

УДК 539.3

**А. Шевельова, канд. фіз.-мат. наук;  
В. Лобода, докт. фіз.-мат. наук**

*Дніпропетровський національний університет імені О.Гончара*

## **ТРИЩИНА З ЧАСТКОВО ЗАВАНТАЖЕНИМИ БЕРЕГАМИ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ**

***Резюме.** Розглянуто тріщину між двома п'єзоелектричними півплощинами, береги якої завантажені нормальними та дотичними напруженнями, що забезпечують розкриття тріщини. Вважається, що ці напруження рівномірно розподілені по відрізках, що примикають до вершин тріщини. Використовуючи представлення шуканих факторів через комплексні потенціали, проблема зведена до задачі лінійного спряження, розв'язок якої представлений у вигляді інтегралів типу Коші. Основна увага приділена знаходженню нормального та дотичного стрибків переміщень. Отримано замкнені представлення цих факторів через гіпергеометричні функції. Крім того, використовуючи малість біматеріального параметра, отримано наближені асимптотичні формули. На конкретних прикладах шляхом порівняння результатів розрахунків показано, що вказані наближені формули для стрибків переміщень мають високу точність як для п'єзоелектричних, так і для ізотропних матеріалів.*

***Ключові слова:** тріщина між двома матеріалами, задача Рімана, стрибки переміщень.*

**A. Sheveleva, V. Loboda**

## **A CRACK WITH PARTIALLY LOADED FACES BETWEEN TWO PIEZOELECTRIC MATERIALS**

***Summary.** A crack between two piezoelectric half-plane loaded by normal and shear stresses is considered. It is assumed that the stresses are uniformly distributed over the segments adjacent to the crack tips. Using the representation of the unknown factors through the complex potentials, the problem is reduced to the problem of linear relationship with respect to the function analytic in the whole plane except the crack region. The solution of this problem is presented in the form of Cauchy type integrals and the stresses and the derivatives of the displacement jumps are presented in the form of such integrals. Further, the main attention is paid to the determination of the normal and tangent jumps of displacements over the crack region. Applying the Sokhotski–Plemelj theorem and performing the integration the closed presentation of these factors through the hypergeometric functions are obtained. These formulas are complicated and in many cases they are inconvenient for numerical analysis. However the obtained solution depends on the bimaterial parameter, which is very small for most of piezoelectric material combinations. Therefore in addition, the approximate asymptotic formula is obtained using the smallness of the mentioned parameter. Similar analysis has been performed for a crack between two isotropic materials as well and exact and approximate formulas for the normal and shear displacement jumps and their derivatives are presented in this case as well. The numerical analysis has been performed for the typical piezoelectric materials PZT-4 and PZT-5 and the normal and shear crack openings calculated by exact and approximate formulas are presented graphically. Similar figures for a crack in the isotropic bimaterial are presented as well. In all considered cases the comparing of the calculation results show that the approximate formulas for jumps of displacements have high accuracy for both piezoelectric and for isotropic materials. It means that that these approximate formulas can be used for the analysis of interface cracks with pre-fracture zones.*

***Key words:** crack between the two materials, the Riemann problem, displacement jumps.*

**Вступ.** Проблема тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами є виключно важливою для практики, тому вона привертає значну увагу дослідників. Для випадку дії віддаленого навантаження або рівномірного внутрішнього тиску ця проблема вивчалася в [1,2] для електрично-ізольованої та електрично-проникної моделей тріщини відповідно. В той же час для випадку, коли береги тріщини завантажені лише частково, проблема стає набагато складнішою і вона до цих пір розглядалась лише наближено в роботі [3] при розвитку моделі [4,5] на випадок

тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами. Стосовно тріщини між двома ізотропними матеріалами близька по суті проблема вивчалась у роботах [6,7].

В даній статті будується точний аналітичний розв'язок задачі для тріщини між двома різними п'єзоелектричними матеріалами, частково завантаженої по її берегах. Пропонується та оцінюється також наближений розв'язок, який є набагато простішим і водночас має досить високий ступінь точності.

**Метою роботи** є знаходження та аналіз розкриття тріщини, оскільки цей фактор є найскладнішим для аналізу й найважливішим з позицій можливості застосування деформаційного критерію [4,5].

**Постановка задачі.** Розглянемо плоску задачу для електрично-проникної тріщини довжини  $2b$ , розташованої на границі поділу  $|x_1| \leq b, x_3 = 0$  двох п'єзоелектричних півплощин з різних матеріалів (рис.1), поляризованих по напрямку осі  $x_3$ .

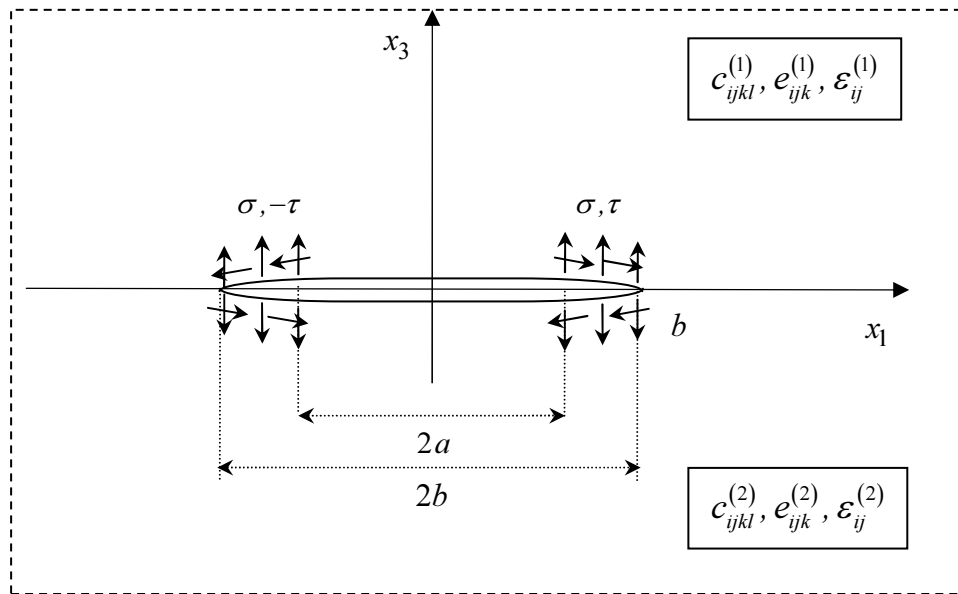


Рисунок 1. Тріщина з частково завантаженими берегами між двома п'єзоелектричними матеріалами

Figure 1. A crack with partially loaded faces between two piezoelectric materials

Нехай у кінцевих областях тріщини ( $a \leq |x_1| \leq b, x_3 = 0$ ) розміру  $b - a$ , що примикають до вершин тріщини, діють постійні нормальні  $\sigma$  і дотичні  $\tau$  напруження на берегах тріщини. Тоді граничні умови задачі мають вигляд

$$\sigma_{33}^{(m)}(x_1, 0) = \begin{cases} -\sigma, & a \leq |x_1| \leq b, \\ 0, & |x_1| < a, \end{cases} \quad (1)$$

$$\sigma_{13}^{(m)}(x_1, 0) = \begin{cases} \tau, & a \leq x_1 \leq b, \\ 0, & |x_1| < a, \\ -\tau, & -b \leq x_1 \leq -a, \end{cases} \quad (2)$$

$$[u_1(x_1)] = 0, [u_3(x_1)] = 0,$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{33}^{(2)}(x_1, 0), \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{13}^{(2)}(x_1, 0), b < |x_1| < +\infty, \quad (3)$$

$$[\varphi(x_1)] = 0, [D_3(x_1)] = 0, -\infty < |x_1| < +\infty \quad (4)$$

де  $[u_j(x)] = u_j^{(1)}(x, 0) - u_j^{(2)}(x, 0)$  – стрибки переміщень,  $j = 1, 2$ .

**Загальний розв’язок основних рівнянь.** Система рівнянь для лінійного п’єзоелектричного матеріалу у відсутності об’ємних сил і вільних зарядів можуть бути представлені у вигляді [1]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{kij}E_k, \quad (5)$$

$$D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \varepsilon_{ik}E_k, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij,i} = 0, D_{i,i} = 0, \quad (7)$$

$$\gamma_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), E_i = -\varphi_{,i}, \quad (8)$$

де  $u_k, \varphi, \sigma_{ij}, \gamma_{ij}$  і  $D_i$  – переміщення, електричний потенціал, напруження, деформації та електричне зміщення відповідно;  $c_{ijkl}, e_{ij}$  і  $\varepsilon_{ij}$  – модулі пружності, п’єзоелектричні та діелектричні сталі відповідно. Індекси в (5)–(8) змінюються у межах від 1 до 3 та мається на увазі підсумовування за індексами, що повторюються.

У роботі [8] аналогічно до розв’язку [2] були отримані такі подання для п’єзоелектричної біматеріальної площини:

$$[\mathbf{V}'(x_1, 0)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (9)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (10)$$

де

$$[\mathbf{V}'(x_1, 0)] = \mathbf{V}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{V}'^{(2)}(x_1, 0), \quad (11)$$

$\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)}(\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1}\mathbf{B}^{(1)}$ ,  $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$ ,  $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0)$ ;  $\mathbf{A}^{(m)}$ ,  $\mathbf{B}^{(m)}$  – відомі матриці [2] для верхньої ( $m = 1$ ) і нижньої ( $m = 2$ ) півплощин відповідно;  $\mathbf{V} = [u_1, u_2, u_3, \varphi]^T$  і  $\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3]^T$ .

Варто відзначити, що невідома вектор-функція  $\mathbf{W}(z) = \{W_1(z), W_2(z), W_3(z), W_4(z)\}^T$  є аналітичною функцією в усій площині, включаючи склеєні частини інтерфейсу матеріалів ( $z = x_1 + ix_3$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ).

Для прийнятого виду поляризації матриця  $\mathbf{G}$  має таку структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ig_{11} & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & ig_{22} & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & 0 & ig_{43} & ig_{44} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

де всі  $g_{ij}$  є дійсними і  $g_{31} = -g_{13}$ ,  $g_{41} = -g_{14}$ ,  $g_{43} = g_{34}$ .

Аналіз матриці (12) показує, що напружено-деформівний стан може бути знайдений окремо для плоскої і для антиплоскої задач. Оскільки антиплоска задача є

відносно простою, основна увага буде приділена плоскій задачі, яка характеризується переміщеннями  $u_1, u_3$  і електричним потенціалом  $\varphi$ . При розгляді цієї задачі другий рядок та стовпець матриці  $\mathbf{G}$  не враховуються.

Використовуючи подання (10), враховуючи, що  $[\varphi] = 0$  для  $-\infty < x_1 < \infty$ , і виконуючи аналіз, подібний до [8], приходимо до наступних рівнянь

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = t_j [F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1)] + \sigma_0, \quad (13)$$

$$[u_1'(x_1, 0)] + is_j [u_3'(x_1, 0)] = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (14)$$

де

$$F_j(z) = W_1(z) + is_j W_3(z), \quad j = 1, 2, \quad (15)$$

$$s_j = \frac{g_{33} + m_j g_{13}}{g_{31} - m_j g_{11}}, \quad \gamma_j = -(g_{31} + m_j g_{11}) / t_j, \quad (16)$$

$$t_j = g_{31} - m_j g_{11}, \quad m_{1,2} = \mp \sqrt{-\frac{g_{31} g_{33}}{g_{11} g_{13}}}, \quad (17)$$

$$\sigma_0 = -g_{34} \Delta_1^{-1} (g_{43} \sigma - g_{33} d), \quad \Delta_1 = g_{33} g_{44} - g_{43} g_{34}.$$

З рівнянь (16), (17) випливає, що  $s_{1,2} = -m_{1,2}$ ,  $\gamma_1 = 1/\gamma_2$  і значення  $m_{1,2}$  для цього типу поляризації є дійсними. Слід також відзначити, що функції  $F_j(z)$  є аналітичними у всій площині, включаючи склеєні частини інтерфейсу.

Використовуючи співвідношення (7) і структуру матриці  $\mathbf{G}$ , електричний потік для будь-якої точки інтерфейсу можна знайти як

$$D_3^{(1)}(x_1, 0) = g_{33}^{-1} \{ g_{43} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - (g_{31} g_{43} - g_{41} g_{33}) [u_1'(x_1, 0)] - g_{43} \sigma + g_{33} d \}. \quad (18)$$

Із введенням нових функцій

$$\Phi_j(z) = F_j(z) + \Phi_j^0, \quad \Phi_j^0 = \frac{\sigma_0}{t_j(1 + \gamma_j)}, \quad (j = 1, 2), \quad (19)$$

які мають такі ж властивості як і  $F_j(z)$ , рівняння (13), (14) набувають вигляду

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = t_j [\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1)], \quad (20)$$

$$[u_1'(x_1, 0)] + is_j [u_3'(x_1, 0)] = \Phi_j^+(x_1) - \Phi_j^-(x_1). \quad (21)$$

**Розв'язання поставленої задачі.** З граничних умов (1), (2) на берегах тріщини з використанням (20) отримуємо задачу Рімана

$$\Phi_1^+(x_1) + \gamma_1 \Phi_1^-(x_1) = \frac{p(x_1)}{t_1}, \quad |x_1| \leq b, \quad (22)$$

де

$$p(x_1) = \begin{cases} -\sigma + im_1\tau, & -b \leq x_1 \leq -a, \\ 0, & |x_1| < a, \\ -\sigma - im_1\tau, & a \leq x_1 \leq b. \end{cases} \quad (23)$$

На основі [9] розв'язок задачі (22) – (23) має вигляд

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i t_1} \int_{-b}^b \frac{p(t) dt}{(t-z)X^+(z)}. \quad (24)$$

де  $X(z) = (z+b)^{-0,5+i\beta} (z-b)^{-0,5-i\beta}$ ,  $\beta = \ln \frac{\gamma_1}{2\pi}$ .

Так як згідно з (22)

$$\Phi_1^-(x_1) = -\frac{1}{\gamma_1} \Phi_1^+(x_1) + \frac{p(x_1)}{\gamma_1 t_1},$$

то

$$\Phi_1^+(x_1) - \Phi_1^-(x_1) = \frac{1+\gamma_1}{\gamma_1} \Phi_1^+(x_1) - \frac{p(x_1)}{\gamma_1 t_1}.$$

Стрибки похідної від переміщень запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} [u_1'(x_1, 0)] + i s_1 [u_3'(x_1, 0)] &= -\frac{p(x_1)}{\gamma_1 t_1} - \\ & - \frac{1+\gamma_1}{\gamma_1 t_1} \frac{X^+(x_1)}{2\pi i} \left\{ (\sigma - im_1\tau) \int_{-b}^{-a} \frac{dt}{(t-(x_1+i0))X^+(t)} + (\sigma + im_1\tau) \int_a^b \frac{dt}{(t-(x_1+i0))X^+(t)} \right\}. \end{aligned}$$

З урахуванням формули Сохоцького-Племеля, маємо

$$\begin{aligned} [u_1'(x_1, 0)] + i s_1 [u_3'(x_1, 0)] &= \frac{1+\gamma_1}{2\pi \gamma_1 t_1} \frac{i e^{-i\alpha(x_1)}}{\sqrt{b^2-x_1^2}} \left\{ (\sigma - im_1\tau) \int_{-b}^{-a} \frac{\sqrt{b^2-t^2} e^{-i\alpha(t)} dt}{t-x_1} + \right. \\ & \left. + (\sigma + im_1\tau) \int_a^b \frac{\sqrt{b^2-t^2} e^{-i\alpha(t)} dt}{t-x_1} \right\} + \frac{1-\gamma_1}{2\gamma_1 t_1} \begin{cases} \sigma - im_1\tau, & -b \leq x_1 \leq -a, \\ 0, & |x_1| < a, \\ \sigma + im_1\tau, & b \leq x_1 \leq a, \end{cases} \quad (25) \end{aligned}$$

де  $\alpha(x) = \beta \ln \frac{b-x}{b+x}$ .

Після обчислення інтегралів в (25) отримуємо

$$[u'_1(x_1, 0)] + i s_1 [u'_3(x_1, 0)] = -\frac{i(1+\gamma_1)}{2\gamma_1 t_1} \tilde{X}(x) ((\sigma - im_1 \tau) J_1(x) - (\sigma + im_1 \tau) J_2(x)), \quad (26)$$

де

$$J_1(x) = \begin{cases} R\left(x, \frac{1+c}{1-c}, \beta\right) - \frac{2i\beta-x}{ch(\pi\beta)}, & c < x < 1, \\ R\left(-x, \frac{1-c}{1+c}, -\beta\right), & 0 < x < c, \end{cases} \quad J_2(x) = R\left(x, \frac{1-c}{1+c}, \beta\right), \quad (27)$$

$$R(x, y, \beta) = \frac{2y^{0.5-i\beta}}{\pi(1-2i\beta)} \left\{ \frac{1}{1+y} \left[ (1-2i\beta) + (2i\beta-x) {}_2F_1\left(1, 1; 1.5-i\beta; \frac{y}{1+y}\right) \right] - \right. \\ \left. - (1-x) {}_2F_1\left(1, 0.5-i\beta; 1.5-i\beta; \frac{1-x}{1+x} y\right) \right\}, \quad \tilde{X}(x) = (b-x)^{-0.5-i\beta} (b+x)^{-0.5+i\beta},$$

$x = \frac{x_1}{b}$ ,  $c = \frac{a}{b}$ ,  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  – гіпергеометрична функція Гаусса комплексної змінної  $z$ .

Знайдемо компоненти вектора розкриття берегів тріщини за формулою

$$[u_1(x, 0)] + i s_1 [u_3(x, 0)] = \int_{-1}^x ([u'_1(x, 0)] + i s_1 [u'_3(x, 0)]) dx. \quad (28)$$

Тоді для  $c \leq x \leq 1$  маємо

$$[u_1(x, 0)] + i s_1 [u_3(x, 0)] = \\ = \frac{i(1+\gamma_1)}{2\gamma_1 t_1 ch(\pi\beta)} (1-x^2) \tilde{X}(x) ((\sigma - im_1 \tau) I_1(x) + (\sigma + im_1 \tau) I_2(x)), \quad (29)$$

а для  $0 \leq x \leq c$

$$[u_1(x, 0)] + i s_1 [u_3(x, 0)] = \\ = \frac{i(1+\gamma_1)(1-x^2) \tilde{X}(x)}{2\gamma_1 t_1 ch(\pi\beta)} \left( (\sigma + im_1 \tau) S\left(-x, \frac{1-c}{1+c}, -\beta\right) + (\sigma - im_1 \tau) S\left(x, \frac{1-c}{1+c}, \beta\right) \right), \quad (30)$$

де

$$I_1(x) = 1 - S\left(x, \frac{1+c}{1-c}, \beta\right), \quad I_2(x) = S\left(x, \frac{1-c}{1+c}, \beta\right), \\ S(x, y, \beta) = \frac{2ch(\pi\beta)y^{0.5-i\beta}}{\pi(1-2i\beta)(1+y)} \left[ F\left(1, 1; 1.5-i\beta; \frac{y}{1+y}\right) - \right. \\ \left. - F\left(1, 1; 1.5-i\beta; \frac{(1-x)y}{(1-x)y - (1+x)}\right) \right]. \quad (31)$$

Вирази для переміщень для  $x < 0$  випливають з (29), (30) з умов симетрії.

Розподіл напружень на продовженні тріщини ( $x > 1$ ) на основі формул (20), (24) має вигляд

$$\sigma_{13}(x) + im_1\sigma_{33}(x) = ich(\pi\beta)X(x) \left[ (\sigma - im_1\tau)R\left(-x, \frac{1-c}{1+c}, -\beta\right) - (\sigma + im_1\tau)R\left(x, \frac{1-c}{1+c}, \beta\right) \right]. \quad (32)$$

**Наближений підхід до знаходження переміщень.** Отримані формули для розкриття тріщини через гіпергеометричні функції є досить складними. Водночас для більшості комбінацій матеріалів, зокрема практично для всіх п'єзоелектричних матеріалів, величина  $\beta$  є досить малою. Використовуючи цю обставину, розглянемо наближений метод обчислення інтегралів, які входять у формулу (25). Ці інтеграли мають вигляд

$$J_1(x_1) = \int_{-b}^{-c} \frac{\sqrt{b^2-t^2}}{t-x_1} e^{ia(t)} dt, \quad J_2(x_1) = \int_c^b \frac{\sqrt{b^2-t^2}}{t-x_1} e^{ia(t)} dt. \quad (33)$$

Якщо в цих формулах покласти  $\beta = 0$ , то отримаємо інтеграли  $\tilde{J}_1(x_1)$  та  $\tilde{J}_2(x_1)$ , які обчислюються аналітично у вигляді формул

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(x_1) &= \int_{-b}^{-a} \frac{\sqrt{b^2-t^2}}{t-x_1} dt = \sqrt{b^2-a^2} - x_1 \cdot \arccos\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{\sqrt{b^2-x_1^2}}{2} \Gamma(x_1, -a, b), \\ \tilde{J}_2(x_1) &= \int_a^b \frac{\sqrt{b^2-t^2}}{t-x_1} dt = -\sqrt{b^2-a^2} - x_1 \cdot \arccos\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{\sqrt{b^2-x_1^2}}{2} \Gamma(x_1, a, b), \end{aligned} \quad (34)$$

де  $\Gamma(x_1, t, b) = \ln \frac{b^2 - tx_1 + \sqrt{(b^2 - x_1^2)(b^2 - t^2)}}{b^2 - tx_1 - \sqrt{(b^2 - x_1^2)(b^2 - t^2)}}$ .

При знаходженні стрибків похідної від переміщень у множнику  $e^{-ia(x)}$  формули (25) також візьмемо  $\beta = 0$ , а в останньому доданку цієї формули –  $\gamma_1 = 1$ . Тоді наближену формулу для стрибків похідної від переміщень запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & [u'_1(x_1, 0)] + is_j [u'_3(x_1, 0)] = \\ & = \frac{1 + \gamma_1}{2\pi \gamma_1 t_1} \frac{i}{\sqrt{b^2 - x_1^2}} \{ (\sigma - im_1\tau) \tilde{J}_1(x_1) + (\sigma + im_1\tau) \tilde{J}_2(x_1) \}. \end{aligned} \quad (35)$$

Виконавши інтегрування за формулою (28), маємо такі вирази для стрибків переміщень:

$$[u_1(x_1, 0)] + is_j [u_3(x_1, 0)] = \frac{1 + \gamma_1}{2\pi \gamma_1 t_1} \frac{i}{\sqrt{b^2 - x_1^2}} \{ (\sigma - im_1\tau) L_1(x_1) + (\sigma + im_1\tau) L_2(x_1) \}, \quad (36)$$

де

$$L_1(x_1) = \int_{-b}^{x_1} \frac{\tilde{J}_1(x_1)}{\sqrt{b^2 - x_1^2}} dx_1 = \sqrt{b^2 - x_1^2} \arccos\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{x_1 + a}{2} \Gamma(x_1, -a, b),$$

$$L_2(x_1) = \int_{-b}^{x_1} \frac{\tilde{J}_2(x_1)}{\sqrt{b^2 - x_1^2}} dx_1 = \sqrt{b^2 - x_1^2} \arccos\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{x_1 - a}{2} \Gamma(x_1, a, b). \quad (37)$$

**Випадок ізотропних матеріалів.** Якщо верхня та нижня півплощини є різними ізотропними матеріалами з механічними характеристиками  $\mu_1, \kappa_1$  та  $\mu_2, \kappa_2$ , то формулюючи задачу лінійного спряження, аналогічну до (22) і будуючи її розв'язок, отримуємо формули (26), (29), (30) у вигляді

$$[u'_1(x_1, 0)] + i[u'_3(x_1, 0)] = \frac{-i(1 + \gamma_1)}{2\gamma_1 g} \tilde{X}(x) \left( (\sigma + i\tau) J_1(x) - (\sigma - i\tau) J_2(x) \right), \quad (38)$$

для  $c \leq x \leq 1$ :  $[u_1(x, 0)] + i[u_3(x, 0)] =$

$$= \frac{i(1 + \gamma_1)(1 - x^2) \tilde{X}(x)}{2\gamma_1 g \operatorname{ch}(\pi\beta)} \left( (\sigma + i\tau) I_1(x) + (\sigma - i\tau) I_2(x) \right), \quad (39)$$

для  $0 \leq x \leq c$ :  $[u_1(x, 0)] + i[u_3(x, 0)] =$

$$= \frac{i(1 + \gamma_1)(1 - x^2) \tilde{X}(x)}{2\gamma_1 g \operatorname{ch}(\pi\beta)} \left( (\sigma - i\tau) S\left(-x, \frac{1-c}{1+c}, -\beta\right) + (\sigma + i\tau) S\left(x, \frac{1-c}{1+c}, \beta\right) \right), \quad (40)$$

де  $g = \frac{2\mu_1\mu_2}{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}$ ,  $\gamma = \frac{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2}$ .

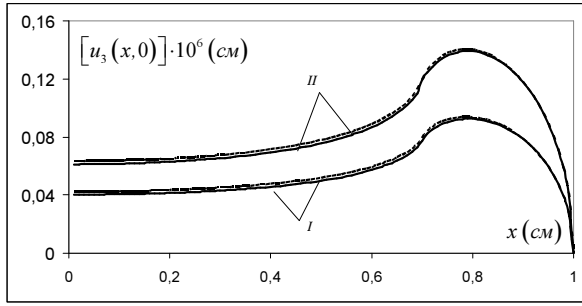
Наближена ж формула (36) набуває у цьому випадку вигляду

$$[u_1(x_1, 0)] + i[u_3(x_1, 0)] = \frac{1 + \gamma_1}{2\pi\gamma_1 g} \frac{i}{\sqrt{b^2 - x_1^2}} \left\{ (\sigma + i\tau) L_1(x_1) + (\sigma - i\tau) L_2(x_1) \right\}. \quad (41)$$

**Чисельні результати.** Були проведені обчислення та порівняння стрибків переміщень, знайдені за формулами (29)–(30) та (36). Чисельне дослідження проводилося для біматеріалу, складеного з п'єзоелектричних матеріалів PZT4 (верхній матеріал) та PZT5 (нижній). Фізичні характеристики цих матеріалів наведені в [1]. За формулами (16), (17), (24) були обчислені параметри  $s_1 = 0,91795$ ,  $t_1 = 2,71757 \cdot 10^{10}$ ,  $\gamma_1 = 0,883773$ ,  $\beta = -0,0196644$ .

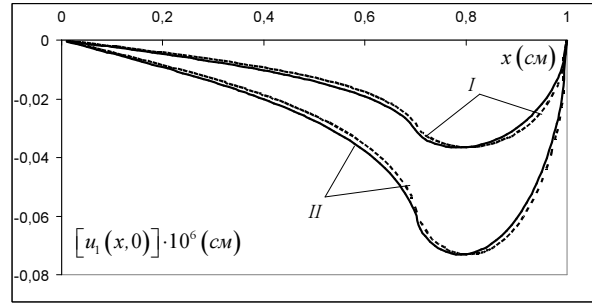
На рис.1,2 представлені графіки стрибків нормального та дотичного переміщень на відрізку  $[0, b]$  для  $b = 1$  см та різних значень нормального і дотичного напружень на берегах тріщини  $\sigma$  і  $\tau$ . Суцільні лінії відповідають точним розв'язкам, а пунктирні – наближеним. Графіки побудовані при  $c = 0,7$  см та  $\sigma = 10^3$  Па,  $\tau = 10^3$  Па (криві I),  $\sigma = 1,5 \cdot 10^3$  Па,  $\tau = 10^3$  Па (криві II).





**Рисунок 1.** Стрибки нормального переміщення для тріщини у п'єзоелектричному біматеріалі

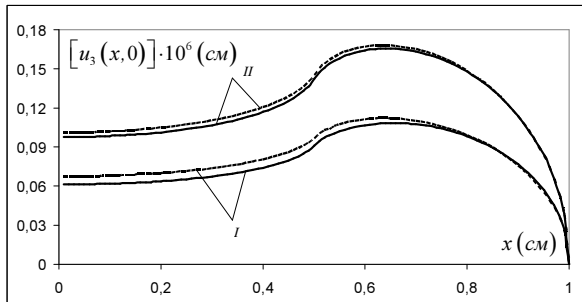
**Figure 1.** Jumps of the normal displacement for an interface crack in a piezoelectric bimaterial



**Рисунок 2.** Стрибки дотичного переміщення для тріщини у п'єзоелектричному біматеріалі

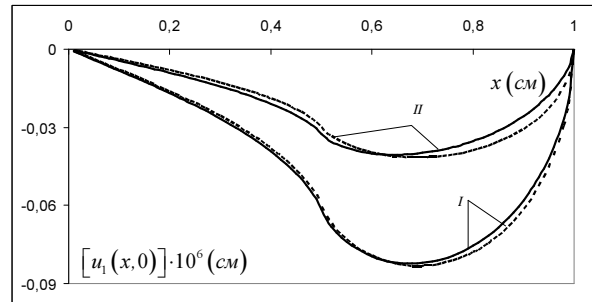
**Figure 2.** Jumps of the shear displacement for an interface crack in a piezoelectric bimaterial

Рис.3 і 4 ілюструють поведінку стрибків нормального та дотичного переміщень на відріжку  $[0, b]$  у випадку ізотропних матеріалів при  $b = 1$  см,  $a = c = 0,5$  см. Розглядалася пара матеріалів сталь – титан з  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_1 = 0,28$  (верхній матеріал),  $E_2 = 1 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_2 = 0,32$  (нижній). У цьому випадку  $\beta = -0,0227214$ . На графіках позначено: I –  $\sigma = 10^3$  Па,  $\tau = 10^3$  Па, II –  $\sigma = 1,5 \cdot 10^3$  Па,  $\tau = 0,5 \cdot 10^3$  Па.



**Рисунок 3.** Розкриття тріщини на межі поділу двох ізотропних матеріалів

**Figure 3.** Crack opening on the interface of two isotropic materials



**Рисунок 4.** Стрибки дотичного переміщення для тріщини між двома ізотропними матеріалами

**Figure 4.** Jumps of the shear displacement for an interface crack between two isotropic materials

З результатів, наведених на рисунках 1–4, бачимо що як для п'єзоелектричного, так і для ізотропного біматеріалів максимальні за модулем нормальні та тангенціальні стрибки переміщень виникають у зонах прикладення навантаження. При цьому результати розрахунків, проведених за точними та наближеними формулами добре узгоджуються. Слід також відзначити, що для комбінацій матеріалів, які характеризуються більшими значеннями бета, похибка наближених формул незначно зростає, а для менших значень бета – зменшується. Це вказує на можливість застосування наближених формул (36) та (41) для знаходження стрибків переміщень, що є важливим при застосуванні моделі [4,5] до аналізу тріщини між двома матеріалами.

**Висновки.** Розглянута електрично-проникна тріщина між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією постійних нормальних та зсувних напружень у кінцевих областях тріщини. З використанням представлень переміщень та напружень через одну кусково-аналітичну функцію поставлена проблема зведена до крайової задачі Рімана, для якої виписано точний аналітичний розв'язок. З цього розв'язку отримано вирази для напружень та стрибків переміщень на лінії поділу матеріалів.

Також побудовано наближений розв'язок задачі, який є значно простішим і зручнішим для обчислень.

Проведено чисельний аналіз та порівняння отриманих точного й наближеного розв'язків. Виявлена їх хороша узгодженість, що вказує на можливість застосування отриманих вище наближених формул для дослідження тріщин між двома матеріалами.

**Conclusions.** An electrically permeable crack between two piezoelectric materials under constant normal and shear stresses in the end regions of the crack is considered. Using representations of displacements and stresses via piecewise analytic functions, the problem is reduced to a Riemann boundary value problem which is solved analytically. Using this solution, the expressions for the stress and displacement jumps at the interface are derived. The approximate solution of the problem, which is much easier and more convenient for computation, is present. Numerical analysis and comparison of the exact and approximate solutions are fulfilled. Their good consistency was revealed. It indicates the possibility of using of approximate formulas derived above for analysis of cracks between two materials.

#### **Список використаної літератури**

1. Партон, В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел [Текст] / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 470 с.
2. Suo, Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics [Text] / Z. Suo, C.M. Kuo, D.M. Barnett, J.R. Willis // J. Mech. Phys. Solids – 1992. – Т. 40. – P.739–765.
3. Loboda, V. Electro–mechanical pre-fracture zones for an electrically permeable interface crack in a piezoelectric biomaterials [Text] / V. Loboda, Y. Lapusta, A. Sheveleva // International Journal of Solids and Structures. –2007. – Т. 44. – P.5538–5553.
4. Леонов, М.Я. Развитие мельчайших трещин в твердом теле [Текст] / М.Я. Леонов, В.В. Панасюк // Прикладная механика. – 1959. – Т.5, №4. – С.391–401.
5. Dugdale, D.S. Yielding of steel sheets containing slits [Text] / D.S. Dugdale // J.Mech. and Phys. Solids. –1960. – V.8, №.2. – P.100–108.
6. Шевельова, А.Є. Про моделювання зони руйнування міжфазної тріщини [Текст] / А.Є. Шевельова // Машинознавство. – 1999. – №4(22) – С.46–50.
7. Бакиров, В.Ф. Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для тріщини на границе соединения материалов [Текст] / В.Ф. Бакиров, Р.В. Гольдштейн // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т.68, вып. 1. – С.170–179.
8. Herrmann, K.P. Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models [Text] / K.P. Herrmann, V.V. Loboda // Archive of Applied Mechanics. – 2000. – V.70. – P.127–143.
9. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

*Отримано 14.05.2014*