Хома-Могильська С. Застосування теорем існування для моделювання періодичних розв'язків загальних крайових періодичних задач для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку / С. Хома-Могильська // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2014. — Том 74. — № 2. — С. 260-266. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.954

С. Хома-Могильська, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний економічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ІСНУВАННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАГАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Резюме. *Показано практичне використання отриманих результатів (умов існування) для моделювання розв'язків загальної крайової* ($u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(\pi,t)=\mu_2(t),\quad t\in \boldsymbol{R}$) *періодичної* ($u(x,t+\omega)=u(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\boldsymbol{R}$) *задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку* $u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)$ *(для конкретних значень періоду ω). Запропоновано нову форму заміни змінних, на основі якої сформульовано теореми існування розв'язку загальних крайових періодичних задач. Розглянута методика дозволяє використовувати їх для побудови наближених розв'язків крайових періодичних задач.*

Ключові слова: *загальна крайова періодична задача, лінійне неоднорідне гіперболічне рівняння другого порядку, нова форма заміни змінних, теореми існування розв'язку.*

S. Khoma–Mohylska

APPLICATION OF THE EXISTENCE THEOREMS FOR MODELING OF PERIODIC SOLUTIONS OF GENERAL BOUNDARY-VALUE PERIODIC PROBLEMS FOR THE LINEAR NON-HOMOGENEOUS SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION

Summary. *The method finding the solution is considered to be perfect to be perfect and justified, if it allows broad application and generalization. Having considered the A. Samoilenko's numerically-analytical method of researching the periodic solutions of the ordinary differential equations and the J. Lopatinskyi's method of researching the existence conditions of the solutions of boundary-value problems for the elliptic equations, we arrive at the conclusion, that the solution is sought first, and then the boundary conditions are satisfied. This provides establish ment of the additional conditions (conditions of existence), the investigation of which specifies the shape and the type of the solution.*

Using the developed method of modeling of the solutions of boundary-value periodic problems for the linear non-homogeneous second order hyperbolic equation the conditions of solvability of general boundary-value ($u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(\pi,t)=\mu_2(t),\quad t\in R$) *periodic* ($u(x,t+\omega)=u(x,t),\ 0\le x\le\pi,\quad t\in R$) *problem for the linear non-homogeneous second order hyperbolic equation* $u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)$ *with specific values of the period ω are established in the article. New form of the variables commutation is proposed. Basing on such commutation the existence theorems of the solution of general boundary-value periodic problems are stated. The main result is the theorem on the solvability of general boundary-value periodic problem in the case* $\frac{2\pi}{\omega}$ *- an irrational number (ω - period).*

These resultss will facilitate the further studying of the properties of the solutions of general boundary-value periodic problems and the construction of the approximate periodic solutions of boundary-value problems for the quasilinear hyperbolic equations.

Theoretical and methodological basis of the research are the methods of the theory of differential equations in the partial derivatives.

Key words: *general boundary-value periodic problem, linear non-homogeneous second order hyperbolic equation, new form of variables commutation, existence solution theorems.*

Постановка проблеми. Метод відшукання розв'язку вважається досконалим і обґрунтованим, якщо він допускає широке застосування і узагальнення. Інколи автори, розробляючи методи відшукання розв'язків крайових задач, не задумуються над проблемою їх значущості для розвитку математики. Це може оцінити лише порівняльна характеристика з іншими відомими методами. Наприклад, розглядаючи чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка [1] дослідження періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і метод Я. Б. Лопатинського [2] дослідження умов існування розв'язків крайових задач для еліптичних рівнянь, доходимо такого висновку: спочатку шукається розв'язок, а потім задовольняються крайові умови. Це передбачає встановлення додаткових умов (умов існування), дослідження яких визначає форму і вид розв'язку [3]. Наприклад, у чисельно-аналітичному методі А. М. Самойленка для систем $x' = f(x,t)$, у випадку відшукання періодичних розв'язків, такою умовою є дослідження рівняння

$$\Delta(x_0) = 0\,,$$

тобто відшукання розв'язків так званої Δ-постійної, які породжують періодичні розв'язки у вигляді

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau, x_0))d\tau.$$

Користуючись даною ідеєю, ми у роботі [3] запропонували метод моделювання розв'язків крайових періодичних задач для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку. У даній роботі проведемо практичне використання отриманих результатів (умов існування) для моделювання розв'язків загальної крайової ($u(0,t) = \mu_1(t),\quad u(\pi,t) = \mu_2(t),\quad t \in R$) періодичної ($u(x,t+\omega) = u(x,t),\quad 0 \le x \le \pi,\quad t \in R$) задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$ при конкретних значеннях періоду ω.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Досліджуючи крайові періодичні задачі для гіперболічних рівнянь другого порядку ряд учених [4–6] використовують метод, згідно з яким розв'язок шукається у вигляді тригонометричного ряду $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin kx$, що автоматично забезпечує виконання крайових умов $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, проте вимагає накладання додаткових умов на праву частину неоднорідного рівняння. Це спонукало до розвитку аналітичних методів [3, 7], згідно з якими розв'язок виражається за допомогою простої модифікації формули Даламбера, що дозволяє уникати виразів, у яких потрібно сумувати нескінчені ряди, а також відсутні умови на значення функцій, що стоять у правій частині рівняння в граничних точках інтервалу [0, π].

Метою роботи є встановлення та дослідження умов, при яких існують класичні розв'язки загальної крайової ω-періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)\,,\quad 0 < x < \pi,\qquad t \in R\,, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t),\quad u(\pi,t) = \mu_2(t),\qquad t \in R\,, \tag{2}$$

$$u(x, t+\omega) = u(x,t),\quad 0 \le x \le \pi,\quad t \in R\,. \tag{3}$$

при конкретних значеннях ω.

Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Дослідження задачі та обґрунтування отриманих результатів.

Введемо позначення:

C_π – простір функцій двох змінних *x* і *t*, неперервних і обмежених на множині $[0,\pi]\times R$;

$C_\pi^{k,l}$ – простір таких функцій $u\in C_\pi$, що $D_t^k D_x^l u\in C_\pi$;

$G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних *x* і *t*, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times R$ разом з похідною по *t*;

Q_ω – простір функцій $\mu(t)$, які задовольняють співвідношення $\mu(t+\omega)=\mu(t)$;

$A_1=\{f : f(x,t)=f(\pi-x,t)=f(x,t+\pi)\}$;

$A_2=\{f : f(x,t)=f(\pi-x,t+\pi)=f(x,t+2\pi)\}$.

Для дослідження задачі (1)–(3) скористаємося доведеним нами у роботі [3, с.918] твердженням.

Теорема 1. *Якщо* $g\in G_{\pi t}\cap A_2$, *то функція*

$$v(x,t)=-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{\pi-x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau+\frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau\equiv$$

$$\equiv(Sg)(x,t)+\frac{\pi-x}{4\pi}v_1(t)+\frac{x}{4\pi}v_2(t) \qquad (4)$$

є єдиним класичним $\left(v\in C_\pi^{2,2}\right)$ *розв'язком крайової* 2π*-періодичної задачі*

$$v_{tt}-v_{xx}=g(x,t),\qquad 0<x<\pi,\qquad t\in R, \qquad (5)$$

$$v(0,t)=0,\quad v(\pi,t)=0,\quad t\in R, \qquad (6)$$

$$v(x,t+2\pi)=v(x,t),\qquad 0\le x\le\pi,\quad t\in R. \qquad (7)$$

Справедливим є твердження.

Лема 1. *Якщо* $g\in C_\pi\cap A_1$, *то* $v_1(t)=v_2(t)=const$.

Доведення. Справді, при $g\in C_\pi\cap A_1$ маємо

$$v_2(t)=\int_0^\pi d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau=\int_0^\pi d\xi\int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\pi-\eta,\tau)d\tau=\int_0^\pi d\xi\int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\eta,\tau)d\tau\equiv v_1(t).$$

$$v_1'(t)=\int_0^\pi g(\xi,\tau+\xi)d\xi-\int_0^\pi g(\xi,t-\xi)d\xi=\int_0^\pi g(\pi-\eta,t+\pi-\eta)d\eta-\int_0^\pi g(\xi,t-\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^\pi g(\eta,t-\eta)d\eta-\int_0^\pi g(\xi,t-\xi)d\xi\equiv 0,\qquad t\in R.$$

Отже, $v_1(t)=const$, $v_1(t)=v_2(t)$, $t\in R$, що й потрібно було довести.

Теорема 2. *Якщо* $g\in G_{\pi t}\cap A_1$, *то функція*

$$z(x,t) = (Sg)(x,t) + \frac{1}{4}v_1(t) \tag{8}$$

є єдиним класичним $\left(z \in C_\pi^{2,2} \cap A_1\right)$ *розв'язком крайової π-періодичної задачі*

$$z_{tt} - z_{xx} = g(x,t), \qquad 0 < x < \pi, \qquad t \in R, \tag{9}$$

$$z(0,t) = 0, \quad z(\pi,t) = 0, \quad t \in R, \tag{10}$$

$$z(x, t+\pi) = z(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in R. \tag{11}$$

Зведення загальної крайової задачі (1), (2) до відповідної крайової задачі (5), (6) з нульовими крайовими умовами $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$ проводиться здебільшого з допомогою відомої [8, с.103] класичної заміни функції

$$u(x,t) = v(x,t) + \mu_1(t) + \frac{x}{\pi}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right) \equiv v(x,t) + U(x,t), \tag{12}$$

де $v(x, t)$ – нова шукана функція, а $U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\pi}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)$.

При такій заміні (12) функція $g(x, t)$ визначається за формулою

$$g(x,t) = f(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{\pi}\left(\mu_2''(t) - \mu_1''(t)\right). \tag{13}$$

Через наявність аргументу x у формулі (13) нова функція $g(x, t)$ не буде належати ні A_1, ні A_2. Тому вивчати питання про існування π, 2π –періодичних розв'язків задачі (1)–(3) на основі формул (4), (8) неможливо.

Розв'язання задачі (1)–(3) дозволяє дослідити нова заміна функцій

$$u(x,t) = v(x,t) + U_1(x,t), \tag{14}$$

де

$$U_1(x,t) = \frac{\pi - x}{\pi}\mu_1(t) + \frac{x}{\pi}\mu_2(t). \tag{15}$$

Якщо застосувати заміну (14), то шукана функція $v(x, t)$ повинна задовольняти рівняння $v_{tt} - v_{xx} = g(x,t)$, де

$$g(x,t) = f(x,t) - \frac{\pi - x}{\pi}\mu_1''(t) - \frac{x}{\pi}\mu_2''(t). \tag{16}$$

Лема 2. *Якщо* $f \in C_\pi \cap A_1$ *і* $\mu_1(t) \in Q_\pi$, $\mu_2(t) \in Q_\pi$, $\mu_1''(t) = \mu_2''(t)$, *то функція* $g(x, t)$*, визначена згідно з формулою (16), також належить* A_1.

Доведення. Справді, якщо виконуються умови леми 2, то $g(x, t+\pi) = g(x, t)$ і $g(\pi - x,t) = f(\pi - x,t) - \frac{x}{\pi}\mu_1''(t) - \frac{\pi - x}{\pi}\mu_2''(t) = g(x,t)$, що й треба було довести.

Теорема 3. *Якщо* $f \in G_\pi \cap A_1$, $\mu_1(t) \in Q_\pi \cap C^3$, $\mu_2(t) \in Q_\pi \cap C^3$, $\mu_1''(t) = \mu_2''(t)$, *то функція* $u(x,t) = z(x,t) + U_1(x,t)$, *де* $z(x, t)$ *визначена формулою (8), а* $U_1(x, t)$ *визначена формулою (16), є єдиним розв'язком крайової періодичної задачі (1)–(3) при*

$\omega=\pi$.

Аналогічний результат можна сформулювати й у просторі A_2.

Основна теорема. Використовуючи методику відшукання розв'язків, яка викладена в роботі [3], можна стверджувати, що розв'язок

$$u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t)\equiv$$
$$\equiv Ax+B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k x+A_k^2\sin\nu_k x\right)\cos\nu_k t+ \tag{17}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3\cos\nu_k x+A_k^4\sin\nu_k x\right)\sin\nu_k t+\tilde{u}(x,t),$$

де $\nu_k=\dfrac{2\pi k}{\omega}$, $A,\ B,\ A_k^i,\ i=1,2,3,4,\ k\in N,$ – довільні сталі, $\tilde{u}(x,t)$ – частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (1), такий, що $\tilde{u}(x,t+\omega)=\tilde{u}(x,t),$ буде єдиним формальним розв'язком крайової періодичної задачі (1)–(3), якщо при врахуванні крайових умов $u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(\pi,t)=\mu_2(t),$ система

$$B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k t+A_k^3\sin\nu_k t\right)+\tilde{u}(0,t)=\mu_1(t),$$
$$A\pi+B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k\pi+A_k^2\sin\nu_k\pi\right)\cos\nu_k t+ \tag{18}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3\cos\nu_k\pi+A_k^4\sin\nu_k\pi\right)\sin\nu_k t+\tilde{u}(\pi,t)=\mu_2(t)$$

відносно невідомих коефіцієнтів $A,\ B,\ A_k^i,\ i=1,2,3,4,\ k\in N,$ має єдиний розв'язок.

Нехай $\nu_k=\dfrac{2\pi k}{\omega}\notin Q,\ \ k\in N,$ тобто, $\omega\neq\dfrac{2\pi p}{q},\ \ p,q\in N.$

Припустимо, що ω-періодичні функції $\tilde{u}(0,t)-\mu_1(t)$ і $\tilde{u}(\pi,t)-\mu_2(t)$ розгортаються у такі рівномірно збіжні ряди Фур'є:

$$\tilde{u}(0,t)-\mu_1(t)=\frac{a_0^0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^0\cos\nu_k t+b_k^0\sin\nu_k t\right); \tag{19}$$
$$\tilde{u}(\pi,t)-\mu_2(t)=\frac{a_0^\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^\pi\cos\nu_k t+b_k^\pi\sin\nu_k t\right), \tag{20}$$

де $a_k^0,\ a_k^\pi,\ b_k^0,\ b_k^\pi$ – відомі коефіцієнти Фур'є, які визначаються за формулами

$$a_k^0=\frac{2}{\omega}\int_{-\omega/2}^{\omega/2}\left(\tilde{u}(0,t)-\mu_1(t)\right)\cos\frac{2k\pi}{\omega}t\,dt,\quad k=0,1,2,3,\ldots;$$
$$b_k^0=\frac{2}{\omega}\int_{-\omega/2}^{\omega/2}\left(\tilde{u}(0,t)-\mu_1(t)\right)\sin\frac{2k\pi}{\omega}t\,dt,\quad k=1,2,3,\ldots;$$

$$a_k^{\pi} = \frac{2}{\omega}\int_{-\omega/2}^{\omega/2}\left(\tilde{u}(\pi,t)-\mu_2(t)\right)\cos\frac{2k\pi}{\omega}t\,dt, \quad k = 0,1,2,3,\dots;$$

$$b_k^{\pi} = \frac{2}{\omega}\int_{-\omega/2}^{\omega/2}\left(\tilde{u}(\pi,t)-\mu_1(t)\right)\sin\frac{2k\pi}{\omega}t\,dt, \quad k = 1,2,3,\dots$$

Основна теорема. *Нехай функції* $\left(\tilde{u}(0,t)-\mu_1(t)\right)$ і $\left(\tilde{u}(\pi,t)-\mu_2(t)\right)$ *розгортаються у рівномірно збіжні ряди Фур'є (19) і (20). Якщо* $\nu_k = \dfrac{2\pi k}{\omega}$ *не є раціональним числом, тобто* $\nu_k \notin Q,\ \ k \in N,$ *то система (18) має єдиний розв'язок, а, отже, крайова періодична задача (1)–(3) має єдиний формальний розв'язок.*

Доведення. Справді, при виконанні умов основної теореми, підставляючи ряди (19) і (20) у систему (18), отримуємо, що

$$B = -\frac{a_0^0}{2};\quad A_k^1 = -a_k^0;\quad A_k^3 = -b_k^0;\ k = 1,2,3,\dots;$$

$$A\pi + B = -\frac{a_0^{\pi}}{2};\quad A_k^1\cos\nu_k\pi + A_k^2\sin\nu_k\pi = -a_k^{\pi}, \tag{21}$$

$$A_k^3\cos\nu_k\pi + A_k^4\sin\nu_k\pi = -b_k^{\pi},\quad k = 1,2,3,\dots$$

Оскільки $\nu_k \notin Q,$ то $\sin\nu_k\pi \neq 0.$ Отже, згідно з рівностями (21), коефіцієнти $A,\ B,\ A_k^i,\ i = 1,2,3,4,\ k \in N,$ визначаються однозначно, що й потрібно було довести.

Зауваження. Наші дослідження направлені на детальніше вивчення умов існування єдиного розв'язку крайової періодичної задачі (1)–(3) і можемо стверджувати, що для розглянутого випадку $\dfrac{2\pi k}{\omega} \notin Q$ ми вперше отримали формулу для відшукання єдиного формального розв'язку цієї задачі у вигляді

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t) \equiv$$

$$\equiv Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k x + A_k^2\sin\nu_k x\right)\cos\nu_k t + \tag{22}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3\cos\nu_k x + A_k^4\sin\nu_k x\right)\sin\nu_k t + \left(Sg\right)(x,t),$$

де функція $\left(Sg\right)(x,t)$ визначається з формули (4), а коефіцієнти A_k, B – за формулами (21).

Висновки. Показано застосування умов розв'язання крайової ω-періодичної задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку. Для дослідження загальних крайових періодичних задач запропоновано новий запис заміни змінних. На основі такої заміни сформульовано теореми існування класичного розв'язку загальних крайових періодичних задач. Основним результатом є теорема про розв'язаня загальної крайової періодичної задачі у випадку $\dfrac{2\pi k}{\omega}$ – ірраціональне число (ω-період).

Отримані результати сприятимуть подальшому вивченню властивостей розв’язків загальних крайових періодичних задач, а також побудові наближених періодичних розв’язків крайових задач для квазілінійних гіперболічних рівнянь.

Conclusions. This article demonstrates the use of the solubility conditions of boundary-value ω–periodic problem for the linear non-homogeneous second order hyperbolic equations. To study the general boundary-value periodic problem the new form of commutation of the variables is proposed. Basing on such commutation the existence theorems of the solution of general boundary-value periodic problems are formulated. The main result is the theorem on the solvability of general boundary-value periodic problem in the case $\frac{2\pi k}{\omega}$ – an irrational number (ω – period).

These results will facilitate the further studying of the properties of the solutions of general boundary-value periodic problems and the construction of the approximate periodic solutions of boundary-value problems for the quasilinear hyperbolic equations.

Список використаної літератури

1. Самойленко, А.М. Численно-аналитические методы исследования периодических решений [Текст] / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – К.: Вища школа, 1976. – 180 с.
2. Лопатинский, Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям [Текст] / Я.Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – 5, № 2. – С.123–151.
3. Митропольський, Ю.О. Умови існування розв’язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку [Текст] / Ю.О. Митропольський, С.Г. Хома-Могильська // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 7. – С.912–921.
4. Пташник, Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными [Текст] / Б.И. Пташник. – К.: Наукова думка, 1984. – 264 с.
5. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними [Текст] / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.
6. Rabinowitz, P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations [Text] / P. Rabinowitz // Comm. Pure Appl. Math. – 1967. – 20, №1. – P.145–205.
7. Вейвода, О. Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений [Текст] / О. Вейвода, М. Штедри // Дифференциальные уравнения. – 1984. – XX, № 10. – С.1733–1739.
8. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

Отримано 19.02.2014