Недашковський М. Обчислювальні методи для оцінювання параметрів у багатофакторній регресії / М. Недашковський, Д. Дудкін // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2014. — Том 75. — № 3. — С. 209-222. — (Математичне моделювання. Математика. Фізика).

УДК 519.612

М. Недашковський, докт. фіз.-мат.наук; Д. Дудкін

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ У БАГАТОФАКТОРНІЙ РЕГРЕСІЇ

Резюме. *Регресійний аналіз є основним статистичним методом побудови математичних моделей об'єктів або явищ за експериментальними даними. Визначення невідомих параметрів регресії зводиться до розв'язування систем лінійних рівнянь. У зв'язку з різноманітністю й специфікою обчислюваних матриць, свої особливості мають і відповідні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). У роботі запропоновано чисельні методи для розв'язування однієї з важливих задач регресійного аналізу. Проведено оцінювання складності методу та аналіз похибок заокруглення.*

Ключові слова: *багатофакторна лінійна регресія, система лінійних рівнянь, λ-матриці.*

M. Nedaskovskiy, D.Dudkin

NUMERICAL METHODS FOR THE ESTIMATION OF PARAMETERS IN MULTIPLE REGRESSION

Summary. *Regression anlysis is the powerful method of modern statistics and can be applied in various areas. It is a basic tool for development of mathematical model basing on experimental information. Many techniques for carrying out regression analysis have been developed. Available methods such as linear regression and ordinary least squares regression are parametric, in that the regression function is defined in terms of a finite number of unknown parameters that are estimated from the data. The performance of regression analysis methods in practice depends on the form of the data generating process, and how it is related with the regression approach being used. Since the true form of the data-generating process is generally not known, regression analysis often depends to some extent on making assumptions about this process to some extent. These assumptions are sometimes testable if a sufficient quantity of data is available. Determining of unknown coefficients in multiple linear regression is provided by solving of simultaneous equations and therefore it is convenient to use matrix models for it. Taking into account variety and specifics of calculated matrices, appropriate methods of simultaneous equations solving possess their own unique features. Programs developed for such tasks are not typical in standard computer software and are specially made for a specific problem. There are several important problems which occur during development of numeric methods for simultaneous equations, called calculation errors. They are caused by rounding which takes place at any arythmetic operation on a computer, inaccuracy of input information about system, and related problems of memory saving and reducing of necessary number of operations. There are many effective methods of solving simultaneous equations with numerical elements. Such methods require different approaches and algorithms. This paper proposes numerical methods for solving one of the important problems of regression analysis. Estimation of the method complexity and approximation errors have also been executed.*

Key words: *multiple linear regression, simultaneous equations, λ-matrices.*

Постановка проблеми. Регресійний аналіз називають основним методом сучасної математичної статистики для виявлення неявних і завуальованих зв'язків між даними спостережень. Регресійні обчислення і підбір адекватних рівнянь − це цінний, універсальний дослідницький інструмент у найрізноманітніших галузях ділової та наукової діяльності (маркетинг, торгівля, медицина і т.д.). На основі побудованого рівняння регресії визначається внесок кожної незалежної змінної у варіацію досліджуваної (прогнозованої) залежної змінної величини. В роботі запропонована ефективна обчислювальна схема для визначення невідомих параметрів матричного рівняння регресії.

Аналіз досліджень і публікацій. Регресійному аналізу присвячені праці багатьох авторів, зокрема С. Радченко [1]. Визначення невідомих коефіцієнтів регресії зводиться до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні методи чисельного розв'язування подібних систем розглянуто у монографії Р. Літнаровича [2]. При розробленні й аналізі різних методів чисельного рішення СЛАР важливе місце займає врахування виникаючих похибок, що викликані похибками заокруглення при виконанні основних арифметичних операцій в ЕОМ, неточністю вихідної інформації про систему й пов'язані з цим проблеми економії машинної пам'яті й зниження необхідного числа операцій. У зв'язку з різноманітністю і специфікою обчислюваних матриць, свої особливості мають і відповідні методи розв'язування СЛАР. Тому засновані на них програми розробляються для конкретних задач і не входять до програмного забезпечення універсальних ЕОМ.

Дослідженнями у галузі розв'язування СЛАР займались багато відомих вітчизняних і зарубіжних учених: В. Воеводин [3], Дж. Уілкінсон, Є. Тиртишніков, Д. Фадєєв, В. Фадєєва, С. Абрамов та інші. Проте обчислювальні методи, що використовуються для оцінювання парметрів у багатофакторіній регресії, ще недостатньо висвітлені в науковій літературі.

Представлення моделі у матричному вигляді. Багатофакторний кореляційно-регресійний аналіз є потужним інструментом для багатьох задач статистики [4]. Лінійну багатофакторну модель, як і багато інших проблем регресійного аналізу, зручно записувати і розглядати засобами теорії матриць. У роботі запропоновано ефективну обчислювальну схему для визначення невідомих параметрів матричного рівняння регресії.

Модель для кожного окремого спостереження може бути записана у вигляді

$$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \ldots + b_p x_{ip} + e_i, \qquad (1)$$

де y_i - це i -е значення залежної змінної $(i = 1,2,\ldots,n)$;

$b_0, b_1, \ldots, b_p$ - невідомі парметри;

x_{ij} - це i -е значення j - фактора $(i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,..,p)$;

e_i - це i -е значення випадкової величини.

Рівняння (1) є скороченим записом системи

$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \ldots + \beta_p x_{1p} + \varepsilon_1; \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \ldots + \beta_p x_{2p} + \varepsilon_2; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \ldots + \beta_p x_{np} + \varepsilon_n \end{cases} \qquad (2)$$

де $Y = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^T$ - вектор-стовпець спостережень розмірності $n \times 1$ за незалежною змінною Y ;

$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{np} \end{pmatrix}$ – матриця розмірності $n \times (p+1)$, яка складається з n спостережень за p змінними $x_1, x_2, \ldots, x_p$, де перший стовпець має значення 1 для отримання перетину. Матрицю X ще називають матрицею спостережень.

$b = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_p \end{pmatrix}^T$ - вектор невідомих параметрів розмірності $(p+1)\times 1$.

$e = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}^T$ - вектор n випадкових величин e_i розмірності $n\times 1$.

Використовуючи введені позначення, (2) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Цю ж систему можна записати у компактному матричному вигляді

$$X\beta + e = Y. \quad (4)$$

Вираз (4) називають записом простої лінійної багатофакторної регресії у матричному вигляді.

Оцінювання невідомих параметрів у багатофакторній регресії. Для того, щоб знайти оцінки параметрів b у вибірковій регресійній багатофакторній моделі (1) скористаємося методом найменших квадратів; e - вектор-стовпець помилок розміру

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \ (n\times 1).$$

Вектор b невідомих параметрів за методом найменших квадратів знаходимо мінімізацією суми квадратів залишків

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta x_{1i} - \beta_2 x_{2i} - \dots - \beta_p x_{pi})^2 , \quad (5)$$

де $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = SSE$, що у матричному вигляді запишемо

$$e^T \cdot e = (e_1 e_2 \dots e_n)\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}^T = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \quad (6)$$

З (4) отримаємо, що $e = y - X\beta$. Звідси

$$ee^T = (y - Xb)^T (y - Xb) = y^T y - 2b^T X^T y + b^T X^T X b ,$$

де, враховуючи властивості транспонованих матриць,

$$(X \cdot \beta)^T = \beta^T \cdot X^T ; \beta^T \cdot X^T \cdot y = y^T \cdot X \cdot \beta \quad . \tag{7}$$

Вираз (7) є матричним відображенням (6).

Таким чином, у матричній формі метод найменших квадратів полягає у визначенні такого вектора, для якого $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ буде мінімальною. Тобто, прирівнявши часткові похідні, отримаємо нормальну систему $(p+1)$ рівнянь з $(p+1)$ невідомими:

$$\begin{gathered}
n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + ... + \beta_p \sum_{i=1}^{n} x_{pi} = \sum_{i=1}^{n} y_i + \beta_2 ; \\
\beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} x_{1i} + \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 + ... + \beta_p \sum_{i=1}^{n} x_{2i} x_{pi} = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i ; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_{pi} + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_{pi} x_{1i} + \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_{pi} x_{2i} + ... + \beta_p \sum_{i=1}^{n} x_{pi}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{pi} y_i ; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered} \tag{8}$$

Систему (8) можна записати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & ... & \sum_{i=1}^{n} x_{pi} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & ... & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{pi} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{n} x_{pi} & \sum_{i=1}^{n} x_{pi} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{pi} x_{2i} & ,,, & \sum_{i=1}^{n} x_{pi}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{p1} & x_{p2} & ... & x_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

або ж

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & ... & \sum_{i=1}^{n} x_{pi} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & ... & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{pi} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{n} x_{pi} & \sum_{i=1}^{n} x_{pi} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{pi} x_{2i} & ,,, & \sum_{i=1}^{n} x_{pi}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_{p-1} \\ \beta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\ ... \\ \sum_{i=1}^{n} x_{pi} y_i \end{pmatrix} , \tag{9}$$

що скорочено можна записати

$$A(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \beta(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = G(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m), \tag{10}$$

в якій $A(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ – регулярна матриця розміру $(p+1) \times (p+1)$, елементами якої є многочлени степені $l = 2$ від λ_i $(i = 1,2,.., p \times n)$.

$$\lambda_1 = x_{11},\ \lambda_2 = x_{12},...,\ \lambda_p = x_{1p},\ \lambda_{p+1} = x_{21},...,\ \lambda_m = x_{np}. \tag{11}$$

Права частина рівняння визначається як вектор

$$G(l_1, l_2, ..., l_m) = \left(a_{0,p+1}(l_1, l_2, ..., l_m), a_{1,p+1}(l_1, l_2, ..., l_m), ..., a_{p,p+1}(l_1, l_2, ..., l_m)\right)^T \tag{12}$$

многочленів l - ї степені ($l = 2$).

Елементи системи (10) задаються за допомогою формул

$$a_{i,j}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = \sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l} a_{i,j(k_1k_2...k_m)} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} .. \lambda_m^{k_m} \quad (i = \overline{0, p};\ j = \overline{1, p+1}). \tag{13}$$

Випадок, коли $m = 1$, тобто A, b та G залежать від однієї змінної l, розглянуто у роботах [5,6,7] детально. У книзі [6] розглянуто метод зведення систем виду (10) до систем лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими коефіцієнтами спеціального вигляду великого порядку. Однак він дуже громіздкий і малопридатний для програмної реалізації. В даній роботі запропоновано іншу обчислювальну схему, що дозволяє поетапно звести розв'язання системи вигляду (10) до обчислення невідомих скінченого числа систем лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими коефіцієнтами.

Рекурентна схема зведення системи лінійних алгебраїчних рівнянь з m -мірними l -матрицями до системи з числовими елементами. На початку введемо позначення

$$a_{i,j}^{(1)}(\lambda_1) = \sum_{k_1=0}^{l} a_{i,j,k_1}^{(1)} \lambda_1^{k_1} \quad (i = \overline{0, p};\ j = \overline{0, p+1}), \tag{14}$$

де коефіцієнти $a_{i,j,k_1}^{(1)}$ визначаються в такий спосіб:

$$a_{i,j,k_1}^{(1)}(\lambda_2, .., \lambda_m) = \sum_{k_2+..+k_m=0}^{l-k_1} a_{i,j,(k_2..k_m)} \lambda_2^{k_2} .. \lambda_m^{k_m} \quad (i = \overline{1, p};\ j = \overline{1, p+1}), \tag{15}$$

Із використанням уведених позначень систему (10) можна записати

$$A^{(1)}(\lambda_1)\beta^{(1)}(\lambda_1) = G^{(1)}(\lambda_1) \tag{16}$$

Оскільки тепер $A^{(1)}(\lambda_1), G^{(1)}(\lambda_1)$ – поліноміальні матриці від однієї змінної, то їх можна записати у вигляді матричних поліномів

$$A^{(1)}(\lambda_1) = \sum_{k_1=0}^{l} \lambda_1^{k_1} A_{k_1}^{(1)} \tag{17}$$

та

$$G^{(1)}(\lambda_1) = \sum_{k_1=0}^{l} \lambda_1^{k_1} G_{k_1}^{(1)}. \tag{18}$$

За аналогією з одновимірним випадком розв'язок системи (16) у рамках суто формальної (поки що) схеми шукатимемо у вигляді відношення двох поліномів з невідомими коефіцієнтами

$$\beta^{(1)}(\lambda_1) = \sum_{k_1=0}^{N_1 l} \lambda_1^{k_1} \beta_{N_1, l-k_1}^{(1)} / \sum_{k_1=0}^{N_1 l} \lambda_1^{k_1} \gamma_{N_1, l-k_1}^{(1)}, \tag{19}$$

де $N_1 = p+1$, $\beta_0^{(1)}, \beta_1^{(1)}, ..., \beta_{N_1 l}^{(1)}$ – вектори розмірності N_1, а $\gamma_0^{(1)}, \gamma_1^{(1)}, ..., \gamma_{N_1 l}^{(1)}$ – скалярні величини. Тоді систему (16) можна записати в такий спосіб:

$$A^{(1)}(\lambda)\beta^{(1)}(\lambda) = \left(\lambda_1^l A_0^{(1)} + \lambda_1^{l-1} A_1^{(1)} + \lambda_1^{l-2} A_2^{(1)} + \cdots + \lambda_1^2 A_{l-2}^{(1)} + \lambda_1^1 A_{l-1}^{(1)} + A_l^{(1)}\right) \times$$
$$\times \left(\lambda_1^{(p+1)l} \beta_0^{(1)} + \lambda_1^{(p+1)l-1} \beta_1^{(1)} + \lambda_1^{(p+1)^{l-2}} \beta_2^{(1)} + \cdots + \lambda_1^2 \beta_{N_1 l-2}^{(1)} + \lambda_1^1 \beta_{N_1 l-1}^{(1)} + X_{N_1 l}^{(1)}\right) =$$
$$= G^{(1)}(\lambda) y^{(1)}(\lambda) = \left(\lambda_1^l G_0^{(1)} + \lambda_1^{l-1} G_1^{(1)} + \lambda_1^{l-2} G_2^{(1)} + \cdots l + \lambda_1^2 G_{l-2}^{(1)} + \lambda_1^1 G_{l-1}^{(1)} + G_l^{(1)}\right) \times$$
Згру
$$\times \left(\lambda_1^{(p+1)l} \gamma_0^{(1)} + \lambda_1^{(p+1)l-1} \gamma_1^{(1)} + \lambda_1^{(p+1)^{l-2}} \gamma_2^{(1)} + \cdots + \lambda_1^2 \gamma_{N_1 l-2}^{(1)} + \lambda_1^1 \gamma_{N_1 l-1}^{(1)} + y_{N_1 l}^{(1)}\right)$$

пувавши члени в лівій і правій частинах рівності при однакових степенях l_1 та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях l_1, отримаємо систему $N_1[l(N_1+1)+1]$ рівнянь з $(N_1 l+1)(N_1+1)$ невідомими

$$\left.\begin{array}{l}
A_0^{(1)} \beta_0^{(1)} - G_0^{(1)} \gamma_0^{(1)} = 0; \\
A_0^{(1)} \beta_1^{(1)} + A_1^{(1)} \beta_0^{(1)} - (G_0^{(1)} \gamma_1^{(1)} + G_1^{(1)} \gamma_0^{(1)}) = 0 \\
A_0^{(1)} \beta_2^{(1)} + A_1^{(1)} \beta_1^{(1)} + A_2^{(1)} \beta_0^{(1)} - (G_0^{(1)} \gamma_2^{(1)} + G_1^{(1)} \gamma_1^{(1)} + G_2^{(1)} \gamma_0^{(1)}) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{s=0}^{l} A_s^{(1)} \beta_{r-s}^{(1)} - \sum_{s=0}^{l} G_s^{(1)} \gamma_{r-s}^{(1)} = 0; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{l-1}^{(1)} \beta_{N_1 l}^{(1)} + A_l^{(1)} \beta_{N_1 l-1}^{(1)} - \left(G_{l-1}^{(1)} \gamma_{N_1 l}^{(1)} + G_l^{(1)} \gamma_{N_1 l-1}^{(1)}\right) = 0; \\
A_l^{(1)} \beta_{N_1 l}^{(1)} - G_l^{(1)} \gamma_{N_1 l}^{(1)} = 0
\end{array}\right\}. \tag{20}$$

Якщо тепер, без обмеження загальності, покласти, наприклад, $g_{N_1+1N_1}^{(1)} = 1$, то однорідна система (20) може бути перетворена до неоднорідної вже системи вигляду

$$\left.\begin{array}{l}
A_0^{(1)} \beta_0^{(1)} = G_0^{(1)}; \\
A_0^{(1)} \beta_1^{(1)} + A_1^{(1)} \beta_0^{(1)} - G_0^{(1)} \gamma_1^{(1)} = G_1^{(1)} \\
A_0^{(1)} \beta_2^{(1)} + A_1^{(1)} \beta_1^{(1)} + A_2^{(1)} \beta_0^{(1)} - (G_0^{(1)} \gamma_{1\ 2}^{(1)(1)} + G_1^{(1)} \gamma_1^{(1)}) = G_2^{(1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{s=0}^{l} A_s^{(1)} \beta_{l-s}^{(1)} - \sum_{s=0}^{l-1} G_s^{(1)} \gamma_{l-s}^{(1)} = G_l^{(1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{s=0}^{l} A_s^{(1)} \beta_{p-s}^{(1)} - \sum_{s=0}^{l} G_s^{(1)} \gamma_{p-s}^{(1)} = 0; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{l-1}^{(1)} X_{N_1 l}^{(1)} + A_l^{(1)} X_{N_1 l-1}^{(1)} - \left(B_{l-1}^{(1)} y_{N_1 l}^{(1)} + B_l^{(1)} y_{N_1 l-1}^{(1)}\right) = 0; \\
A_l^{(1)} X_{N_1 l}^{(1)} - B_l^{(1)} y_{N_1 l}^{(1)} = 0
\end{array}\right\}. \tag{21}$$

Якщо тепер взяти до уваги (15), то легко зробити висновок, що розв'язання системи (10) з поліноміальними елементами, які залежать від змінних $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ зведене до системи (11), елементами якої є вже поліноми від m-1 змінної $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$.

Для проведення наступного етапу введемо до розгляду позначення

$$N_2 = N_1[l(N_1+1)+1],\quad a_{i,j}^{(2)}(\lambda_2) = \sum_{k_2=0}^{l} a_{i,j,k_2}^{(2)} \lambda_2^{k_2} \quad (i=\overline{1,N_2};\, j=\overline{1,N_2+1}). \tag{22}$$

Із використанням уведених позначень систему (21) можна переписати таким чином:

$$A^{(2)}(\lambda_2) b^{(2)}(\lambda_2) = G^{(2)}(\lambda_2). \tag{23}$$

Оскільки тепер формально $A^{(2)}(\lambda_2), G^{(2)}(\lambda_2)$ – поліноміальні матриці від однієї змінної, то їх можна записати у вигляді матричних поліномів

$$A^{(2)}(\lambda_2) = \sum_{k_2=0}^{l} \lambda_2^{k_2} A_{k_2}^{(2)} \tag{24}$$

та

$$G^{(2)}(\lambda_2) = \sum_{k_2=0}^{l} \lambda_2^{k_2} G_{k_2}^{(2)}. \tag{25}$$

За аналогією з попереднім випадком розв'язок системи (23) будемо шукати у рамках формальної поки що схеми у вигляді відношення двох поліномів з невідомими коефіцієнтами

$$b^{(2)}(\lambda_2) = \sum_{k_2=0}^{N_2 l} \lambda_2^{k_2} b_{N_2,l-k_2}^{(2)} \Big/ \sum_{k_1=0}^{N_2 l} \lambda_2^{k_2} g_{N_2,l-k_2}^{(2)}, \tag{26}$$

де $b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, \ldots, b_{N_2(l-k_2)}^{(1)}$ - вектори розмірності N_2, а $g_0^{(2)}, g_1^{(2)}, \ldots, g_{N_2(l-k_2)}^{(2)}$ - скалярні величини. Тоді систему (23) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
A^{(2)}(\lambda_2)\beta^{(2)}(\lambda_2) &= \left(\lambda_2^{l} A_0^{(2)} + \lambda_2^{l-1} A_1^{(2)} + \lambda_2^{l-2} A_2^{(2)} + \cdots + \lambda_2^{2} A_{l-2}^{(2)} + \lambda_2^{1} A_{l-1}^{(2)} + A_l^{(2)}\right)\times \\
&\times\left(\lambda_2^{N_2 l}\beta_0^{(2)} + \lambda_2^{N_2 l-1}\beta_1^{(2)} + \lambda_2^{N_2 l-2}\beta_2^{(2)} + \cdots + \lambda_2^{2}\beta_{N_2 l-2}^{(2)} + \lambda_2^{1}\beta_{N_2 l-1}^{(2)} + \beta_{N_2 l}^{(2)}\right) = \\
= G^{(2)}(\lambda_2)\gamma^{(2)}(\lambda_2) &= \left(\lambda_2^{l} G_0^{(2)} + \lambda_2^{l-1} G_1^{(2)} + \lambda_2^{l-2} G_2^{(2)} + \cdots + \lambda_2^{2} G_{l-2}^{(2)} + \lambda_2^{1} G_{l-1}^{(2)} + G_l^{(2)}\right)\times \\
&\times\left(\lambda_2^{N_2 l}\gamma_0^{(2)} + \lambda_2^{N_2 l-1}\gamma_1^{(2)} + \lambda_2^{N_2 l-2}\gamma_2^{(2)} + \cdots + \lambda_2^{2}\gamma_{N_2 l-2_{N_2 l-2}}^{(2)} + \lambda_2^{1}\gamma_{N_2 l-1}^{(2)} + \gamma_{N_2 l}^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

Згрупувавши, як і попередньо, члени в лівій і правій частинах рівності при однакових степенях тепер уже λ_2 і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях вже λ_2, отримаємо систему $N_2[l(N_2+1)+1]$ рівнянь з $(N_2 l+1)(N_2+1)$ невідомими

$$\left.\begin{array}{l}
A_0^{(2)}\beta_0^{(2)} - G_0^{(2)} y_0^{(2)} = 0; \\
A_0^{(2)}\beta_1^{(2)} + A_1^{(2)}\beta_0^{(2)} - (G_0^{(2)}\gamma_1^{(2)} + G_1^{(2)}\gamma_0^{(2)}) = 0 \\
A_0^{(2)}\beta_2^{(2)} + A_1^{(2)}\beta_1^{(2)} + A_2^{(2)}\beta_0^{(2)} - (G_0^{(2)}\gamma_2^{(2)} + G_1^{(2)}\gamma_1^{(2)} + G_2^{(2)}\gamma_0^{(2)}) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{s=0}^{l} A_s^{(2)}\beta_{p-s}^{(2)} - \sum_{s=0}^{l} G_s^{(2)}\gamma_{p-s}^{(2)} = 0; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{l-1}^{(2)}\beta_{N_2 l}^{(2)} + A_l^{(2)}\beta_{N_2 l-1}^{(2)} - \left(G_{l-1}^{(2)}\gamma_{N_2 l}^{(2)} + G_l^{(2)}\gamma_{N_2 l-1}^{(2)}\right) = 0; \\
A_l^{(2)}\beta_{N_2 l}^{(2)} - G_l^{(2)}\gamma_{N_2 l}^{(2)} = 0
\end{array}\right\}. \qquad (27)$$

Знову без обмеження загальності покладемо $g_{N_2+1 N_2}^{(2)} = 1$. Тоді однорідна система (27) може бути перетворена до неоднорідної вже системи вигляду

$$\left.\begin{array}{l}
A_0^{(2)}\beta_0^{(2)} = G_0^{(2)}; \\
A_0^{(2)}\beta_1^{(2)} + A_1^{(2)}\beta_0^{(2)} - G_0^{(2)}\gamma_1^{(2)} = G_1^{(2)} \\
A_0^{(2)}\beta_2^{(2)} + A_1^{(2)}\beta_1^{(2)} + A_2^{(2)}\beta_0^{(2)} - (G_0^{(2)}\gamma_2^{(2)} + G_1^{(2)}\gamma_1^{(2)}) = G_2^{(2)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{s=0}^{l} A_s^{(2)}\beta_{l-s}^{(2)} - \sum_{s=0}^{l-1} G_s^{(2)}\gamma_{l-s}^{(2)} = G_l^{(2)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{s=0}^{l} A_s^{(2)}\beta_{p-s}^{(2)} - \sum_{s=0}^{l} G_s^{(2)}\gamma_{p-s}^{(2)} = 0; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{l-1}^{(2)}\beta_{N_2 l}^{(2)} + A_l^{(2)}\beta_{N_2 l-1}^{(2)} - \left(G_{l-1}^{(2)}\gamma_{N_2 l}^{(2)} + G_l^{(2)}\gamma_{N_2 l-1}^{(2)}\right) = 0; \\
A_l^{(2)}\beta_{N_2 l}^{(2)} - G_l^{(2)}\gamma_{N_2 l}^{(2)} = 0
\end{array}\right\}. \qquad (28)$$

Після проведення попереднього і даного кроків розв’язання системи (10) з поліноміальними елементами, які залежать від змінних $l_1, l_2, \ldots, l_m$, зведене до системи (28), елементами якої є вже поліноми від m-2 змінних $l_3, l_4, \ldots, l_m$.

Послідовно виконаємо і далі дану рекурентну схему виключення невідомих. Для цього на m-му етапі введемо позначення

$$N_m = N_{m-1}[l(N_{m-1} + 1) + 1],$$

$$a_{i,j}^{(m)}(\lambda_m) = \sum_{k_m=0}^{l} a_{i,j,k_m}^{(m)} \lambda_m^{k_m} \quad (i = \overline{1, N_m};\ j = \overline{1, N_m + 1}). \qquad (29)$$

Тоді на даному m-му кроці отримаємо систему рівнянь

$$A^{(m)}\left(l_m\right)b^{(m)}\left(l_m\right)= G^{(m)}\left(l_m\right). \tag{30}$$

Для цього кроку $A^{(m)}\left(l_m\right), G^{(m)}\left(l_m\right)$- поліноміальні матриці вже від однієї змінної l_m і їх можна навести у вигляді матричних поліномів

$$A^{(m)}\left(\lambda_m\right)= \sum_{k_m=0}^{l} \lambda_m^{k_m} A_{k_m}^{(m)} \tag{31}$$

та

$$G^{(m)}\left(\lambda_m\right)= \sum_{k_m=0}^{l} \lambda_m^{k_m} G_{k_m}^{(m)}. \tag{32}$$

Розв’язок системи (30) вже не в рамках формальної схеми шукатимемо у вигляді відношення двох поліномів з невідомими коефіцієнтами

$$b^{(m)}\left(l_m\right)= \mathop{\mathrm{e}}_{k_m=0}^{N_m l} l_m^{k_m} b_{N_m,l-k_m}^{(m)} \Big/ \mathop{\mathrm{e}}_{k_m=0}^{N_m l} l_m^{k_m} g_{N_m,l-k_m}^{(m)}, \tag{33}$$

де $b_0^{(m)}, b_1^{(m)},..., b_{N_m l}^{(m)}$ - вектори розмірності N_m з числовими елементами, а $g_0^{(m)}, g_1^{(m)},..., g_{N_m l}^{(m)}$ - скалярні величини. Тоді для обчислення розв’язків (33) системи (30) методом невизначених коефіцієнтів можна записати таку систему рівнянь із числовими елементами:

$$\left.\begin{array}{l}
A_0^{(m)}\beta_0^{(m)} = G_0^{(m)}; \\
A_0^{(m)}\beta_1^{(m)} + A_1^{(m)}\beta_0^{(m)} - G_0^{(m)}\gamma_1^{(m)} = G_1^{(m)} \\
A_0^{(m)}\beta_2^{(m)} + A_1^{(m)}\beta_1^{(m)} + A_2^{(m)}\beta_0^{(m)} - (G_0^{(m)}\gamma_2^{(m)} + G_1^{(m)}\gamma_1^{(m)}) = G_2^{(m)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum\limits_{s=0}^{l} A_s^{(m)}\beta_{l-s}^{(m)} - \sum\limits_{s=0}^{l-1} G_s^{(m)}\gamma_{l-s}^{(m)} = G_l^{(m)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum\limits_{s=0}^{l} A_s^{(m)}\beta_{p-s}^{(m)} - \sum\limits_{s=0}^{l} G_s^{(m)}\gamma_{p-s}^{(m)} = 0; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{l-1}^{(m)}\beta_{N_m l}^{(m)} + A_l^{(m)}\beta_{N_m l-1}^{(m)} - \left(G_{l-1}^{(m)}\gamma_{N_m l}^{(m)} + G_l^{(m)}\gamma_{N_m l-1}^{(m)}\right) = 0; \\
A_l^{(m)}\beta_{N_m l}^{(m)} - G_l^{(m)}\gamma_{N_m l}^{(m)} = 0
\end{array}\right\} \tag{34}$$

Схема обчислення невідомих.

Метод розрізування.

Для наочності отриману кліткову систему (34) можна записати в матричному вигляді так:

$$\begin{pmatrix}
A_0^{(m)} &&&&&&&&&&&&&&&& 0 \\
A_1^{(m)} & A_0^{(m)} &&&&&&&&&&&&&&& -G_0^{(m)} \\
A_2^{(m)} & A_1^{(m)} & A_0^{(m)} &&&&&&&&&&&&&& -G_1^{(m)} \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots &&&&&&&&&&&&& -G_2^{(m)} \\
A_l^{(m)} & A_{l-1}^{(m)} & A_{l-2}^{(m)} & \ddots & A_0^{(m)} &&&&&&&&&&&& \vdots \\
& A_l^{(m)} & A_{l-1}^{(1)} & \ddots & A_1^{(m)} & A_0^{(m)} &&&&&&&&&&& -G_l^{(m)} \\
&& A_l^{(1)} & \ddots & A_2^{(m)} & A_1^{(m)} & A_0^{(m)} &&&&&&&&&& \\
&&&& \ddots & \ddots & \ddots &&&&&&&&&& \\
&&&&& \ddots & \ddots & \ddots &&&&&&&&& \\
&&&&&& A_l^{(m)} & A_{l-1}^{(m)} & \ddots & A_0^{(m)} &&&&&&& \\
&&&&&&& A_l^{(m)} & A_{l-1}^{(m)} & \ddots & A_0^{(m)} &&&&&& \\
&&&&&&&& \ddots & \ddots & \ddots &&&&&& \\
&&&&&&&&& A_l^{(m)} & A_{l-1}^{(m)} & \ddots & A_0^{(m)} &&& -G_0^{(1)} & \\
&&&&&&&&&& A_l^{(m)} & \ddots & A_1^{(m)} & A_0^{(m)} & -G_0^{(m)} & -G_1^{(m)} & \\
&&&&&&&&&&& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\
&&&&&&&&&&&& A_l^{(m)} & A_{l-1}^{(m)} & -G_{l-1}^{(m)} & -G_l^{(m)} & \\
&&&&&&&&&&&&& A_l^{(m)} & -G_l^{(m)} &&
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\beta_0^{(m)} \\ \beta_1^{(m)} \\ \beta_2^{(m)} \\ \vdots \\ \beta_{N_m}^{(m)} \\ \beta_{N_m+1}^{(m)} \\ \beta_{N_m+2}^{(m)} \\ \vdots \\ \beta_{N_m l+N_m}^{(m)} \\ \vdots \\ \gamma_0^{(m)} \\ \gamma_1^{(m)} \\ \gamma_2^{(m)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_{N_m l+N_m-1}^{(m)} \\ \gamma_{N_m l+N_m}^{(m)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
G_0^{(m)} \\ G_1^{(m)} \\ G_2^{(m)} \\ \vdots \\ G_{l-1}^{(m)} \\ G_l^{(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ m \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}. \tag{35}$$

Поділимо матрицю отриманої системи (35) на блоки в такий спосіб:

$$\left(\begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline D_{21} & D_{22} \end{array}\right),$$

де D_{11}– квадратна матриця розміром $((N_m + 1)(l + 2)$, а D_{12}, D_{21}, D_{22} – прямокутні матриці відповідних розмірів, які залишилися після вирізування D_{11}.

Без обмеження загальності припустимо, що мінор D_{11} відмінний від нуля (для цього достатньо, щоб виконувалась умова $\det(A_0^{(m)}$ №$0).\det A_0 \neq 0$) і запишемо неоднорідну систему (35) у вигляді

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

У такому випадку на основі формули Шура вектор V може бути визначений із системи рівнянь

$$\left(D_{22} - D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}\right)V = F_2 - D_{21}D_{11}^{-1}F_1. \tag{37}$$

Після того, як обчислено V, можна відразу переходити до знаходження невідомої Z із системи

$$D_{11}Z = F_1 - D_{12}V . \tag{38}$$

Таким чином, обчислення невідомих Z та V у системі (36) може бути зведене до розв’язування двох систем (37) і (38) меншого порядку. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (37) і (38) можна розв’язати методом відсічених систем [6]. Для цього потрібно з точністю до головного члена виконати по $n^3l^2/2$ адитивних та мультиплікативних операцій.

Алгоритм розрізування для лінійних систем з λ-матрицями допускає прискорену схему реалізації [5], яка базується на швидкому перетворенні Фур'є. В такому випадку для повної реалізації алгоритму потрібно виконати $C_1(nl)^\beta + 4n^3l\log_2 l + 4n^2l\log_2 nl$ мультиплікативних операцій та $C_2(nl)^\beta + 8n^3l\log_2 l + 8n^2l\log_2 nl$ адитивних дій на комп’ютерній системі. Константи C_1, C_2 та β залежать від обраного алгоритму розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Після визначення всіх невідомих $b^{(m)}_{N_m,k_m}, g^{(m)}_{N_m,k_m}$ $(k_m = 0,1,2,\ldots N_m l)$ за формулою (33) можна перейти до підрахунку невідомих

$$\beta^{(m)}\left(\lambda_m\right) = \sum_{k_m=0}^{N_m l} \lambda_m^{k_m} \beta^{(m)}_{N_m,l-k_m} \Big/ \sum_{k_m=0}^{N_m l} \lambda_m^{k_m} \gamma^{(m)}_{N_m,l-k_m}$$

та

$$\beta^{(2)}\left(\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_m\right) = \frac{\sum\limits_{k_2=0}^{N_2 l} \lambda_2^{k_2} \beta^{(2)}_{N_2,l-k_2}(\lambda_3,\lambda_4,\cdots,\lambda_m)}{\sum\limits_{k_2=0}^{N_2 l} \lambda_2^{k_2} \gamma^{(2)}_{N_2,l-k_2}(\lambda_3,\lambda_4,\cdots,\lambda_m)}$$

$$\beta\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_m\right) = \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{N_1 l} \lambda_1^{k_1} \beta^{(1)}_{N_1,l-k_1}(\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_m)}{\sum\limits_{k_1=0}^{N_1 l} \lambda_1^{k_1} \gamma^{(1)}_{N_1,l-k_1}(\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_m)}$$

Оцінювання складності методу. Проведемо підрахунок кількості арифметичних операцій, потрібних для реалізації наведеної схеми обчислення невідомих.

На першому кроці маємо $(p+1)[l(p+2)+1]$ рівнянь з $(p+1)[l(p+2)+1]$невідомими. Якщо для розв’язування системи (21) застосувати швидку схему розрізування, то на її реалізацію з точністю до головного члена буде виконано по $C_1\left(lp\right)^b + 4lp^3\log_2 l + 4lp^2\log_2(lp)$ операцій множення й ділення, та $C_2\left(lp\right)^b + 8lp^3\log_2 l + 8lp^2\log_2(lp)$ дій додавання на обчислювальній системі.

На другому кроці маємо $N_2[l(N_2+1)+1]$ рівнянь з $N_2[l(N_2+1)+1]$невідомими. Якщо для розв’язування системи (28) застосувати швидку схему розрізування, то на її реалізацію з точністю до головного члена буде виконано по $C_1\left(lN_2\right)^b + 4lN_2^3\log_2 l + 4lN_2^2\log_2(lN_2)$ операцій множення й ділення та $C_2\left(lN_2\right)^b + 8lN_2^3\log_2 l + 8lN_2^2\log_2(lN_2)$ адитивних дій на обчислювальній системі. Або ж урахуванням означення $N_2 = (p+1)[l(p+2)+1]$ з точністю до головного члена $C_1\left(lN_2\right)^3 + 4lN_2^3\log_2 l + 4lN_2^2\log_2(lN_2)$ операцій додавання та

$C_2\left(lN_2\right)^b + 8lN_2^3\log_2 l + 8lN_2^2\log_2(lN_2)$ множення й ділення, чи з точністю до головного члена- $N^6 l^5 \log_2 l$.

На третьому кроці маємо $N_3[l(N_3 + 1) + 1]$ рівнянь з $N_3[l(N_3 + 1) + 1]$невідомими. Якщо для розв'язування системи (21) застосувати швидку схему розрізування, то на її реалізацію з точністю до головного члена буде виконано по $N_3^3 l^2 \log_2 l$ операцій множення і ділення, або ж з урахуванням означення $N_2 = N[l(N + 1) + 1]$ та $N_3 = N_2[l(N_2 + 1) + 1]$ і з точністю до головного члена $p^{12} l^{11} \log_2 l$.

Продовжуючи аналогічні міркування і далі на m - му кроці маємо $N_m[l(N_m + 1) + 1]$ рівнянь з $N_m[l(N_m + 1) + 1]$ невідомими. Якщо для розв'язування системи (34) і далі застосувати швидку схему розрізування, то на її реалізацію з точністю до головного члена буде виконано по $N_m^3 l^2 \log_2 l$ операцій множення і ділення, або ж з урахуванням означення та $N_m = N_{m-1}[l(N_{m-1} + 1) + 1]$, $N_{m-1} = N_{m-2}[l(N_{m-2} + 1) + 1], \ldots, N_2 = N[l(N + 1) + 1]$, то з точністю до головного члена отримаємо складність алгоритму, що дорівнює $Q = p^{6(m-1)} l^{6(m-1)-1} \log_2 l$.

Аналіз похибок заокруглення. При комп'ютерній реалізації всякого достатньо складного алгоритму виникають похибки заокруглення проміжних обчислень. Сумарний ефект впливу похибок заокруглення можна враховувати за схемою [3], [8].

Позначимо через A початкові дані обчислювальної задачі, наприклад, компоненти заданого вектора, а через R – результат застосування до цих даних деякого точного алгоритму ψ. Тоді для R можна записати

$$R = \psi(A). \tag{39}$$

При реалізації алгоритму ψ всі операції будуть замінені машинними псевдоопераціями, а сам алгоритм – деяким машинним алгоритмом ψ_t. Отже, результатом його застосування буде

$$R_t = \psi_t(A), \tag{40}$$

тоді

$$\Delta = R - R_t \tag{41}$$

називають *похибкою обчислення на ЕОМ*. Такий підхід до врахування сумарної похибки заокруглення отримав назву *прямого аналізу похибок* [3, 8].

Обчислення R_t у багатьох реальних задачах можна розглядати також і як результат опрацювання збурених початкових даних A_t за точним алгоритмом ψ:

$$R_t = \psi(A_t). \tag{42}$$

Тоді елемент $H = A_t - A$, який зазвичай називають *еквівалентним збуренням*, також характеризує похибку розв'язування задачі. Останню рівність можна також записати у вигляді

$$R_t = \psi(A + H).$$

У такому випадку R_t можна розглядати як точний розв'язок тієї ж задачі, але зі збуреними на H початковими даними. Після введення яким-небудь способом метрики можна оцінити H й отримати кількісну оцінку впливу похибок заокруглення. Такий підхід називають *зворотним аналізом похибок* [8]. Його ідея належить Гівенсу.

Для аналізу похибок заокруглення, що виникають в обчислювальних системах, використовується методика, запропонована Дж.Х. Уілкінсоном [8].

При машинних обчисленнях зазвичай використовуються два режими обчислень – з *фіксованою* і *плаваючою комами*. Режим обчислення з плаваючою комою є основним для обчислювальних систем. У цьому режимі кожне ненульове число x може бути представлене парою чисел m і p так, що $x = m\xi^{-p}$. Тут ξ – основа системи числення а $p-$ ціле число, m – таке, що $1/\xi < m < \xi$.

Прийнято називати m − мантисою, а $p-$ порядком числа x. Припускається, що число (мантиса) x має t розрядів після коми (крапки), тобто комп'ютер має t-*розрядну* мантису. Запис $z = fl(x * y)$ означає, що стандартне число z з плаваючою комою отримане зі стандартних чисел x *та* y в результаті виконання арифметичної операції "+", " -", " ×", "/" з плаваючою комою. Для сучасних обчислювальних систем похибки окремих арифметичних операцій мають незначну величину, так що

$$z = fl(x * y)(1 + \varepsilon),$$

де $|\varepsilon| \le \xi^{-t}$. Тут $t -$ кількість розрядів у мантиси, призначених для зберігання чисел.

У багатьох випадках доводиться оцінювати похибки для багатокрокових методів. Для проведення оцінюваннь у цьому випадку отримано один корисний результат.

ТВЕРДЖЕННЯ 1. *Нехай до масиву початкових даних* $A\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *застосовується алгоритм* φ, *який складається з етапів* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ *так, що*

$$\hat{A}_t = \phi_t(A). \tag{43}$$

Тоді комп'ютерній реалізації φ_t *алгоритму* φ *відповідають еквівалентні збурення* α *масиву початкових даних A такі, що*

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k}\left(1 + \alpha^{(i)}\right) - 1. \tag{44}$$

На основі цієї оцінки вдається встановити наступний факт.

ТВЕРДЖЕННЯ 2. *Якщо при комп'ютерній реалізації алгоритму застосовується схема розрізування для систем рівнянь (21),(28),...(34) у режимі плаваючої коми і обчислення скалярних добутків проводяться з подвійною точністю, то сумарні еквівалентні збурення задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} \left\|\alpha_{i,j}^{(0)}\right\| \le 1.01 \cdot m \cdot C_0 \cdot \max_{k \in 1,m} \Big\{ &\|A\|, \left\|D_{2,2}^{(k)} - D_{2,1}^{(k)}(D_{1,1}^{(k)})^{-1} D_{1,2}^{(k)}\right\|, \\ &, \left\|F_2^{(k)} - D_{2,1}^{(k)}(D_{1,1}^{(k)})^{-1} F_1^{(k)}\right\|, \left\|F_1^{(k)} - D_{1,2}^{(k)} Z^{(k)}\right\| \Big\} \xi^{-t+1} \end{aligned}. \tag{45}$$

Оцінка свідчить про мале сумарне еквівалентне збурення. А це дає і добру оцінку точності розв'язку при комп'ютерній реалізації алгоритму.

Приклад. Засобами пакета комп'ютерної математики Maple було розв'язано систему алгебраїчних рівнянь 3-го порядку виду

$$\begin{pmatrix} 2 & x_{1,1}+x_{1,2} & x_{2,1}+x_{2,2} \\ x_{1,1}+x_{1,2} & x_{1,1}^2+x_{1,2}^2 & x_{2,1}x_{1,1}+x_{2,1}x_{1,2} \\ x_{2,1}+x_{2,2} & x_{2,1}x_{1,1}+x_{2,1}x_{1,2} & x_{2,1}^2+x_{2,2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ x_{1,1}y_1+x_{1,2}y_2 \\ x_{2,1}y_1+x_{2,2}y_2 \end{pmatrix}$$

Обчислено наступні значення розв'язків

$$b_0 = 0; \quad b_1 = -\frac{-x_{2,2}y_1 + x_{2,1}y_2}{-x_{2,1}x_{1,2} + x_{1,1}x_{2,2}}; \quad b_2 = -\frac{-x_{1,2}y_1 + x_{1,1}y_2}{-x_{2,1}x_{1,2} + x_{1,1}x_{2,2}}.$$

Висновки. Викладено обчислювальний метод для визначення параметрів у багатофакторній лінійній регресії. Проведено оцінювання складності методу та аналіз похибок заокруглення. Метод володіє доброю точністю розв'язку при комп'ютерній реалізації алгоритму. Наведений обчислювальний підхід для обчислення коефіцієнтів регресії має і теоретичне, і практичне значення.

Conclusions. The article represents a numeric method for calculation of parameters in multifactor linear regression. Estimation of the method complexity and approximation errors have been executed. The method possesses good solving accuracy of algorithm's computer realization. Described approach for of regression coefficients has both theoretical and practical value.

Список використаної літератури

1. Радченко, С.Г. Методы наилучшего решения регрессионных задач [Текст] / С. Радченко // Вісник Національного авіаційного університету. – 2012. – №1(50). – С.32−39.

2. Літнарович, Р.М. Побудова і дослідження математичної моделі за джерелами експериментальних даних методами регресійного аналізу: навч. посібник [Текст] / Р. Літнарович. – Рівне: МЕГУ, 2011. – 140 с.

3. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры: учебник [Текст] / В. Воеводин. − М.: Наука, 1977. − 303 с.

4. Лук'яненко, І.Г. Економетрика [Текст] / І. Лук'яненко, Л. Краснікова. – К.: Знання, 1998.

5. Недашковський, М.О. Швидка схема розв'язання для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями: монографія [Текст] / М. Недашковський // Доп. НАН України; серія А. − К. − №4. − 1995. − С.23−29.

6. Недашковський, М.О. Обчислення з $\lambda-$матрицями [Текст] / М. Недашковський, О. Ковальчук. − К.: Наукова думка, 2007. − 294 с.

7. Недашковский, Н.А. О решении систем алгебраических уравнений с λ-матрицами [Текст] / Н. Недашковский // Журнал вычислительной математики и математической физики. − 1988. − Т.28. − С.439−443.

8. Уилкинсон, Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений [Текст] / Дж. Уилкинсон. − М.: Наука, 1970. − 504 с.

Отримано 10.08.2014