

УДК 393.3

**Віктор Опанасович, доктор фіз.-мат. наук;  
Микола Слободян, канд. фіз.-мат. наук**

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

**ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА РІВНИМИ  
СПІВВІСНИМИ НАСКРІЗНИМИ ТРІЩИНАМИ ПРИ ЗЛИТТІ  
ПЛАСТИЧНИХ ЗОН МІЖ НИМИ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ  
БЕРЕГІВ ТРІЩИН**

*Резюме.* Досліджено задачу про двовісний згин розподіленими згинальними моментами на нескінченності ізотропної пластини зі співвісними тріщинами однакової довжини за симетричного відносно них зовнішнього навантаження з урахуванням зони контакту їх берегів та за наявності у їх вершинах пластичних зон, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніру при злитті пластичних зон для внутрішніх вершин тріщин. Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластин отримано аналітичний розв'язок задачі у класі функцій обмежених у вершинах пластичних зон. Визначено числово довжину пластичних зон та розходження берегів тріщин у їх вершинах.

*Ключові слова:* пластина, двовісний згин, тріщина, пластичні зони, умова пластичності Треска.

**Victor Opanasovich, Mykola Slobodyan**

**BEND OF ISOTROPIC PLATE WITH TWO IDENTICAL CO-AXIAL  
OPEN CRACKS AT PLASTIC ZONES MEETING BETWEEN THEM  
TAKING INTO ACCOUNT THE CONTACT OF CRACK BANKS.**

*Summary.* A problem of biaxial bending under distributed on infinity moments of isotropic plate with the co-axial cracks of identical length is stated and solved. The vectors of the applied to the plate moments are perpendicular and parallel to the cracks. Under the action of the external loading the crack banks are expected to contact smoothly in the areas of fixed width. Plastic zones appeared in their tips, where the terms of Trasca's plasticity are satisfied as a surface layer or plastic to the hinge. For the internal crack tips the plastic zones are considered to meet. Due to the contact of crack banks the problem is presented as superposition of two problems: plane problem of elasticity and bending problem taking advantage of classic theory. The problem is solved with such boundary conditions:  $\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_0$ ,  $M_y^{\pm} = M_0$ ,  $x \in LL$ ;  $\sigma_{yy}^{\pm} = -N/(2h)$ ,  $M_y^{\pm} = \beta hN$ ,  $[v] + \alpha h[\partial_y w] = 0$ ,  $x \in L$ ;  $\sigma_{xy}^{\pm} = 0$ ,  $P_y^{\pm} = 0$ ,  $x \in L'$ , where  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  and  $u$ ,  $v$  – components of stress tensor and components of displacement vector on the axis  $Ox$  and  $Oy$  of the plane problem;  $\sigma_0$  and  $M_0$  – unknown quantities, normal stress and bending moment in plastic zones;  $N$  – contact force ( $N > 0$ );  $w$  – deflection plate;  $M_y$  і  $P_y$  – bending moment and cutting force according to Kirchhoff;  $L$  – area, where cracks are placed,  $LL$  – area, where plastic zone is placed;  $L' = L \cup LL$ ; "+" and "-" are marked limit value of the appropriate value at  $y \rightarrow \pm 0$ ;  $[f] = f^+ - f^-$ ;  $\alpha = 0.5(1 + (1 - \gamma)^2)$ ,  $\beta = 1 - \gamma/3$ ,  $\gamma = h_1/h$ ,  $h$  – plate height,  $h_1$  – the width of the contact area the interfaces cracks. Using the complex potentials of plane problem and classic theory of plate bending the solving of problem is reduced to the problem of linear coupling, on the basis of which the analytical solution of the problem is built in the class of functions limited in the plastic zones tips. Using the conditions of plasticity it was found analytically: unknown normal tension and bending moment in the plastic zones accordingly in a plane problem and problem of bending; divergence of crack banks and length of plastic zones in their external tips. The numerical analysis of the problem was conducted, loading at which meet in the internal tips. Graphic dependences of the plastic zone length and divergence of the crack banks in their external tips on the change of the external loading and distance between the internal crack tips are presented.

*Key words:* plate, biaxial bending, crack, plastic zone, Trasca's plasticity condition.

**Вступ.** Елементи конструкцій у вигляді пластин дуже широко використовуються у різних галузях техніки в промисловості за дії різного зовнішнього навантаження, а у процесі їх експлуатації чи виготовлення в них можуть виникати тріщини, які є сильними концентраторами напружень, що призводить до зниження міцнісних і надійнісних характеристик конструкцій.

Дослідженням згину пластин з тріщинами без урахування контакту їх берегів займалось багато дослідників, що відображено у монографіях [1, 5 – 7, 13 – 15], при цьому у [5, 6] враховано наявність пластичних зон у їх вершинах. З фізичних міркувань зрозуміло, що береги тріщин за згину будуть контактувати: у працях [2 – 4, 16 – 19, 21 – 24, 26] вважається, що контакт відбувається по лінії, а у [9 – 12, 20, 25] по області постійної ширини. Відзначимо, що лише у публікаціях [27, 28] враховано наявність пластичних зон у вершинах наскрізної прямолінійної тріщини.

У даній роботі з використанням апарату теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластини досліджена задача двовісного згину ізотропної пластини розподіленими згинальними моментами на нескінченності з наскрізними співвісними тріщинами однакової довжини, береги яких приходять у гладкий контакт по області постійної ширини поблизу однієї з основ пластини. У вершинах тріщин наявні пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніру [5, 6], при цьому припускається, що пластичні зони у внутрішніх вершинах тріщин злилися. Отримано аналітичний розв'язок задачі в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Аналітично визначено довжини пластичних зон та числово пораховано розходження берегів тріщин у їх вершинах.

**Формулювання задачі.** Дослідимо двовісний згин розподіленими моментами на нескінченності ізотропної пластини завтовшки  $2h$  з двома рівними по довжині наскрізними прямолінійними співвісними тріщинами завдовжки  $2l$ . Припускається, що під дією симетричного відносно тріщин зовнішнього навантаження береги тріщин гладко контактують по області постійної ширини  $h_1$  [9] вздовж тріщин, а у їх вершинах наявні пластичні зони, причому для внутрішніх вершин вони злилися. Вважаємо, що у пластичних зонах виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніру [5, 6].

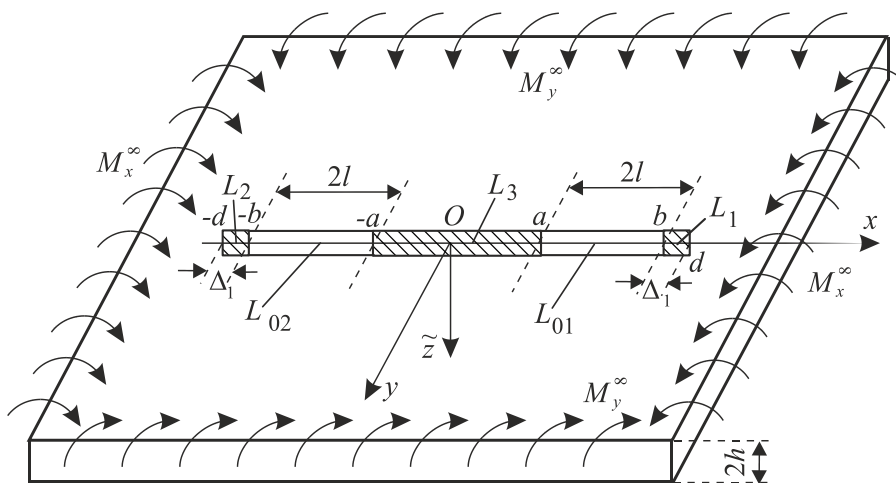


Рисунок 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Figure 1. Chart of loading of plate and placing of crack

За рахунок контакту берегів тріщин розв'язок задачі подано у вигляді суперпозиції двох задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину з використанням класичної теорії. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат  $Oxy$  з початком координат посередині між тріщинами, направивши вісь  $Ox$  уздовж них. Згинальні моменти на нескінченості позначимо через  $M_x^\infty$  і  $M_y^\infty$ , лінії дійсної осі, де розміщені тріщини, – через  $L_{01}$  і  $L_{02}$ , внутрішню пластичну зону – через  $L_3$ , зовнішні – через  $L_1$  і  $L_2$ , довжини зовнішніх пластичних зон – через  $\Delta_1$ , координати вершин тріщин – через  $-a$ ,  $-b$ ,  $a$ ,  $b$ , кінці пластичних зон – через  $-d$ ,  $d$  (див. рис.1). Крім того, введемо позначення  $L = L_{01} \cup L_{02}$ ,  $LL = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ ,  $L' = L \cup LL$ .

Згідно з формулюванням задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^\pm = \sigma_0, M_y^\pm = M_0, x \in LL, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^\pm = -N/(2h), M_y^\pm = \beta hN, [v] + \alpha h[\partial_y w] = 0, x \in L, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^\pm = 0, P_y^\pm = 0, x \in L', \quad (3)$$

де  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{xy}$  та  $u$  і  $v$  – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення на осі  $Ox$  і  $Oy$  у плоскій задачі;  $\sigma_0$  і  $M_0$  – шукані величини, відповідно нормальне напруження і згинальний момент у пластичних зонах;  $N$  – контактне зусилля ( $N > 0$ );  $w$  – прогин пластини;  $M_y$  і  $P_y$  – згинальний момент та перерізувальна сила у сенсі Кірхгофа; значками "+" і "-" позначено граничне значення відповідної величини при  $y \rightarrow \pm 0$ , квадратна дужка означає стрибок відповідної величини на берегах тріщини, тобто  $[f] = f^+ - f^-$ ; константи  $\alpha$  і  $\beta$  мають вигляд [9]

$$\alpha = 0.5 \{1 + (1 - \gamma)^2\}, \beta = 1 - \gamma/3, \gamma = h_1/h. \quad (4)$$

**Побудова розв'язку задачі.** Введемо до розгляду комплексні потенціали плоскої задачі  $\Phi(z)$  і  $\Omega(\bar{z})$  та класичної теорії згину пластин  $\Phi_3(z)$  і  $\Omega_3(\bar{z})$ , при цьому скористаємося залежностями [8, 14]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (6)$$

$$\partial_x g = \Phi_3(z) - \Omega_3(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_3'(z)}, \quad (7)$$

$$f = \kappa\Phi(z) + \Omega_3(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_3'(z)}, \quad (8)$$

де  $\mu = 0.5E/(1 + \nu)$  – модуль зсуву,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона

матеріалу пластини

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu), \quad \kappa' = (3 + \nu)/(1 - \nu),$$

$$g = \partial_x w + i \partial_y w, \quad f(x) = \left( M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right) / m, \quad (9)$$

$$m = -D(1 - \nu), \quad \partial_\alpha f = \partial f / \partial \alpha,$$

$c'$  – невідома дійсна стала,  $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$  – циліндрична жорсткість пластини.

Введені комплексні потенціали при великих  $|z|$  можна подати у вигляді [8, 14]

$$\Phi(z) = O(1/z^2), \quad \Omega(z) = O(1/z^2),$$

$$\Phi_3(z) = \rho'_\alpha O(1/z^2), \quad \Omega_3(z) = -\rho'_\alpha \rho'_\beta + O(1/z^2), \quad (10)$$

де

$$\rho'_\alpha = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1 + \nu)}, \quad \rho'_\beta = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2m}, \quad (11)$$

$M_x^\infty$  і  $M_y^\infty$  – згинальні розподілені моменти на нескінченості.

Якщо врахувати (5) і (8), то з крайових умов (1) – (3) отримаємо

$$(\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- = 0, \quad x \in L', \quad (12)$$

$$(\kappa \Phi_3(x) - \Omega_3(x))^+ - (\kappa \Phi_3(x) - \Omega_3(x))^- = 0, \quad x \in L'.$$

Врахувавши (10) та розв'язавши задачі лінійного спряження (12), отримаємо

$$\Omega(z) = \Phi(z), \quad \Omega_3(z) = \kappa \Phi_3(z) - (\kappa + 1) \rho'_\alpha \rho'_\beta. \quad (13)$$

Врахувавши крайові умови (1) та (13), на основі (5) і (8) можемо записати

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \sigma_0, \quad x \in LL, \quad (14)$$

$$-ic' + m \left\{ \kappa (\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) - (\kappa + 1) \rho'_\alpha \rho'_\beta \right\} = M_0, \quad x \in LL. \quad (15)$$

Введемо функцію

$$F(z) = -2\beta h^2 \Phi(z) - m \kappa \Phi_3(z) + 0.5 \left\{ ic' + m \left( (\kappa + 1) \rho'_\alpha \rho'_\beta \right) \right\}. \quad (16)$$

Як випливає з (14) і (15), вона задовольняє крайовій умові

$$F^+(x) + F^-(x) = a_1, \quad x \in LL, \quad (17)$$

де

$$a_1 = -2h^2 \beta \sigma_0 - M_0. \quad (18)$$

З крайових умов (2) і (3), врахувавши (5), (8), (9) та залежності (13), матимемо

$$N = -2h(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)), \quad x \in L, \quad (19)$$

$$M_y = -ic' + m \left\{ \frac{1}{2}(\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) - (\frac{1}{2} + 1) \frac{1}{2} \right\}, \quad x \in L.$$

Підставляючи (19) у другу крайову умову (2) та беручи до уваги (16), отримаємо

$$F^+(x) + F^-(x) = 0, \quad x \in LL. \quad (20)$$

Розв'язуючи задачу лінійного спряження (17) і (20) у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон, будемо мати

$$F(z) = \frac{a_1 X_1(z)}{2\pi i} \int_{LL} \frac{dt}{X_1^+(t)(t-z)}, \quad (21)$$

де

$$X_1(z) = \sqrt{z^2 - d^2}. \quad (22)$$

Як бачимо з (10) і (16), функцію  $F(z)$  при великих  $|z|$  можна подати у вигляді

$$F(z) = (ic' - M_y^\infty)/2 + O(1/z^2). \quad (23)$$

Якщо розвинути праву частину (21) у ряд при великих  $|z|$  та прирівняти коефіцієнти, врахувавши розвинення (23), то після перетворень отримаємо

$$c' = 0, \quad -\frac{\pi M_y^\infty}{2a_1} = \arcsin \frac{a}{d} + \arcsin \frac{b}{d}. \quad (24)$$

З крайових умов (3), врахувавши (5), (8), (9), (13), (24), одержимо

$$(\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^+ + (\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^- = 0, \quad x \in \mathcal{L}', \quad (25)$$

$$(\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x))^+ + (\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x))^- = 0, \quad x \in \mathcal{L}'.$$

Розв'язавши задачі лінійного спряження (25) у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон, та врахувавши поведінку функцій  $\Phi(z)$  і  $\Phi_3(z)$  на нескінченності (10), матимемо

$$\bar{\Phi}(z) = \Phi(z), \quad \bar{\Phi}_3(z) = \Phi_3(z). \quad (26)$$

На основі третьої крайової умови (2), врахувавши (6), (7), (13) і (26), отримаємо

$$(\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^+ - (\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^- = 0, \quad x \in L, \quad (27)$$

де

$$\delta = \frac{\kappa + 1}{\alpha\mu h(1 + \kappa^2)}$$

Використавши формули (14) і (15) та врахувавши (24) і (26), можемо записати

$$(\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^+ + (\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^- = A, \quad x \in LL, \quad (28)$$

де

$$A = \delta\sigma_0 + 2\left\{M_0 / m + (\kappa^2 + 1) \frac{\Gamma^2 \alpha}{\Gamma^2 \alpha} \right\} / \kappa^2$$

Задачу лінійного спряження (27) і (28), подамо так:

$$\begin{aligned} & [\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) - A/2]^+ + [\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) - A/2]^- = 0, \quad x \in LL, \\ & [\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) - A/2]^+ - [\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) - A/2]^- = 0, \quad x \in L. \end{aligned} \quad (29)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (29) у класі функцій, обмежених на кінцях ліній  $LL$ , отримаємо

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) - A/2 = 0. \quad (30)$$

Врахувавши розвинення (10), на основі (30) отримаємо

$$A = 4\Gamma$$

або

$$\delta m \kappa^2 \sigma_0 + 2M_0 = 2M_y^\infty. \quad (31)$$

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (30) і (16) відносно  $\Phi(z)$  і  $\Phi_3(z)$ , отримаємо

$$\Phi_3(z) = c_3 + c_4 F(z), \quad \Phi(z) = c_5 + c_6 F(z), \quad (32)$$

де

$$c_3 = -(\beta h^2 A + \delta B)c_6 / 2, \quad c_4 = -\delta c_6 / 2, \quad c_5 = (Am\beta + 4B)c_6 / 4, \\ c_6 = 2 / (m\beta - 4\beta h^2), \quad B = -0.5m((1 - \beta)\beta / \beta).$$
 (33)

Для знаходження  $\sigma_0$  і  $M_0$  скористаємося спочатку умовою пластичності Треска у вигляді поверхневого шару на нижній основі пластини [6]

$$\sigma_0 + 3M_0 / (2h^2) = \sigma_Y,$$
 (34)

де  $\sigma_Y$  – границя текучості матеріалу пластини.

Розв'язуючи систему рівнянь (31) і (34) відносно  $\sigma_0$  і  $M_0$ , матимемо

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_Y} = \frac{4(1 - \beta)}{4 + \beta}, \quad \frac{M_0}{2h^2\sigma_Y} = \frac{4\beta + \beta}{4 + \beta},$$
 (35)

де

$$\beta = \frac{3M_y^\infty}{2h^2\sigma_Y}, \quad \beta = \frac{4(3 + \nu)}{\alpha(1 + \nu)}.$$

Якщо скористатись умовою пластичного шарніру [5, 6]

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_Y}\right)^2 + \frac{M_0}{h^2\sigma_Y} = 1,$$
 (36)

то

$$\beta = \sqrt{(\beta/12)^2 + \rho} - \beta/12, \quad \frac{M_0}{2h^2\sigma_Y} = \beta + \beta/4, \quad \rho = 1 - 2\beta/3.$$
 (37)

Розкриття тріщини на нижній основі пластини у їх крайніх вершинах  $\delta$  знайдемо за формулою

$$\delta = \int_d^b \frac{\partial}{\partial x} ([v] + [v_3]) dx,$$

з якої після відповідних перетворень отримаємо

$$\frac{\delta E}{\sigma_Y} = \beta \left\{ 2b \ln \frac{a\sqrt{d^2 - b^2} + b\sqrt{d^2 - a^2}}{b\sqrt{b^2 - a^2}} + \frac{a}{2} \ln \frac{(d^2 - \sqrt{(d^2 - b^2)(d^2 - a^2)})^2 - a^2b^2}{(d^2 + \sqrt{(d^2 - b^2)(d^2 - a^2)})^2 - a^2b^2} \right\},$$
 (38)

де

$$\theta_0 = \frac{16(1+\alpha)(3\beta\theta_0 + M_0^0)}{\pi\alpha(\theta_0 + 12\beta)}$$

На основі залежності (24) довжину пластичної зони можна визначити за формулою

$$\Delta_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \theta_0}}{\cos \theta_0} - b, \tag{39}$$

де

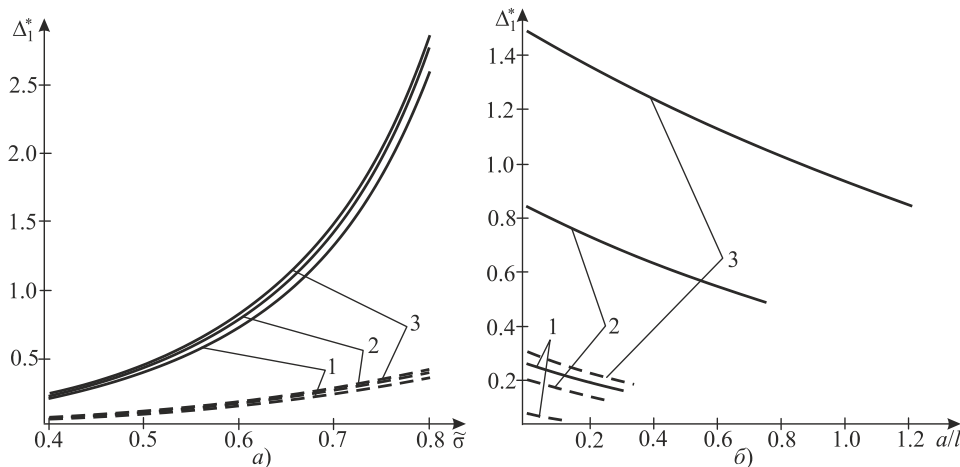
$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\theta_0}{M_0^0 + 3\beta\theta_0}$$

Зауважимо, що для  $a=0$  на основі залежностей (38) і (39) отримаємо відповідні формули для розходження берегів тріщини і її вершині та для довжини пластичної зони для наскрізної прямолінійної тріщини завдовжки  $4l$  [27].

**Числовий аналіз.** Проведений числовий аналіз задачі для  $\nu = 0.3$ , який подано на рис. 2 і 3, де суцільні лінії отримані на основі умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару, а штрихові – з використанням умови пластичного шарніру.

На рис. 2 наведено графічну залежність обезрозміреної довжини пластичної зони  $\Delta_1^* = \Delta_1/l$  від  $\theta_0$  при  $a/l = 0.1$  рис. 2 а) (крива 1 побудована при  $\gamma = h_1/h = 0$ , крива 2 – при  $\gamma = 0.13$ , крива 3 – при  $\gamma = 0.2$ ) та від відносної відстані між тріщинами  $a/l$  при  $\gamma = 0.13$  рис. 2 б) (крива 1 побудована при  $\theta_0 = 0.4$ , крива 2 – при  $\theta_0 = 0.6$ , крива 3 – при  $\theta_0 = 0.7$ ).

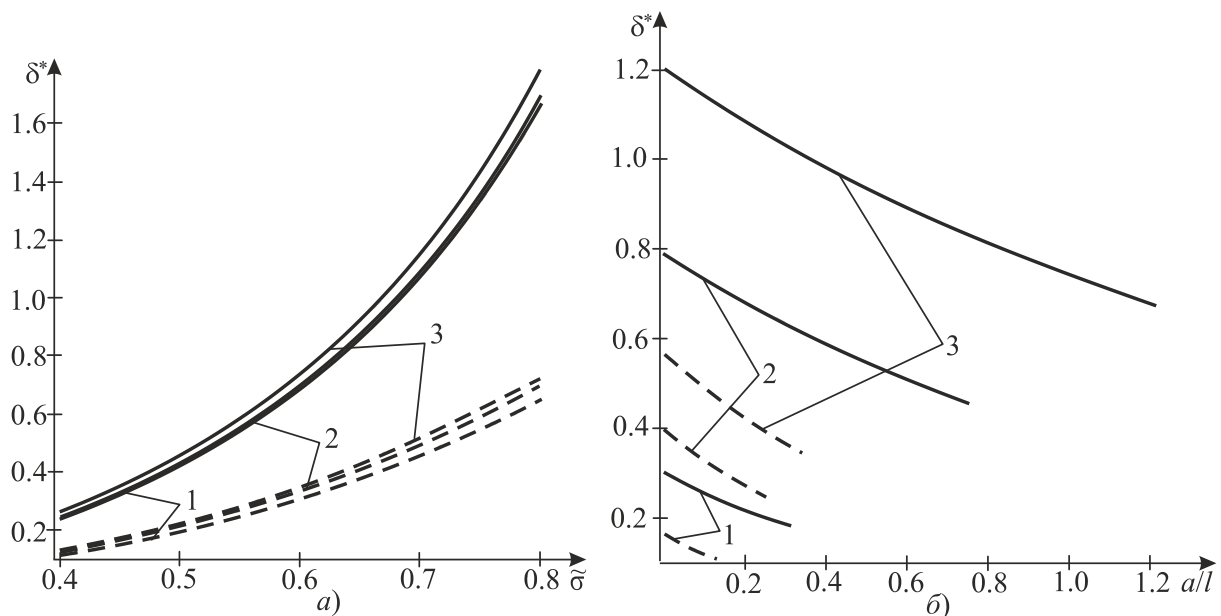
На рис. 3 наведено графічну залежність приведенного розходження берегів тріщини  $\delta^* = (\delta E)/(\sigma_Y l)$  у їх зовнішніх вершинах на нижній основі пластини від  $\theta_0$  при  $a/l = 0.1$  рис. 3 а) (крива 1 побудована при  $\gamma = h_1/h = 0$ , крива 2 – при  $\gamma = 0.13$ , крива 3 – при  $\gamma = 0.2$ ) та від відносної відстані між ними  $a/l$  при  $\gamma = 0.13$  рис. 3 б) (крива 1 побудована при  $\theta_0 = 0.4$ , крива 2 – при  $\theta_0 = 0.6$ , крива 3 – при  $\theta_0 = 0.7$ ).



Рисуюнок 2. Графічні залежності обезрозміреної довжини пластичної зони від відповідних величин

Figure 2. Graphic dependences of the plastic zone length on the corresponding values





**Рисунок 3.** Графічні залежності розходження берегів тріщин на нижній основі пластини від відповідних величин

**Figure 3.** Graphic dependences of the divergence of the crack banks on lower plate basis on corresponding values

Числовий аналіз для двох співвісних наскрізних тріщин показав, що при  $a/l < a^*$  внутрішні пластичні зони зливаються (див. табл. 1).

**Таблиця 1**

$\mathcal{G}$	$a^*$	
	Умова пластичності Треска у вигляді поверхневого шару	Умова пластичного шарніра
0,3	0,1876	0,0872
0,4	0,3088	0,1324
0,5	0,4852	0,1879
0,6	0,7563	0,2567
0,7	1,2178	0,3435

**Висновки.** Довжина пластичної зони у зовнішніх вершинах тріщин та розходження берегів тріщин на нижній основі пластини визначені з використанням умови пластичності у вигляді поверхневого шару є більшими, ніж із використанням умови пластичності у вигляді пластичного шарніру при однакових значеннях  $\mathcal{G}$ . Збільшення ширини області контакту берегів тріщин призводить до незначного зростання довжини пластичної зони та розходження берегів тріщин у їх зовнішніх вершинах. При збільшенні величини зовнішнього навантаження довжина пластичної зони та величина розходження берегів тріщин збільшується, а при віддаленні тріщин одна від одної ці параметри зменшуються незалежно від використаної умови пластичності. При заданому навантаженні пластини гранична відстань між внутрішніми вершинами тріщин, коли пластичні зони зливаються, є більшою з

використанням умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару, ніж за умовою пластичності у вигляді пластичного шарніру.

**Conclusions.** The length of plastic zone in the external crack tips and crack banks divergence on lower basis of the plate using the condition of plasticity as a surface layer is more than that using the condition of plasticity as plastic hinge at identical values  $\mathcal{K}$ . The increase of the contact area of crack banks results in the insignificant increase of length of the plastic zone and divergence of crack banks in their external tips. When the external loading is increased the length of plastic zone and the size of divergence of crack banks increase, and when the cracks move away from each other these parameters diminish regardless of the used condition of plasticity. At the given loading of the plate the maximum distance between the internal crack tips, when plastic zones meet, is greater with the use of condition of Trasca's plasticity as a surface layer than under the condition of plasticity as plastic hinge.

### Список використаної літератури

1. Бережницький, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – К.: Наукова думка, 1979. – 400 с.
2. Божидарнік, В. Згин ізотропної пластини, ослабленої розрізом по дузі кола з контактуючими берегами [Текст] / В. Божидарнік, В. Опанасович, П. Герасимчук // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 7 – 16.
3. Божидарнік, В.В. Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів [Текст] / В.В. Божидарнік, В.К. Опанасович, П.В. Герасимчук // Проблеми прочності. – 2006. – № 85 (383). – С. 135 – 141.
4. Божидарнік, В.В. Згин пластини з двома рівними симетричними тріщинами по дузі кола з урахуванням контакту їх берегів [Текст] / В.В. Божидарнік, В.К. Опанасович, П.В. Герасимчук // Механічна втома матеріалів: праці 13-го міжн. колоквиуму. – Тернопіль: Тернопільський державний технічний університет ім. Івана Пулюя, 2006. – С. 450 – 455.
5. Кир'ян, В.І. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій [Текст] / В.І. Кир'ян, В.А. Осадчук, Николишин, М.М. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
6. Кушнір, Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами [Текст] / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
7. Мазурак, Л.П. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.П. Мазурак, Л.Т. Бережницький. – Київ: Наукова думка, 1990. – 256 с.
8. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мусхелишвили – М.: Наука, 1966. – 707 с.
9. Опанасович, В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь [Текст] / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету: міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»). – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123 – 127.
10. Опанасович, В.К. Згин зосередженими моментами пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів [Текст] / В.К. Опанасович, І.М. Яцик, Г.Т. Сулим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 4. – С. 71 – 81.  
Те саме: Opanasovych V. K., Yatsyk I. M., Sulym H. T. Bending of Reissner's plate containing a through-the-thickness crack by concentrated moments taking into account the width of a contact zone of its faces // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 187, № 5 – P. 620 – 634.
11. Опанасович, В. Згин розподіленими моментами на нескінченності ізотропної пластини з періодичною системою колінеарних наскрізних тріщин з урахуванням контакту берегів тріщин [Текст] / В. Опанасович, М. Дорош // Тез. доп. 7-го українсько-польського наук. симп. «Актуальні задачі механіки неоднорідних структур». – Львів, 2007. – С. 75 – 76.
12. Опанасович, В. Комбінований згин з розтягом пластини, ослабленої двома колінеарними тріщинами, береги яких контактують [Текст] / В. Опанасович, М. Дорош // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 194 – 206.
13. Панасюк, В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами [Текст] / В.В. Панасюк. – Київ: Наук. думка, 1968. – 246 с.
14. Прусов, И.А. Метод сопряжения в теории плит [Текст] / И.А. Прусов. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
15. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – Київ: Наук. думка, 1988. – 324 с.
16. Шацкий, И.П. Изгиб пластины, содержащей периодическую систему параллельных разрезов с

контактируючими кромками [Текст] / И.П. Шацкий // Приклад. механика. – 1991. – 27, № 13. – С. 56 – 61.

17. Шацкий, И. Взаємовплив паралельних тріщин з берегами, які контактують, при згині пластин [Текст] / І. Шацький, Т. Даляк // Машинознавство. – 2000. – № 1. – С. 27 – 30.

18. Шацкий, И.П. Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині [Текст] / І.П. Шацький // Доповіді НАН України. – 1995. – № 10. – С. 62 – 64.

19. Шацкий, И.П. Змикання берегів колінеарних тріщин при згині пластини на пружній основі [Текст] / І.П. Шацький, М.В. Маковійчук // Машинознавство. – 2004. – № 6. – С. 10 – 12.

20. Dempsey, J.P. Closure of a through crack in a plate under bending [Текст] / Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Slepuyan L.L. // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – 35. – P. 4077 – 4089.

21. Heming, F.S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate [Текст] / Heming F.S. Jr. // International Journal of Fracture. – 1980. – 16, № 4. – P. 289 – 304.

22. Hui, C.Y. A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments [Текст] / Hui C.Y., Zehnder Alan T. // International Journal of Fracture. – 1993. – 61. – P. 211 – 229.

23. Hui, C.Y. Williams meets von Karman: Mode coupling and nonlinearity in the fracture of thin plates [Текст] / Hui C.Y., Zehnder Alan T., Potdar Y.K. // International Journal of Fracture. – 1998. – 93. – P. 409 – 429.

24. Jones, D.P. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate [Текст] / Jones D.P., Swedlow J.L. // International Journal of Fracture. – 1975. – 11, № 6. – P. 897 – 914.

25. Slepuyan, L.I. Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending [Текст] / Slepuyan L.I., Dempsey J.P., Shekhtman I.I. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – 43. – P. 1727 – 1749.

26. Young, M. Cracked plates subjected to out-of-plane tearing loads [Текст] / Young M., Sun C. // International Journal of Fracture. – 1993. – 60. – P. 1 – 18.

27. Опанасович, В. Згин ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту їх берегів за наявності пластичних зон у її вершинах [Текст] / В. Опанасович, М. Слободян // Збірник наукових праць 5-ої Міжнародної конференції «Механіка руйнування матеріалів та міцності конструкцій» 24 – 27 червня. – Львів, 2014 р.; за заг. редакцією академіка НАН України В.В. Панасюка. – С. 403 – 408.

28. Опанасович, В. Двосторонній згин ізотропної пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням контакту її берегів та пластичних зон у її вершинах [Текст] / В. Опанасович // Сучасні проблеми механіки і математики. В 3-ох томах; за заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2013. – Т. 2. – С. 83 – 85.

*Отримано 23.03.2015*

*УДК 620.197.3*

**Звеномира Слободян, канд. техн. наук;  
Ярослав Хабурський; Ольга Максимів**

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка Національної академії наук України*

## **ОСОБЛИВОСТІ КОРОЗІЙНО-ВТОМНОГО РУЙНУВАННЯ СТАЛІ 35 У ВОДІ В ПРИСУТНОСТІ ЕКСТРАКТУ ДУБОВОЇ СТРУЖКИ**

*Резюме. Встановлено, що ефективність протикорозійного захисту середньовуглецевої сталі у воді екстрактом дубової стружки зростає з підвищенням його концентрації. Ступінь захисту від корозії при цьому сягає 85...97% відповідно за концентрації інгібітора 0,8...2 г/л. Еклекрохімічними дослідженнями встановлено, що екстракт є інгібітором змішаної дії, який гальмує обидві електродні реакції шляхом формування на поверхні сталі хемосорбційної плівки.*

*В присутності інгібітора (0,8...2 г/л) опір корозійно-втомному руйнуванню сталі підвищується в середньому в 3 – 4 рази, при цьому змінюється характер корозійно-втомного руйнування. Аналіз макрофрактограм показав, що екстракт дубової стружки впливає на процес зародження втомної тріщини: у воді зародження від поверхні зразка відбувалося за міжзерним*