



**С. В. ТЫНЫНА,**  
канд. техн. наук  
(ИГТМ НАН Украины)



**О. В. РЯБЦЕВ,**  
канд. техн. наук  
(ИГТМ НАН Украины)



**А. Е. ШЕВЧЕНКО,**  
науч. сотрудник  
(Технический университет  
«Фрайбергская горная академия»,  
Германия)

**Актуальность.** Один из наиболее важных этапов любого процесса – его планирование. Большинство научно обоснованных методов планирования и организации процессов, постановки и проведения экспериментальных исследований опираются на литературу 1960–80-х годов. Если раньше для решения сложных задач, связан-

УДК 629.7

## Моделирование непрерывных во времени процессов на примере фильтрования тонкодисперсной суспензии

Для описания процессов, непрерывных во времени, обосновано использование научных методов планирования эксперимента, в которых параметр «время» представляется в безразмерной форме. Приведен основанный на данном подходе алгоритм получения математической модели отдельного процесса, протекающего во времени. Показано построение математической модели на примере исследования процесса фильтрования тонкодисперсной суспензии глубоководных органоминеральных осадков (ГВОМО) при пульсирующем давлении.

**Ключевые слова:** моделирование непрерывных процессов, планирование эксперимента, безразмерные параметры, математическая модель, фильтрование тонкодисперсной суспензии.

**Контактная информация:** haritonroots@gmail.com.

ных с построением математических моделей, описывающих технологические процессы, требовались значительные ресурсы и время, то в настоящий момент подобные задачи можно решить при минимальных затратах и в кратчайшие сроки. При этом определяющий фактор – время.

При современном развитии вычислительной техники, измерительной и регистрирующей аппаратуры и технологий, когда обработка результатов измерений возможна в режиме реального времени, необходимо переосмыслить «старые» подходы, используемые при организации процессов производств и планировании экспериментов.

**Постановка задачи.** Для изучения сложных систем и процессов наиболее целесообразно применять статистические методы планирования эксперимента [1], где время было бы представлено в безразмерной форме. Это в значительной степени облегчает осмысление результатов исследований.

При полноценном исследовании процесса постановка всех возможных опытов для получения математической модели связана с огромной трудоемкостью эксперимента, так как нередко количество опытов очень велико. Задача планирования эксперимента состоит в установлении минимально необходимого количества опытов.

Согласно математической теории активного эксперимента [2] исследуемый процесс представляется в виде структурной диаграммы с входными и выходными параметрами («черного ящика») (рис. 1).

Как правило, входные параметры – это дискретные величины, представляющие собой точки в факторном пространстве. На-

пример, для процесса с двумя входными факторами  $x_1$  и  $x_2$ , варьируемыми на двух и трех уровнях, факторное пространство будем иметь вид, показанный на рис. 2.

Проведение исследований процессов позволяет использовать разные планы экспериментов: полные факторные (ПФЭ) и дробные факторные (ДФЭ) эксперименты, центральные композиционные планы (ЦКП) с ядром ПФЭ или ДФЭ и некомпозиционные планы [1]. В ходе каждого опыта по принятому плану эксперимента измеряют параметры  $y_i$  (отклики), представляющие собой точки, соответствующие  $n$ -му опыту.

На основании полученных данных строят математическую модель процесса, согласно которой определяют соответствие входных и выходных параметров. При построении математических моделей используют линейные, полиномиальные и логарифмические зависимости, позволяющие прогнозировать значение параметров  $y_i$  исходя из уровня варьирования факторов. Такие зависимости лучше всего использовать при изучении процессов, в которых не учитывается параметр «время».

Однако большинство исследуемых процессов непрерывны и зависят от времени, т. е. регрессионно-статистические зависимости сложно использовать для описания моделей, непрерывных во времени. Отсюда следует задача разработки методики построения математических моделей процессов, в которых выходные параметры функционально зависят от времени, с использованием на-

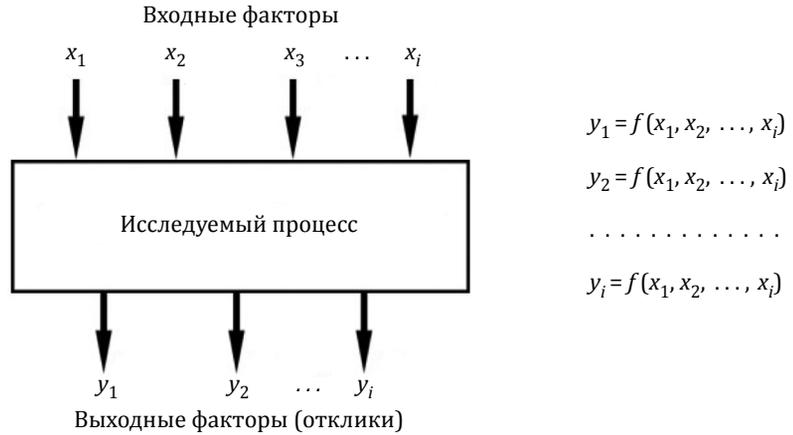


Рис. 1. Структурная диаграмма процесса.

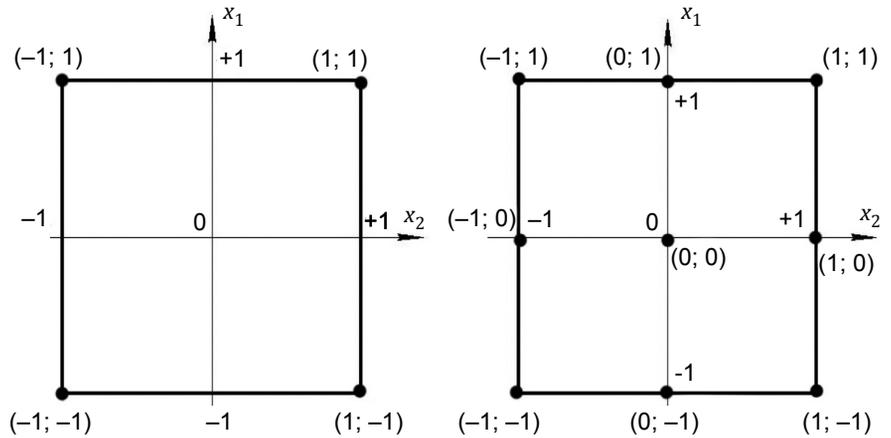


Рис. 2. Точки факторного пространства планов  $2^2$  и  $3^2$ : -1, 0 и +1 – нижний, средний и верхний уровни варьирования факторов.

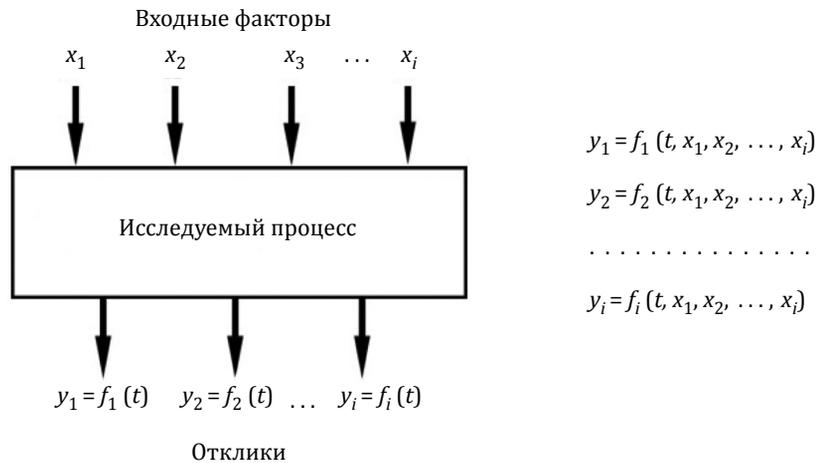
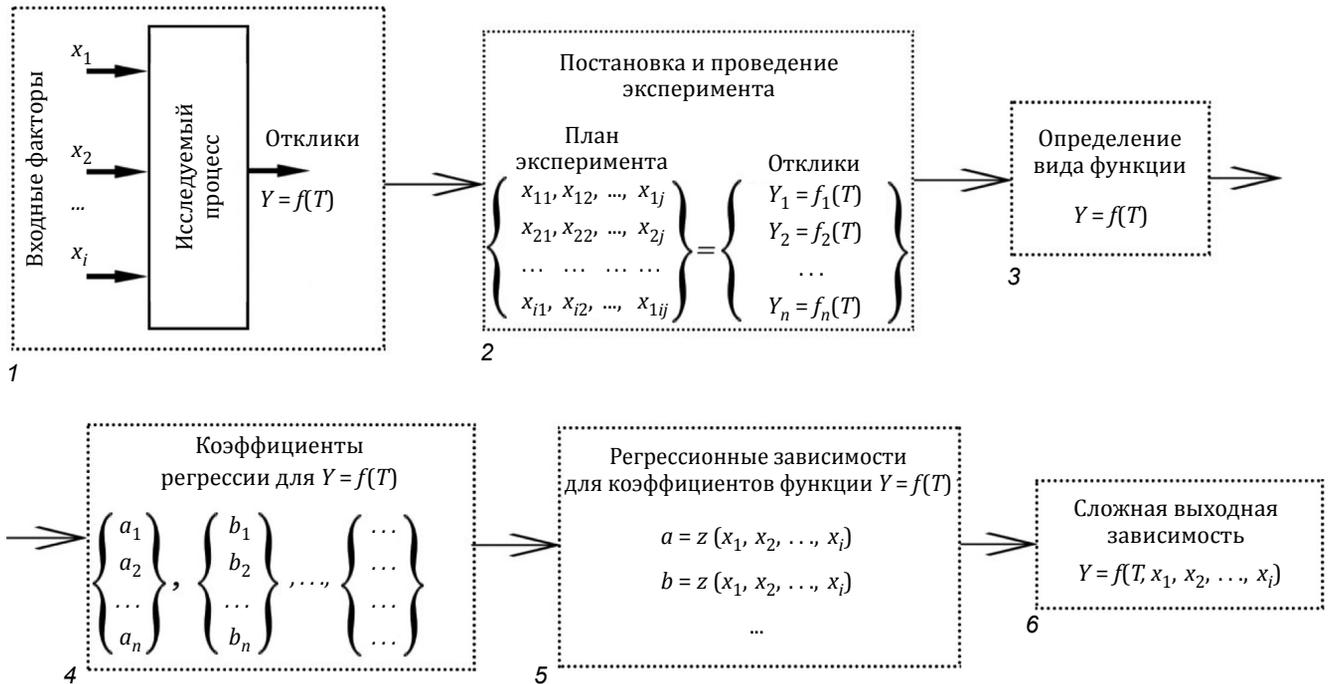


Рис. 3. Структурная схема процесса с выходными параметрами, функционально зависимыми от времени.



**Рис. 4.** Алгоритм построения математической модели процесса. Блоки: 1 – общее представление процесса; 2 – определение функции аппроксимации зависимостей измеряемых величин во времени; 3 – планирование, постановка и проведение эксперимента; 4 – определение коэффициентов регрессии для ряда полученных зависимостей  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ; 5 – построение зависимостей найденных коэффициентов регрессии от варьируемых параметров процесса; 6 – построение математической модели процесса.

учно обоснованных методов планирования эксперимента.

**Методика построения модели.** Современная измерительная и регистрирующая аппаратура дает возможность регистрировать показания откликов, измеряемых в ходе опытов, во времени с заданными промежутками – шагом времени  $\Delta t$ , с. Поэтому при исследовании процессов, протекающих во времени, их выходными параметрами являются функциональные зависимости измеряемой величины от времени  $y = f(t)$ . Эти зависимости, как правило, непрерывны. Структурно процесс, протекающий во времени, можно представить в виде схемы (рис. 3).

Зависимости  $y = f(t)$ , полученные в ходе опытов, желательно привести к безразмерной форме, при этом измеряемый во времени параметр  $y = Y$  (где  $Y$  – выходной параметр в безразмерной форме). Для приведения времени к безразмерной величине  $T$  достаточно разделить его текущее значение  $t$  на шаг измерений  $\Delta t$  параметра  $y$ :  $T = t/\Delta t$ . Таким образом получим функцию в безразмерной форме:  $Y = f(T)$ .

Выходные зависимости  $Y = f(T)$  аппроксимируют линейными, степенными, полиномиаль-

ными, логарифмическими или экспоненциальными функциями. Если полученная зависимость сложная, ее можно разбить на части на промежутках  $0 \leq T_1, T_1 \leq T_2, \dots, T_2 \leq T_i$  и рассматривать каждую часть отдельно.

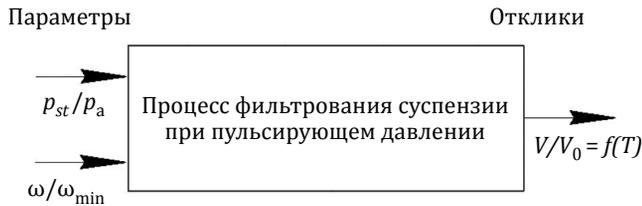
После аппроксимации зависимостей функцией заданного вида  $Y(T)$  определяют постоянные коэффициенты этих функций  $a_i, b_i, c_i$  и т. д. Следовательно, процесс примет вид

$$Y_1(T) = \begin{cases} a_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) \\ b_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i), \\ c_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) \end{cases}$$

$$Y_2(T) = \begin{cases} a_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) \\ b_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i), \dots \\ c_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) \end{cases}$$

$$\dots, Y_i(T) = \begin{cases} a_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) \\ b_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i). \\ c_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) \end{cases}$$

Если при исследовании процесса измеряют несколько независимых друг от друга параметров (см. рис. 3), соответственно получают не-



**Рис. 5.** Структурная схема процесса фильтрации тонкодисперсной суспензии.

сколько математических моделей процесса. Алгоритм построения математической модели отдельного процесса, протекающего во времени, в котором исследуется влияние входных параметров на функции откликов измеряемых величин, показан на рис. 4.

Вслед за построением математических моделей исследуемого процесса выполняют их статистический анализ, в ходе которого определяют адекватность, расхождения экспериментальных и расчетных данных согласно полученным параметрам и точность моделей [3]. Используя статистические методы, оценивают влияния факторов и коэффициентов модели на процесс и, по возможности, исключают наименее влияющие факторы.

**Построение математической модели.** Рассмотрим построение модели согласно описанной методике на примере исследования процесса фильтрации тонкодисперсной суспензии глубоководных органоминеральных осадков (ГВОМО) [4] при пульсирующем давлении.

Основные варьируемые параметры процесса: статическая составляющая давления  $p_{st}$  и частота пульсации давления  $\omega$ . Коэффициент динамичности, характеризующий амплитуду пульсации давления, принимали постоянным и равным 0,3. Структурная схема процесса показана на рис. 5 (где  $p_a = 0,1$  МПа – атмосферное давление;  $\omega_{min} = 20$  Гц – минимальная частота пульсации давления;  $V$  – объем фильтра, м<sup>3</sup>;  $V_0$  – начальный объем суспензии, м<sup>3</sup>). Уровни и интервалы варьирования параметров приведены в табл. 1. При проведении опытов измеряли объем фильтрата  $V$  через 1 с. При этом начальный объем суспензии  $V_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>.

Экспериментальные исследования процесса фильтрации ГВОМО проводили в соответствии с планом ПФЭ  $3^k$  (где  $k$  – количество входных параметров). Количество опытов состави-

Таблица 1

Параметр	Кодированное обозначение	Шаг варьирования $c_i$	Уровни факторов		
			0	+1	-1
$p_{st}/p_a$	$X_1$	15,0	25,0	40,0	10,0
$\omega/\omega_{min}$	$X_2$	1,0	2,0	3,0	1,0

ло  $N = 3^2 = 9$ , при этом каждый дублировали трижды.

После проведения опытов и усреднения данных (по трем параллельным опытам) получены зависимости измеряемого параметра  $V/V_0$  (приведенный объем фильтрата) от времени  $T = t/\Delta t$  (где  $t$  – текущее значение времени, с), изображенные на рис. 6. Они хорошо аппроксимируются полиномиальной функцией второго порядка, имеющей вид

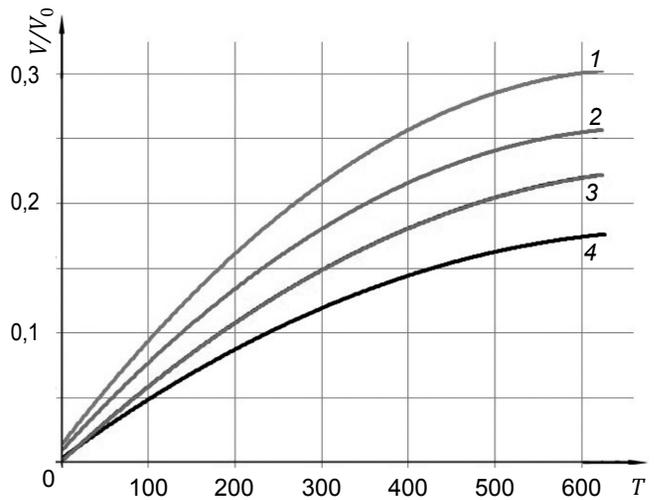
$$Y = -aT^2 + bT + c, \quad (1)$$

где  $Y = V/V_0$ ;

$a, b, c$  – коэффициенты.

Согласно выбранному плану эксперимента для каждого опыта определены коэффициенты  $a, b, c$  (табл. 2).

Чтобы установить зависимости найденных коэффициентов от входных параметров процесса  $X_1$  и  $X_2$ , примем полиномиальную модель второго порядка



**Рис. 6.** Зависимости приведенного объема фильтрата  $V/V_0$  от безразмерного времени  $T$ : 1 –  $p_{st}/p_a = 40$ ,  $\omega/\omega_{min} = 3$ ; 2 –  $p_{st}/p_a = 40$ ,  $\omega/\omega_{min} = 1$ ; 3 –  $p_{st}/p_a = 10$ ,  $\omega/\omega_{min} = 3$ ; 4 –  $p_{st}/p_a = 10$ ,  $\omega/\omega_{min} = 1$ .

Таблица 2

№ опыта	Входные параметры процесса		Коэффициенты выходных функций		
	$X_1$	$X_2$	$a \cdot 10^{-7}$	$b \cdot 10^{-4}$	$c$
1	+1	+1	4,89	7,48	0,032
2	0	+1	4,04	6,55	0,015
3	-1	+1	3,36	5,52	0,011
4	+1	0	4,70	7,31	0,028
5	0	0	3,87	6,19	0,020
6	-1	0	3,04	4,70	0,015
7	+1	-1	4,23	6,46	0,023
8	0	-1	3,63	5,69	0,021
9	-1	-1	2,73	4,40	0,011

$$K = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_1X_2 + b_4X_1^2 + b_5X_2^2, \quad (2)$$

где  $K$  – коэффициент, соответствующий  $a, b, c$ ;  
 $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  – коэффициенты полинома.

Определив соответствующие коэффициенты полинома (2) методом наименьших квадратов [5], получим зависимости:

$$a = 3,88 \cdot 10^{-7} + 7,82 \cdot 10^{-8}X_1 + 2,83 \cdot 10^{-8}X_2 + 7,5 \cdot 10^{-10}X_1X_2 - 2,17 \cdot 10^{-9}X_1^2 - 5,67 \cdot 10^{-9}X_2^2;$$

$$b = 6,18 \cdot 10^{-4} + 1,1 \cdot 10^{-4}X_1 + 5 \cdot 10^{-5}X_2 - 2,5 \cdot 10^{-6}X_1X_2 - 1,65 \cdot 10^{-5}X_1^2 - 5 \cdot 10^{-6}X_2^2; \quad (3)$$

$$c = 0,02 + 7,67 \cdot 10^{-3}X_1 + 5 \cdot 10^{-4}X_2 + 2,25 \cdot 10^{-3}X_1X_2 + 1,33 \cdot 10^{-3}X_1^2 - 2,17 \cdot 10^{-3}X_2^2.$$

Далее выполняем статистический анализ полученных моделей (3): отсеиваем незначимые коэффициенты или вносим дополнительные коэффициенты и оцениваем адекватность моделей по критерию Фишера [6].

Подставляя зависимости (3) вместо коэффициентов  $a, b, c$  функции (2), получим математическую модель процесса фильтрования суспензии ГВОМО при пульсирующем давлении, представляющую собой непрерывную во времени функцию

$$Y = -T^2 (3,88 \cdot 10^{-7} + 7,82 \cdot 10^{-8}X_1 + 2,83 \cdot 10^{-8}X_2 + 7,5 \cdot 10^{-10}X_1X_2 - 2,17 \cdot 10^{-9}X_1^2 - 5,67 \cdot 10^{-9}X_2^2) + T(6,18 \cdot 10^{-4} + 1,1 \cdot 10^{-4}X_1 + 5 \cdot 10^{-5}X_2 - 2,5 \cdot 10^{-6}X_1X_2 - 1,65 \cdot 10^{-5}X_1^2 - 5 \cdot 10^{-6}X_2^2) + 0,02 + 7,67 \cdot 10^{-3}X_1 + 5 \cdot 10^{-4}X_2 + 2,25 \cdot 10^{-3}X_1X_2 + 1,33 \cdot 10^{-3}X_1^2 - 2,17 \cdot 10^{-3}X_2^2.$$

**Выводы.** На основании представленного алгоритма получения регрессионно-статистических математических моделей и разработанной методики их построения проведен комплекс исследований для некомпозиционных планов полного многофакторного эксперимента типа  $3^k$ , где выходные зависимости могут быть аппроксимированы непрерывными функциями времени, на примере процесса фильтрования тонкодисперсной суспензии ГВОМО при пульсирующем давлении.

Исследование физических процессов как функции времени дает возможность сравнивать результаты в разных условиях проведения экспериментов независимо от длительности процесса. Это особенно важно при сравнении данных, полученных в результате лабораторных и более длительных натурных исследований, во избежание трудностей в установлении подобия между ними.

Рассмотрение функции времени как выходного параметра в безразмерной форме при постановке экспериментальных исследований или изучении явлений и процессов позволяет упростить понимание закономерностей протекания процессов, повысить точность определения экспериментальных данных, а значит и математических моделей; проводить оптимизацию оборудования и разрабатывать новое оборудование с улучшенными характеристиками. Кроме того, сравнивать однородные и квазиоднородные процессы, протекающие в таких условиях, как фильтрация жидкости и газа в горном массиве, разрушение горных пород и др.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Спиридонов А. А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А. А. Спиридонов. – М.: Машиностроение, 1981. – 184 с.
2. Хамханов К. М. Основы планирования эксперимента: метод. пособие / К. М. Хамханов. – Улан-Уде: Восточно-Сибирский гос. технол. ун-т, 2001. – 94 с.
3. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика [для инженеров и научных работников] / А. И. Кобзарь. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
4. Шнюков Е. Ф. Минеральные богатства Черного моря / Е. Ф. Шнюков, А. П. Зиборов. – К.: Карбон-ЛТД, 2004. – 290 с.
5. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю. В. Линник. – Л.: Физматгиз, 1962. – 352 с.
6. Любченко Е. А. Планирование и организация эксперимента: учеб. пособие. Ч. 1 / Е. А. Любченко, О. А. Чуднова. – Владивосток: Изд-во ТГЭУ, 2010. – 156 с.