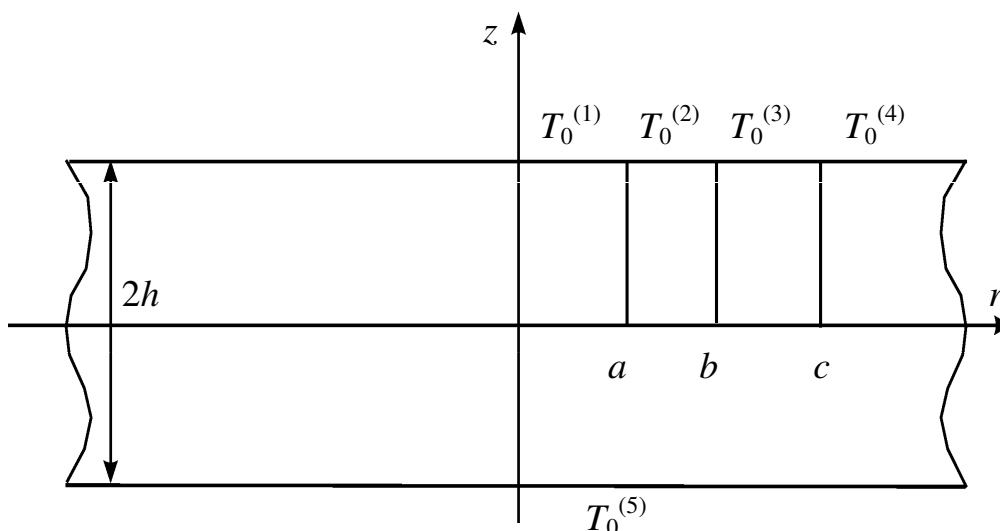


Рисунок 1. Розрахункова схема

Figure 1. Schema of the calculation

Граничні умови для температури на верхній граничній площині шару матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial z} &= -k_1(T(r, h) - T_0^{(1)}), \quad 0 \leq r < a; \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= -k_2(T(r, h) - T_0^{(2)}), \quad a \leq r < b; \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= -k_3(T(r, h) - T_0^{(3)}), \quad b \leq r < c; \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= -k_4(T(r, h) - T_0^{(4)}), \quad c \leq r < \infty.\end{aligned}\tag{1}$$

На нижній –

$$\frac{\partial T}{\partial z} = k_5(T(r, -h) - T_0^{(5)}), 0 \leq r < \infty. \quad (2)$$

Обидві граничні площини шару будемо вважати вільними від зовнішніх навантажень, тобто

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(r, \pm h) &= 0, 0 \leq r < \infty; \\ \sigma_{zz}(r, \pm h) &= 0, 0 \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $T = T(r, z)$ є функцією розподілу температури в шарі; $T_0^{(i)}$ – температура зовнішнього середовища відносно областей граничних площин, відокремлених лініями розділу граничних умов; k_i – коефіцієнти теплообміну між шаром та навколишнім середовищем.

Виходячи з граничних умов задач, потрібно визначити розподіл температури, а також напружень, що виникли у шарі за рахунок температурного градієнта. Для цього використаємо співвідношення термопружності для трансверсально ізотропного тіла, запропоновані В. Новацьким в його роботі [7]. У результаті застосування до них інтегрального перетворення Ганкеля [8], отримаємо

$$\sigma_{rz}(r, z) = \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz} \left(e^* \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_1(r\alpha) d\alpha, \quad (4)$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \left(e^* \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha,$$

$$T(r, z) = B \int_0^\infty \alpha^5 [C_5(\alpha) sh \mu_5 z \alpha + D_5(\alpha) ch \mu_5 z \alpha] J_0(r\alpha) d\alpha, \quad (5)$$

де $B = A_{33} A_{44} (\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2)$, $\bar{\psi}(\alpha, z) = \sum_{j=1,3,5} [C_j(\alpha) sh(\mu_j z \alpha) + D_j(\alpha) ch(\mu_j z \alpha)]$ – трансформанта Ганкеля термопружного потенціалу; $C_j(\alpha)$, $D_j(\alpha)$ – невідомі функції, що визначаються граничними умовами задачі; $J_0(r\alpha)$, $J_1(r\alpha)$ – функції Бесселя першого роду; E та ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона для площин ізотропії; E' та ν' – для напрямку Oz . Аналогічно α та α' – коефіцієнти лінійного температурного розширення, а λ та λ' – коефіцієнти теплопровідності.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{DE'} \left(\frac{1}{E} - \frac{\nu'^2}{E'} \right), \quad A_{13} = \frac{\nu'(1+\nu)}{EE'D}, \quad A_{33} = \frac{1-\nu^2}{DE^2}, \quad A_{44} = \frac{E'}{2(1+\nu')}, \\ \beta &= \frac{1+\nu}{EE'D} (\alpha + \nu' \alpha'), \quad \beta' = \frac{1+\nu}{ED} \left(2 \frac{\nu' \alpha}{E'} + \frac{1-\nu}{E} \alpha' \right), \quad D = \frac{1+\nu}{EE'} \left(\frac{1-\nu}{E} - \frac{2\nu'^2}{E'} \right); \\ \omega &= \frac{A_{11} A_{33} - 2A_{13} A_{44} - A_{13}^2}{2A_{44} \sqrt{A_{11} A_{33}}}, \quad \varepsilon^4 = \frac{A_{11}}{A_{33}}, \quad e^* = \frac{\beta'}{\beta} \frac{A_{13}}{A_{33}} - 1, \quad d^* = \frac{A_{13}}{A_{33}} - \mu_1^2 \mu_3^2 \frac{\beta'}{\beta} \end{aligned}$$

$$\mu_{1,3}^2 = \begin{cases} \varepsilon^2 (\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}), \omega > 1, \\ \varepsilon^2, \omega = 1, \\ \varepsilon^2 \left(\sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \pm i \sqrt{\frac{1-\omega}{2}} \right)^2, \omega < 1, \end{cases} \quad \mu_5^2 = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Температурна частина. Вимагаючи виконання граничних умов задач для температури (1) та (2), отримаємо систему інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $C_5(\alpha)$, $D_5(\alpha)$:

$$B \int_0^{\infty} \alpha^5 (C_5(\alpha) Q_1(\alpha) + D_5(\alpha) R_1(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = k_1 T_0^{(1)}, \quad 0 \leq r < a; \quad (6)$$

$$B \int_0^{\infty} \alpha^5 (C_5(\alpha) Q_2(\alpha) + D_5(\alpha) R_2(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = k_2 T_0^{(2)}, \quad a \leq r < b; \quad (7)$$

$$B \int_0^{\infty} \alpha^5 (C_5(\alpha) Q_3(\alpha) + D_5(\alpha) R_3(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = k_3 T_0^{(3)}, \quad b \leq r < c; \quad (8)$$

$$B \int_0^{\infty} \alpha^5 (C_5(\alpha) Q_4(\alpha) + D_5(\alpha) R_4(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = k_4 T_0^{(4)}, \quad c \leq r < +\infty; \quad (9)$$

$$B \int_0^{\infty} \alpha^5 (C_5(\alpha) Q_5(\alpha) - D_5(\alpha) R_5(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = -k_5 T_0^{(5)}, \quad 0 \leq r < +\infty, \quad (10)$$

де

$$Q_s(\alpha) = \mu_5 \alpha \operatorname{ch} \mu_5 h \alpha + k_s \operatorname{sh} \mu_5 h \alpha; \quad R_s(\alpha) = \mu_5 \alpha \operatorname{sh} \mu_5 h \alpha + k_s \operatorname{ch} \mu_5 h \alpha; \quad s = \overline{1, 5}.$$

Продовжимо співвідношення (9) на весь інтервал $0 \leq r < +\infty$. Для цього введемо невідому функцію $x(r)$:

$$\begin{aligned} B \int_0^{\infty} \alpha^5 [C_5(\alpha) Q_4(\alpha) + D_5(\alpha) R_4(\alpha)] J_0(r\alpha) d\alpha = \\ = k_4 T_0^{(4)} [\eta(r-c) + x(r) \eta(c-r)], \quad 0 \leq r < +\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут $\eta(x)$ – функція Гевісайда.

Виберемо $x(r)$ у вигляді відрізка ряду

$$x(r) = 1 + \sum_{n=1}^N a_n J_0\left(\frac{r}{c} \gamma_n\right), \quad 0 \leq r < c,$$

де γ_n – додатні корені рівняння $J_0(x) = 0$; a_n – невідомі коефіцієнти.

Застосовуючи до співвідношення (10) та рівняння (11) формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля, отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $C_5(\alpha)$ та $D_5(\alpha)$

$$\begin{cases} C_5(\alpha)Q_4(\alpha) + D_5(\alpha)R_4(\alpha) = \frac{k_4 T_0^{(4)}}{B\alpha^5} \left[\delta(\alpha) - \sum_{n=1}^N a_n \gamma_n J_1(\gamma_n) \frac{c^2 \alpha J_0(c\alpha)}{(c\alpha)^2 - (\gamma_n)^2} \right], \\ C_5(\alpha)Q_5(\alpha) - D_5(\alpha)R_5(\alpha) = -\frac{k_5 T_0^{(5)}}{B\alpha^5} \delta(\alpha), \end{cases}$$

$\delta(\alpha)$ – дельта функція Дірака. Розв’язавши отриману систему, знайдемо $C_5(\alpha)$ та $D_5(\alpha)$:

$$\begin{aligned} C_5(\alpha) &= \frac{R_5(\alpha) k_4 T_0^{(4)}}{\Delta_0(\alpha) B\alpha^5} \left[-\sum_{n=1}^N a_n \gamma_n J_1(\gamma_n) \frac{c^2 \alpha J_0(c\alpha)}{(c\alpha)^2 - (\gamma_n)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \delta(\alpha) \left(1 - \frac{k_5 T_0^{(5)} R_4(\alpha)}{k_4 T_0^{(4)} R_5(\alpha)} \right) \right], \\ D_5(\alpha) &= \frac{Q_5(\alpha) k_4 T_0^{(4)}}{\Delta_0(\alpha) B\alpha^5} \left[-\sum_{n=1}^N a_n \gamma_n J_1(\gamma_n) \frac{c^2 \alpha J_0(c\alpha)}{(c\alpha)^2 - (\gamma_n)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \delta(\alpha) \left(1 + \frac{k_5 T_0^{(5)} Q_4(\alpha)}{k_4 T_0^{(4)} Q_5(\alpha)} \right) \right], \end{aligned} \tag{12}$$

де $\Delta_0(\alpha) = Q_4(\alpha)R_5(\alpha) + Q_5(\alpha)R_4(\alpha)$.

Коефіцієнти a_n будемо шукати, вимагаючи виконання співвідношень (6) – (8).

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n \gamma_n J_1(\gamma_n) \int_0^\infty \alpha \Phi(\alpha, r) \frac{c^2 J_0(c\alpha) J_0(r\alpha)}{(c\alpha)^2 - (\gamma_n)^2} d\alpha &= S(\alpha, r), \quad a \leq r \leq c; \tag{13} \\ \Phi(\alpha, r) &= \frac{R_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} \{ Q_1(\alpha) \eta(a-r) + Q_2(\alpha) [\eta(r-a) - \eta(r-b)] + \\ &\quad + Q_3(\alpha) [\eta(r-b) - \eta(r-c)] \} + \frac{Q_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} \{ R_1(\alpha) \eta(a-r) + \\ &\quad + R_2(\alpha) [\eta(r-a) - \eta(r-b)] + R_3(\alpha) [\eta(r-b) - \eta(r-c)] \}, \\ S(\alpha, r) &= \frac{1}{k_4 T_0^{(4)} (2hk_4 k_5 + k_4 + k_5)} \left[k_4 k_5 (T_0^{(4)} - T_0^{(5)}) + \right. \\ &\quad + (k_5 T_0^{(5)} + k_4 T_0^{(4)} (2hk_5 + 1)) \{ k_1 \eta(a-r) + k_2 [\eta(r-a) - \eta(r-b)] + \\ &\quad + k_3 [\eta(r-b) - \eta(r-c)] \} - (2hk_4 k_5 + k_4 + k_5) \times \\ &\quad \left. \times \{ k_1 T_0^{(1)} \eta(a-r) + k_2 T_0^{(2)} [\eta(r-a) - \eta(r-b)] + k_3 T_0^{(3)} [\eta(r-b) - \eta(r-c)] \} \right]. \end{aligned}$$

Помноживши обидві частини (13) на $rJ_0(\gamma_q r)$ та проінтегрувавши отримане співвідношення по r від 0 до c , отримуємо систему відносно невідомих a_n та b_n .

$$\sum_{n=1}^N a_n \gamma_n J_1(\gamma_n) \int_0^{\infty} \alpha \Phi^*(\alpha, r) \frac{c^2 J_0(c\alpha) J_0(r\alpha)}{(c\alpha)^2 - (\gamma_n)^2} d\alpha = S^*(\alpha, r), \quad a \leq r \leq c;$$

$$\Phi^*(\alpha, r) = \left(\frac{R_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} Q_1(\alpha) + \frac{Q_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} R_1(\alpha) \right) \int_0^a r J_0(r\alpha) J_0(r\gamma_q) dr +$$

$$+ \left(\frac{R_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} Q_2(\alpha) + \frac{Q_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} R_2(\alpha) \right) \int_a^b r J_0(r\alpha) J_0(r\gamma_q) dr +$$

$$+ \left(\frac{R_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} Q_3(\alpha) + \frac{Q_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} R_3(\alpha) \right) \int_b^c r J_0(r\alpha) J_0(r\gamma_q) dr.$$

$$S^*(\alpha, r) = \frac{1}{k_4 T_0^{(4)} (2hk_4 k_5 + k_4 + k_5)} \left[k_4 k_5 (T_0^{(4)} - T_0^{(5)}) \int_0^c r J_0(\gamma_q r) dr + \right.$$

$$+ (k_5 T_0^{(5)} + k_4 T_0^{(4)} (2hk_5 + 1)) \left\{ k_1 \int_0^a r J_0(\gamma_q r) dr + k_2 \int_a^b r J_0(\gamma_q r) dr + \right.$$

$$+ k_3 \int_b^c r J_0(\gamma_q r) dr \left. \right\} - (2hk_4 k_5 + k_4 + k_5) \times$$

$$\times \left\{ k_1 T_0^{(1)} \int_0^a r J_0(\gamma_q r) dr + k_2 T_0^{(2)} \int_a^b r J_0(\gamma_q r) dr + k_3 T_0^{(3)} \int_b^c r J_0(\gamma_q r) dr \right\}.$$

За допомогою (5) та (12) отримуємо функцію розподілу температури в шарі

$$T(r, z) = -k_4 T_0^{(4)} \sum_{n=1}^N a_n \gamma_n J_1(\gamma_n) \int_0^{\infty} K(\alpha, z) \frac{c^2 \alpha J_0(c\alpha) J_0(r\alpha)}{(c\alpha)^2 - (\gamma_n)^2} d\alpha +$$

$$+ \frac{k_4 T_0^{(4)} [k_5 (h+z) + 1] + k_5 T_0^{(5)} [k_4 (h-z) + 1]}{(1+k_4 h) k_5 + (1+k_5 h) k_4};$$

$$K(\alpha, z) = \frac{R_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} sh(\mu_5 \alpha z) + \frac{Q_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} ch(\mu_5 \alpha z).$$

Силова частина. Вимагаючи виконання граничних умов (3)

$$\left(e^* \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) \Big|_{z=\pm h} = 0, \quad 0 \leq r < \infty,$$

$$\frac{d}{dz} \left(e^* \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) \Big|_{z=\pm h} = 0, \quad 0 \leq r < \infty,$$

отримаємо систему чотирьох лінійних рівнянь відносно невідомих $C_1(\alpha)$, $D_1(\alpha)$, $C_3(\alpha)$, $D_3(\alpha)$. Розв'язавши її, отримаємо

$$C_1(\alpha) = -C_5(\alpha) \frac{(e^* \mu_5^2 - d^*)}{(e^* \mu_1^2 - d^*)} \frac{f(\mu_3, \mu_5, \alpha)}{f(\mu_3, \mu_1, \alpha)}, \quad C_3(\alpha) = -C_5(\alpha) \frac{(e^* \mu_5^2 - d^*)}{(e^* \mu_3^2 - d^*)} \frac{f(\mu_5, \mu_1, \alpha)}{f(\mu_3, \mu_1, \alpha)},$$

$$D_1(\alpha) = -D_5(\alpha) \frac{(e^* \mu_5^2 - d^*)}{(e^* \mu_1^2 - d^*)} \frac{\varphi(\mu_3, \mu_5, \alpha)}{\varphi(\mu_3, \mu_1, \alpha)}, \quad D_3(\alpha) = -D_5(\alpha) \frac{(e^* \mu_5^2 - d^*)}{(e^* \mu_3^2 - d^*)} \frac{\varphi(\mu_5, \mu_1, \alpha)}{\varphi(\mu_3, \mu_1, \alpha)},$$

$$f(\mu_i, \mu_j, \alpha) = \mu_i \operatorname{ch}(\mu_i \alpha h) \operatorname{sh}(\mu_j \alpha h) - \mu_j \operatorname{ch}(\mu_j \alpha h) \operatorname{sh}(\mu_i \alpha h),$$

$$\varphi(\mu_i, \mu_j, \alpha) = \mu_i \operatorname{sh}(\mu_i \alpha h) \operatorname{ch}(\mu_j \alpha h) - \mu_j \operatorname{sh}(\mu_j \alpha h) \operatorname{ch}(\mu_i \alpha h).$$

Але тоді

$$\frac{d}{dz} \left(e^* \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) = \alpha^3 \sum_{j=1,3} \mu_j (e^* \mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) \operatorname{ch} \mu_j z \alpha + D_j(\alpha) \operatorname{sh} \mu_j z \alpha] =$$

$$= -\alpha^3 (e^* \mu_5^2 - d^*) [C_5(\alpha) F_1(\alpha, z) + D_5(\alpha) \Phi_1(\alpha, z)],$$

$$\left(e^* \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) = \alpha^2 \sum_{j=1,3} (e^* \mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) \operatorname{sh} \mu_j z \alpha + D_j(\alpha) \operatorname{ch} \mu_j z \alpha] =$$

$$= -\alpha^2 (e^* \mu_5^2 - d^*) [C_5(\alpha) F_2(\alpha, z) + D_5(\alpha) \Phi_2(\alpha, z)],$$

де

$$F_1(\alpha, z) = \operatorname{sh} \mu_5 z \alpha - \frac{f(\mu_3, \mu_5, \alpha)}{f(\mu_3, \mu_1, \alpha)} \operatorname{sh} \mu_1 z \alpha - \frac{f(\mu_5, \mu_1, \alpha)}{f(\mu_3, \mu_1, \alpha)} \operatorname{sh} \mu_3 z \alpha,$$

$$\Phi_1(\alpha, z) = \operatorname{ch} \mu_5 z \alpha - \frac{\varphi(\mu_3, \mu_5, \alpha)}{\varphi(\mu_3, \mu_1, \alpha)} \operatorname{ch} \mu_1 z \alpha - \frac{\varphi(\mu_5, \mu_1, \alpha)}{\varphi(\mu_3, \mu_1, \alpha)} \operatorname{ch} \mu_3 z \alpha,$$

$$F_2(\alpha, z) = \mu_5 \operatorname{ch} \mu_5 z \alpha - \frac{f(\mu_3, \mu_5, \alpha)}{f(\mu_3, \mu_1, \alpha)} \mu_1 \operatorname{ch} \mu_1 z \alpha - \frac{f(\mu_5, \mu_1, \alpha)}{f(\mu_3, \mu_1, \alpha)} \mu_3 \operatorname{ch} \mu_3 z \alpha,$$

$$\Phi_2(\alpha, z) = \mu_5 \operatorname{sh} \mu_5 z \alpha - \frac{\varphi(\mu_3, \mu_5, \alpha)}{\varphi(\mu_3, \mu_1, \alpha)} \mu_1 \operatorname{sh} \mu_1 z \alpha - \frac{\varphi(\mu_5, \mu_1, \alpha)}{\varphi(\mu_3, \mu_1, \alpha)} \mu_3 \operatorname{sh} \mu_3 z \alpha.$$

Використовуючи вирази (12), отримаємо формули для обчислення компонент тензора напружень:

$$\sigma_{zz}(r, z) = \frac{\beta(e^* \mu_5^2 - d^*)}{(\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2)} k_4 T_0^{(4)} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^N a_n \gamma_n J_1(\gamma_n) \int_0^\infty \left[\frac{R_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} F_1(\alpha, z) + \frac{Q_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} \Phi_1(\alpha, z) \right] \frac{c^2 \alpha J_0(c\alpha) J_0(r\alpha)}{(c\alpha)^2 - (\gamma_n)^2} d\alpha,$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = -\frac{\beta(e^* \mu_5^2 - d^*)}{(\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2)} k_4 T_0^{(4)} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^N a_n \gamma_n J_1(\gamma_n) \int_0^\infty \left[\frac{R_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} F_2(\alpha, z) + \frac{Q_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} \Phi_2(\alpha, z) \right] \frac{c^2 \alpha J_0(c\alpha) J_0(r\alpha)}{(c\alpha)^2 - (\gamma_n)^2} d\alpha.$$

Числові приклади. Проведемо дослідження впливу наявності стаціонарного температурного поля, яке діє на граничні площини шару, величину та характер розподілу напружень та температури в шарі на прикладі трансверсально ізотропного магнію. Коефіцієнти μ_i , $i=1,3$, для даного матеріалу, мають такі значення: $\mu_1 = 1.388395$, $\mu_3 = 0.705194$.

Параметри температурного поля виберемо такими:
 $a = 0.4$, $b = 0.6$, $c = 1$, $h = 1$;
 $k_1 = 1$, $k_2 = 0.01$, $k_3 = 1$, $k_4 = 5$, $k_5 = 0.01$;
 $T_1 = 0.8 \cdot T_0$, $T_2 = T_0$, $T_3 = 0.1 \cdot T_0$, $T_4 = 0.8 \cdot T_0$, $T_5 = 0.8 \cdot T_0$, $T_0 = 100$.

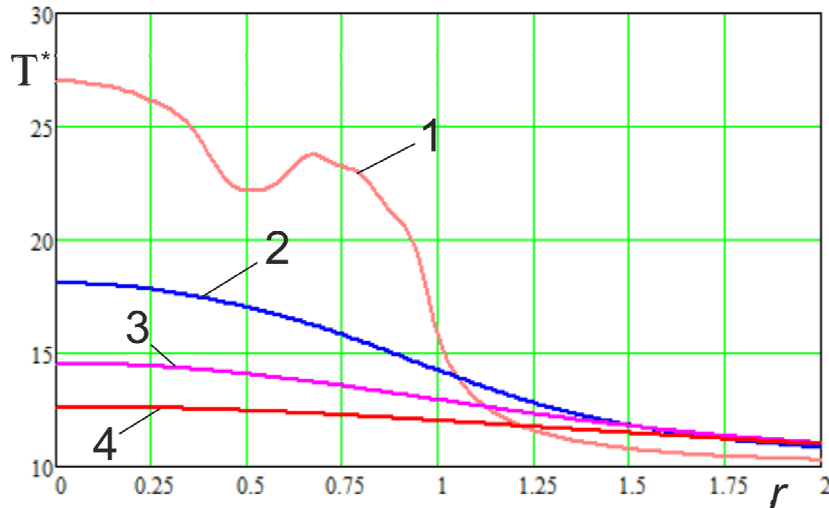


Рисунок 2. Розподіл температури в шарі

Figure 2. Temperature distribution in the layer

На рис.2 зображено розподіл температури в шарі. Криві 1 та 4 відповідають верхній та нижній граничним площинам шару, 3 – серединній площині, а 2 – площині шару при $z = \frac{1}{2}h$.

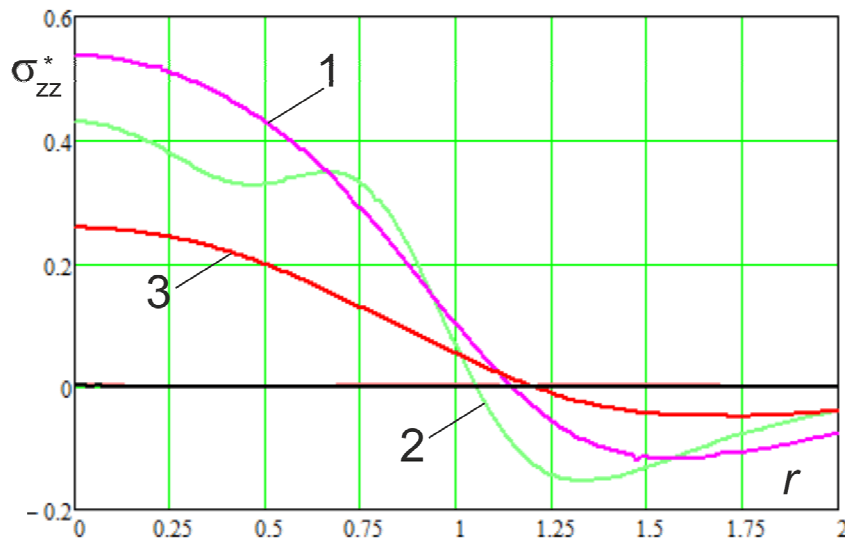


Рисунок 3. Розподіл напружень σ_{zz}^* в шарі

Figure 3. Stresses σ_{zz}^* distribution in the layer

На рис.3 зображено графік безрозмірної величини $\sigma_{zz}^* = \frac{(\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2)}{\beta(e^* \mu_5^2 - d^*)k_4 T_0^{(4)}} \sigma_{zz}(r, z)$, що ілюструє розподіл нормальних напружень

всередині шару. Крива 1 відповідає серединній площині шару, 2 та 3 – площинам шару при $z = \frac{1}{2}h$ та $z = -\frac{1}{2}h$ відповідно.

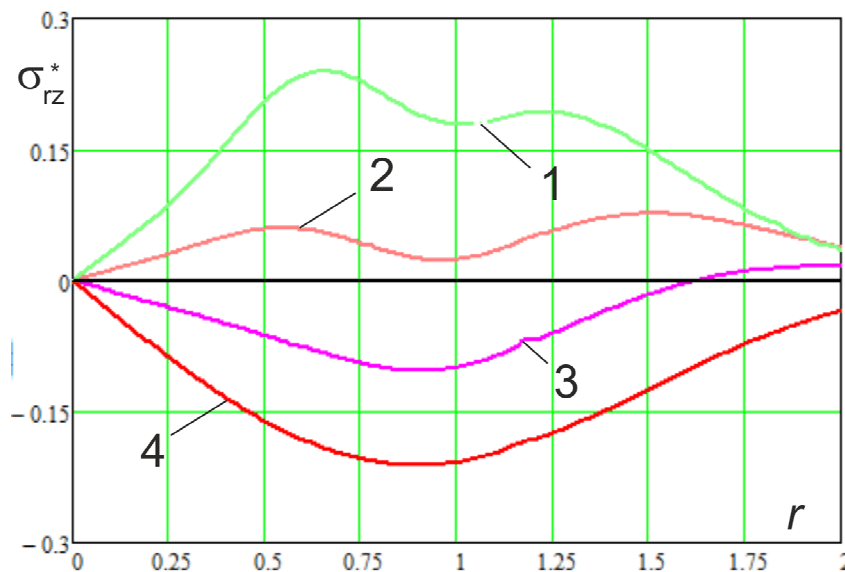


Рисунок 4. Розподіл напружень σ_{rz}^* в шарі.

Figure 4. Stresses σ_{rz}^* distribution in the layer.

На рис.4 зображено графік безрозмірної величини $\sigma_{rz}^* = \frac{(\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2)}{\beta(e^* \mu_5^2 - d^*)k_4 T_0^{(4)}} \sigma_{rz}(r, z)$, що ілюструє розподіл дотичних напружень всередині шару. Крива 3 відповідає серединній площині шару, 1, 2 та 4 – площинам шару при $z = \frac{1}{2}h$, $z = \frac{1}{4}h$ та $z = -\frac{1}{2}h$ відповідно.

Висновки. Із проведених розрахунків випливає, що як температурні коливання, так і різниця в умовах теплового контакту значно впливають на напружений стан у шарі. Тому, що температурні напруження, виникаючі при цьому, обов'язково потрібно враховувати при проведенні розрахунків на міцність. Враховуючи відносну простоту й можливість реалізації запропонованої методики на ПК, вважаємо доцільним її використання при проведенні інженерних розрахунків.

Conclusions. As it results from the carried out calculations, both the temperature vibrations and difference in the conditions of the thermal contact affect sufficiently the stress state in the layer. That is why the temperature stresses, which appear, must be taken into account while structural designing. The proposed method being relatively simple and realized on PC, it is reasonable to be used for engineering design.

Список використаної літератури

1. Боли, Б. Теория температурных напряжений [Текст] / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – Мир, 1962.
2. Грилицький, Д.В. Деякі випадки осесиметричної задачі термопружності для трасверсально ізотропного шару [Текст] / Д. В. Грилицький, В. Г. Габрусев, О. П. Піддубняк // Вісник ЛДУ, серія мех.-мат. – 1971. – № 6.
3. Кизыма, Я.М. Осесиметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости [Текст] / Я.М. Кизыма, Д.В. Грилицький. – Львов : Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 136 с.
4. Максимович, В.Н. Численно-аналитические решения задачи термопластичности для локального нагрева пологих оболочек [Текст] / В.Н. Максимович, Л.В. Хомляк // Известия АН СССР. Механика тверд. тела. – 1988. – № 5. – С. 126–132.
5. Подстригач, Я.С. Неустановившееся температурные поля и напряжения в тонких пластинках [Текст] / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К. : Наукова думка, 1972. – 308 с.

6. Sinh H., Sinh A. Thermoelastic stresses in an anisotropic slab. Proc. Indian Acad. Sci., A. 171, №4, 1970.
7. Новацкий, В. Вопросы термоупругости [Текст] / В. Новацкий. – Изд-во АН СССР, 1962. – 365 с.
8. Снеддон, И.Н. Преобразования Фурье [Текст] / И.Н. Снеддон – М.: Изд-во ИЛ, 1955. – 668с.

Отримано 28.11.2013