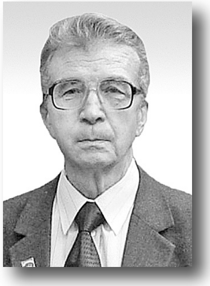


Б. Н. ВАНЕЕВ,
канд. техн. наук

УДК 519.24:621.313.333-213.34.019.3

Многофакторные эксперименты при исследовании надежности асинхронных двигателей

Рассмотрены математико-статистическое планирование многофакторных экспериментов при исследовании надежности взрывозащищенных и рудничных асинхронных двигателей: выбор объекта и области исследований, математической модели, параметра оптимизации и факторов эксперимента, планирование для задач идентификации, оптимизации и экстраполяции, порядок проведения эксперимента и обработки его результатов.

Ключевые слова: асинхронный двигатель, надежность, планирование экспериментов, пассивные эксперименты, активные эксперименты, факторы, отклик эксперимента, объект исследований, математическая модель, идентификация, оптимизация, экстраполяция, воспроизводимость опытов, коэффициенты регрессии, значимость коэффициентов, адекватность модели.

Контактная информация: ukrniive@list.ru

Постановка проблемы. Обеспечение надежности взрывозащищенных и рудничных асинхронных двигателей – сложная проблема, поскольку их надежность зависит от многих конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов, из которых в компетенции поставщика – две первые группы. Экспериментальные исследования зависимости надежности объекта исследований от воздействующих факторов по способу их планирования и проведения бывают:

- пассивные многофакторные эксперименты (ПМФЭ), основанные на регистрации входных и выходных параметров объекта без вмешательства в исследуемый процесс и с применением математико-статистических методов только для обработки результатов;
- активные многофакторные эксперименты (АМФЭ), основанные на вмешательстве в течение исследуемого процесса, при котором на входы объекта подаются специально организованные возмущающие воздействия, спланированные на основании математической статистики. По сравнению с ПМФЭ они позволяют: уменьшить ошибку эксперимента и оценить ее значение, т. е. объективно сравнивать разные эксперименты; получить математическую модель исследуемого процесса, обладающую некоторыми оптимальными свойствами, лучшими по сравнению с моделями ПМФЭ; сократить количество опытов и расходы на эксперимент до минимально необходимых; принимать корректирующие решения на основе четких формализованных правил, опирающихся на математический аппарат и заранее регламентированные процедуры; обоснованно варьировать всеми переменными и оптимально использовать факторное пространство; организовать эксперимент так, чтобы выполнялись исходные предпосылки регрессионного анализа; рандомизировать условия опыта, т. е. превратить некоторые мешающие факторы в случайные величины.

Обеспечение надежности взрывозащищенных и рудничных асинхронных двигателей – серьезная проблема, поскольку их отказы могут привести к более тяжелым последствиям, чем отказы электрооборудования общего назначения. Необходимость и важность применения математического планирования экспериментов (МПЭ) особенно возрастает при исследовании зависимости надежности двигателей от конструктивных и технологических факторов, количество которых может достигать десятка и более. Для получения достоверной математической модели исследуемого процесса (объекта) необходимы как правильно регламентированное проведение эксперимента, так и научно обоснованная методика обработки его результатов.

Анализ публикаций. В отечественной литературе первая публикация о применении методов математического планирования экспериментов появилась в 1956 г. [1], в которой изложен дисперсионный и регрессионный анализы, латинские квадраты, полные факторные планы (ПФП), рандомизация опытов и др. Сведения о применении этих методов при анализе надежности реле, конденсаторов и микродвигателей, включая задачи ускоренных испытаний на надежность и регулирования технологических процессов для повышения надежности изделий, на основании обзора 56 публикаций были приведены в работе [2]. Большой интерес к МПЭ появился после выхода в свет монографии [3], сыгравшей значительную роль в его популяризации среди отечественных специалистов. Инициатива широкого применения МПЭ в задачах надежности двигателей принадлежит Э. К. Стрельбицкому (1966 г.) и затем – О. Д. Гольдбергу (1968 г.). В последующие годы появилось еще полтора десятка монографий по методам МПЭ как отечественных, так и зарубежных авторов. Термины и определения в области МПЭ при исследовательских испытаниях регламентированы ГОСТ 24026–80. Результаты большого количества подобных экспериментов при исследовании надежности двигателей (как взрывозащищенных и рудничных, так и общего назначения) даны в работах [4 и 5].

Цель статьи – обоснование основных этапов подготовки, планирования и проведения многофакторных статистически спланированных экспериментов при исследовании надежности асинхронных двигателей и обработки его результатов.

Подготовка экспериментов

Выбор объекта и области исследований. Анализ опубликованных работ, в которых описаны 114 АМФЭ, показал [4], что изучению надежности изоляции обмотки статора двигателя посвящено 56,7 % проводимых исследований, контактно-щеточного узла – 16 % и подшипникового узла – 9,8 %. Аналогичное соотношение сохранится и в ближайшие годы, так как согласно новейшим данным эксплуатационной статистики и дефектации на ремонтных заводах обмотка статора и подшипниковые узлы (для двигателя с фазным ротором – также обмотка ротора и контактно-щеточный узел) по-прежнему относятся к наиболее аварийным сборочным единицам.

Основную часть АМФЭ по исследованию надежности двигателя ранее проводили, разрабатывая методы испытаний на надежность. К области технологии относилась треть АМФЭ, а эксперименты с конструкцией двигателя встречались реже. Такое соотношение было характерно для начальной стадии развития науки о надежности двигателя. В настоящее время основное внимание уделяется проблемам повышения его надежности путем регулирования конструктивных и технологических факторов.

Математические модели. Обеспечение надежности двигателя как кибернетическая задача управления наиболее эффективно достигается на основе анализа математических моделей, описывающих зависимость надежности исследуемой сборочной единицы от ее конструктивных и технологических факторов. Модели бывают:

- физические (аналитические или теоретические) – в виде систем алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений, позволяющих точно описать процессы, происходящие в объекте, и допускающих экстраполяцию в точки факторного пространства, в которых невозможно непосредственно наблюдать эти процессы;
- статистические (эмпирические) – в виде полиномов, полученных в результате статистической обработки экспериментальной информации; область их применения ограничивается ближайшей окрестностью рабочих точек, в которых проводили эксперименты.

Чаще всего неизвестная физическая модель представляется в виде статистической модели полиномиального вида, которая проста для анализа и позволяет аппроксимировать достаточно широкий класс функций. Аппроксимация целесообразна, если исследуемая функция отвечает требованиям непрерывности и достаточной гладкости. На практике ограничиваются конечным числом ряда Тейлора, например полиномом второго порядка:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} X_i^2; \qquad (1)$$

$$X_i = (\overline{\Phi}_i - \Phi_i) / I_i, \qquad (2)$$

где y – отклик эксперимента;

X_i, X_j – безразмерные значения уровней факторов;

b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} – коэффициенты регрессии;

$\overline{\Phi}_i$ – натуральное значение основного уровня i-го фактора;

Φ_i – натуральное значение уровня i-го фактора;

I_i – интервал варьирования i-го фактора (половина размаха варьирования);

k – количество исследуемых факторов.

Коэффициенты b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} эквивалентны частным производным кратного ряда Тейлора для функции выхода, имеющей все непрерывные частные производные. Однако, получив из опыта числовые оценки этих коэффициентов, восстановить исходное аналитическое уравнение уже невозможно.

В ряде случаев приходится ограничиваться получением неполного полинома второго порядка

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ij} X_i X_j, \qquad (3)$$

или даже полинома первого порядка

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i. \qquad (4)$$

Наиболее эффективным методом экспериментального получения полиномиальных моделей является АМФЭ. При этом, кроме выбора модели, решаются также следующие задачи: выбор параметра оптимизации; выбор конструктивных и технологических факторов; планирование АМФЭ; подготовка образцов и испытательного оборудования; проведение испытаний; обработка результатов; расчет оптимального варианта конструкции или технологии изготовления исследуемой сборочной единицы.

Параметры оптимизации. По результатам научного обзора [4] количество оцениваемых в одном АМФЭ параметров оптимизации (откликов эксперимента) в 50 % всех экспериментов было равно одному, в 29 % – двум, в 14 % – трем, а эксперименты с четырьмя–шестью откликами составляли от 1,5 до 3 %. Пятую часть всех откликов (22 %) представляет средняя наработка на отказ или ресурс сборочной единицы двигателя, причем критерием отказа может быть пробой изоляции, снижение ее электрического сопротивления, повышение искрения контактно-щеточного узла, износ щеток и контактных колец (коллектора), биение коллектора, повышение температуры подшипникового узла и его вибрации, повышение тангенса угла диэлектрических потерь изоляции, время работы до заданной вероятности безотказной работы, износ изоляции от тока короткого замыкания. При исследовании надежности обмоток в качестве отклика используют также другие электрофизические и механические характеристики изоляции.

При исследовании надежности контактно-щеточного узла откликом является как износ щеток (причем используется и средний износ, и скорость изнашивания, и коэффициент ее вариации), так и их электрофизические и механические параметры.

Опыт показывает, что при исследованиях влияния конструктивных и технологических факторов на надежность взрывозащищенных и рудничных двигателей параметром оптимизации целесообразно выбирать средний ресурс исследуемой сборочной единицы, определенный методом ускоренных испытаний на надежность или эксплуатационных испытаний [4]. В качестве отклика допускается принимать средний ресурс обмотки статора, полученный путем расчета на основании опытных значений параметров распределения пробивного напряжения изоляции обмотки.

Если в эксперименте исследуется несколько примерно равнозначных параметров оптимизации, то по результатам ранее проведенных измерений или испытаний рассчитываются коэффициенты парной корреляции (КПК) между всеми откликами и определяется их значимость при заданном уровне доверительной вероятности. Затем выбираются независимые отклики. Из группы зависимых между собой откликов выбирается тот, который значимо связан с наибольшим числом других откликов этой группы (наиболее влиятельный), либо тот, который имеет наибольшую сумму значимых КПК (наиболее существенный).

Регрессионный анализ, применяемый при МПЭ, базируется на двух предпосылках [3]:

результаты наблюдений – независимые нормально распределенные величины;

дисперсии отклика в строках матрицы эксперимента равны друг другу, т. е. выборочные оценки дисперсии в строках однородны.

Проверка нормальности отклика проводится по критериям К. Пирсона или А. Н. Колмогорова; допускается приближенная проверка по значению коэффициента вариации, которое должно быть не более 0,35. Проверка однородности приведена ниже. Если условие нормальности или однородности отклика не соблюдается, то отклик следует преобразовать, взяв вместо y величину ln (y) или lg (y) и проверить ее нормальность.

Конструктивные и технологические факторы. Для выбора факторов АМФЭ на основании имеющейся информации составляется перечень режимных, конструктивных и технологических факторов, предположительно влияющих на надежность сборочной единицы двигателя. В этот перечень могут входить:

- конструктивные размеры (диаметр и длина сердечника статора, ширина паза, толщина изоляции);
- свойства материалов (марка провода, изоляции и пропиточного состава, пробивное напряжение материала, его механическая прочность);
- параметры технологического режима (концентрация пропиточного лака, температура и длительность термообработки);
- технические параметры двигателя (скольжение, моментные характеристики, сила пускового тока);
- конструктивные особенности двигателя (вид подшипников, наличие уплотнений, вид пазовых клиньев, конструкция вентилятора);
- факторы режима испытаний на надежность (температура, вибрация, относительная влажность, скорость вращения, давление, момент нагрузки).

Общие требования к факторам [3, 6]:

1) выбранные значения факторов должны поддерживаться постоянными в течение всего АМФЭ, т. е. факторы должны быть управляемыми;

2) для каждого из факторов должна быть указана последовательность действий, операций и измерений, с помощью которых устанавливаются и контролируются их конкретные значения, т. е. факторы должны быть операциональными;

3) факторы должны быть непосредственным воздействием на сборочную единицу, а не сложной функцией каких-то других факторов, т. е. факторы должны быть однозначными;

4) запланированные комбинации факторов должны быть осуществимы и безопасны, т. е. факторы должны быть совместимыми;

5) факторы должны измеряться с пренебрежимо малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении отклика;

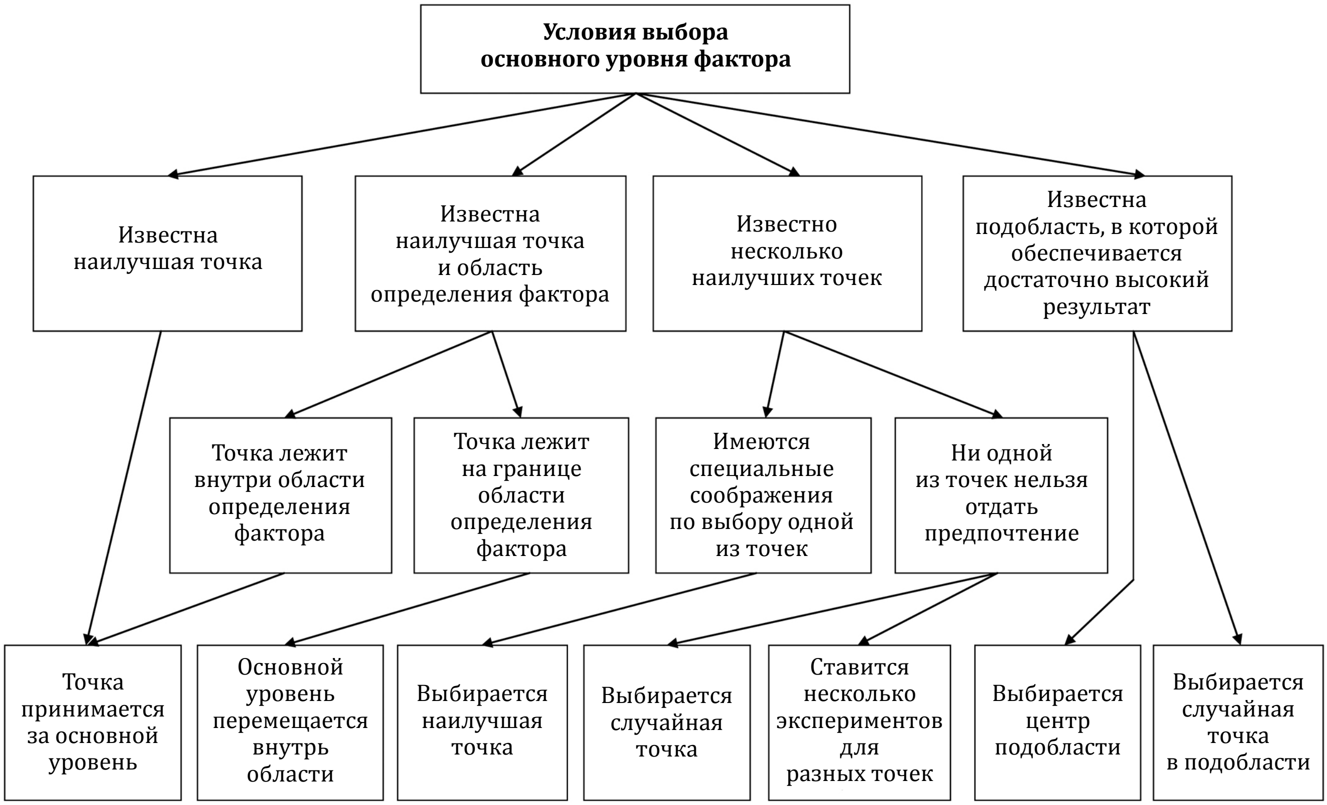
6) любой фактор можно установить на любом заданном уровне независимо от уровней других факторов, т. е. факторы должны быть независимы и некоррелированы между собой.

Требование 5) – одна из предпосылок регрессионного анализа, а требование 6) – равносильно требованию, чтобы матрица коэффициентов нормальных уравнений была невырожденной, т. е. элементы одного столбца матрицы не должны быть взвешенными суммами элементов других столбцов. Для проверки последнего условия, кроме правильного составления матрицы планирования, рассчитываются также коэффициенты парной корреляции между всеми парами факторов. Если их расчетное значение больше критического, то гипотеза о линейной связи двух факторов не отвергается и один из них следует исключить из эксперимента или предпринять специальные меры по обеспечению их независимости (например, путем изготовления макетных образцов, у которых эти факторы преднамеренно сделаны независимыми друг от друга).

В проанализированных публикациях чаще всего исследовали три-четыре фактора. На эксперименты с шестью-восемью факторами приходится от 2,6 до 4 % случаев, а опыты с бóльшим числом факторов (до 13) единичны, так как из-за большого количества опытов они сложные и дорогие, а из-за высокой дробности реплик получаемые модели неоптимальны. Если за рамками АМФЭ остался какой-нибудь мощный фактор, то анализ статистических свойств математической модели может не дать оснований для беспокойства, а между тем она дефектна.

Для выбора перечня факторов применяют метод ранжирования путем опроса группы специалистов [3]. Более трудны в техническом и организационном отношениях экспериментальные методы отбора факторов, например ПМФЭ, метод случайного баланса или факторные планы.

Факторы бывают качественные или дискретные (марка материала, конструктивная особенность) и количественные или непрерывные (размер детали, температура, длительность процесса). Для каждого из качественных факторов устанавливается два-три уровня, нормализация по формуле (2) не проводится, а каждому из уровней сразу присваивается безразмерное значение (одному $X_i = -1$, другому $X_i = 0$, третьему $X_i = +1$). Для каждого из количественных факторов уточняется область его определения, выбирается основной уровень фактора Φ_i и интервал варьирования I_i.



Основной уровень фактора Φ_i выбирается по блок-схеме [5 и 6].

Выбранный интервал варьирования I_i, с одной стороны, не должен быть менее той погрешности, с которой экспериментатор в состоянии поддерживать заданный уровень фактора, т. е. разница между верхним ($\overline{\Phi}_i + I_i$) и основным $\overline{\Phi}_i$ уровнями и между основным $\overline{\Phi}_i$ и нижним ($\overline{\Phi}_i - I_i$) уровнями должна быть значима по критерию Стьюдента (У. Госсета). С другой стороны, интервал варьирования должен быть не очень широким, чтобы ни один из уровней не оказался за пределами области определения фактора.

Планирование эксперимента

Стратегии математического планирования экспериментов зависят от типа решаемой задачи. Одна из главных задач – построение математической модели исследуемого процесса, т. е. задача интерполяции. Важное значение имеет поиск наилучших условий протекания процесса, т. е. задача оптимизации. В ряде случаев представляет интерес прогнозирование отклика в моменты времени вне отрезка наблюдения или при таких значениях факторов (например, эксплуатационных), когда непосредственные измерения нецелесообразны или трудноосуществимы, т. е. задача экстраполяции.

Планирование в задачах интерполяции. При планировании экспериментальные точки располагают так, чтобы охватить большую часть области определения факторов. План выбирается в зависимости от условий: порядок математической модели; количество исследуемых факторов; вид факторов (количественные или качественные); количество уровней каждого фактора; максимально возможное количество испытуемых образцов.

Наиболее жесткие требования к плану связаны с ограничением количества образцов. Поэтому в задачах интерполяции применяют линейные планы первого порядка, которые не требуют большого количества опытов: двухуровневый ПФП типа 2^k или дробный факторный план (ДФП) типа 2^{k-p}, примеры которых представлены в табл. 1 и 2. Оба плана позволяют обойтись небольшим количеством опытов, снизить продолжительность эксперимента и его стоимость.

Однако с их помощью можно получить лишь неполный полином второго порядка (3), а в ряде случаев – только полином первого порядка (4).

Число значимых членов λ в модели не может быть больше количества строк матрицы эксперимента N. Так, с помощью ДФП типа 2^{4-2} нельзя для четырех факторов получить даже модель первого порядка, поскольку он имеет только четыре строки матрицы, а искомая модель при $k = 4$ – пять коэффициентов; ДФП типа 2^{3-1} позволяет при четырех опытах получить модель с четырьмя коэффициентами для трех факторов, однако при этом $N = \lambda$ и не остается степеней свободы для оценки адекватности (такие планы называются насыщенными). В промышленных экспериментах рекомендуется принимать $N \geq 8$ и $N - \lambda \geq 3$.

Применение ДФП связано с корреляцией между столбцами матрицы планирования, что не позволяет раздельно оценить эффекты факторов и их взаимодействий; так в матрице 2^{4-1} смешаны эффекты: $X_4 = X_1X_2X_3$, $X_1X_2 = X_3X_4$, $X_1X_3 = X_2X_4$ и $X_2X_3 = X_1X_4$ (см. табл. 2). Поэтому смешивать эффекты допускается только на основании тщательного анализа информации; следует избегать применения реплик с высокой дробностью. Наиболее эффективно применение ДФП при $k \geq 5...6$.

Если существует непрерывный дрейф отклика по какому-то фактору (например, постепенное старение сырья, увлажнение изоляции, испарение растворителя из лака и т. п.), то серию опытов разбивают на блоки, вводя новую фиктивную переменную, характеризующую дрейф. Так, для ПФП типа 2^3 новую переменную дрейфа приравнивают: $X_{др} = X_1X_2X_3$. В один блок вводят опыты с $X_{др} = +1$, а в другой – с $X_{др} = -1$. Получается ДФП типа 2^{4-1} уже с четырьмя факторами и генерирующим соотношением $J = X_1X_2X_3$, при котором все коэффициенты модели, кроме b_{123}, не будут содержать погрешности, обусловленные дрейфом.

Для оценки ошибки эксперимента проводятся параллельные опыты одним из следующих способов:

- по два-три в каждой точке плана (во всех строках матрицы);
- по два-три только в нескольких строках матрицы, включая центральную точку плана при $X_i = 0$.

С помощью параллельных опытов можно достоверно выявить возможную неадекватность модели. Такая процедура в центре плана особо важна, так как неточное определение отклика в этой точке может существенно изменить как общую форму, так и ориентацию в пространстве поверхности отклика, полученной на основании расчета по модели. Проводить параллельные опыты в одной строке матрицы (например, только в центре плана) недостаточно, поскольку критерий М. С. Бартлетта для оценки воспроизводимости опытов будет равен нулю и гипотезу о воспроизводимости придется принимать на основании априорных данных.

Таблица 1

Номер опыта	Факторы и их уровни для матрицы ПФП типа 2^3		
	X_1	X_2	X_3
1	+1	+1	+1
2	– 1	+1	+1
3	+1	– 1	+1
4	– 1	– 1	+1
5	+1	+1	– 1
6	– 1	+1	– 1
7	+1	– 1	– 1
8	– 1	– 1	– 1

Если можно испытать 15–30 образцов и более, то для АМФЭ с количественными факторами рекомендуется применять планы второго порядка, так как в основном надежность двигателя зависит от конструктивно-технологических факторов нелинейно.

Для оценки оптимальности (качества) планов, используют специальные статистические критерии, которые делятся на *три группы* [7]: связанные с точностью (эллипсом рассеяния)

Таблица 2

Номер опыта	Факторы и их уровни для матрицы ДФП типа 2^{4-1}			
	X_1	X_2	X_3	X_4
1	+1	+1	+1	+1
2	−1	+1	+1	−1
3	+1	−1	+1	−1
4	−1	−1	+1	+1
5	+1	+1	−1	−1
6	−1	+1	−1	+1
7	+1	−1	−1	+1
8	−1	−1	−1	−1

Таблица 3

Номер опыта	Факторы и их уровни для матрицы трехуровневого композиционного симметричного плана второго порядка		
	X_1	X_2	X_3
1	–1	–1	–1
2	+1	–1	–1
3	–1	+1	–1
4	+1	+1	–1
5	–1	–1	+1
6	+1	–1	+1
7	–1	+1	+1
8	+1	+1	+1
9	–1	0	0
10	+1	0	0
11	0	–1	0
12	0	+1	0
13	0	0	–1
14	0	0	+1

оценок параметров; связанные с ошибкой модели; упрощающие процедуру исследований.

К *первой* группе относятся критерии Д- , А-, Е-оптимальности и ортогональность (характеризуется минимальным значением максимального модуля коэффициента корреляции оценок параметров $|\rho_{max}|$), ко *второй* – критерии Θ- и G-оптимальности (последняя характеризуется минимальным значением максимальной нормированной дисперсии оценки модели d_{max}), ротатабельность, униформность и другие, а к *третьей* – насыщенность, композиционность и возможность обработки по простейшим формулам.

Линейные планы обычно удовлетворяют сразу нескольким критериям (так, ПФП являются одновременно Д-, А-, Е- и G-оптимальными, ортогональными, рототабельными и симметричными, простыми в обработке [3], а ДФП также ортогональны, рототабельны и симметричны). Но в планах второго порядка совместить несколько полезных свойств не удается. Поэтому издан каталог [7], в котором для 257 планов второго порядка при числе факторов от одного до семи приведены шесть критериев (Д, А, Е, Θ, d_{max} и $|\rho_{max}|$), а также указаны еще шесть других свойств планов.

Наличие указанного каталога позволяет при заданном количестве факторов выбрать из группы рекомендованных планов такой, который обладает наиболее приемлемыми характеристиками. Например, для трех факторов существует композиционный трехуровневый симметричный план с 14-ю опытами (№ 34 [7]), обладающий высокой степенью оптимальности ($e^{Д}$ = 0,986; $e^{А}$ =0,966; $e^{Е}$ = 0,772; e^{Θ} = 0,950) и позволяющий получить модель с 10-ю коэффициентами, считая и b_0. Матрица такого плана (табл. 3) представляет собой ПФП типа 2^3 (строки 1–8), дополненный шестью «звездными» точками со звездным плечом $\alpha = 1$ (строки 9–14). Композиционность плана заключается в том, что вначале можно поставить опыты ПФП, а затем, если полученная линейная математическая модель окажется неадекватной, дополнительно реализовать еще шесть опытов и перейти к модели второго порядка. Для оценки ошибки эксперимента следует провести параллельные опыты.

Трехуровневые ПФП типа 3^k позволяют получить нелинейную математическую модель вида полного полинома второго порядка (1) с наибольшей по сравнению с другими планами точностью, но требуют для этого бóльшего количества образцов. Матрица ПФП типа 3^3 содержит 27 опытов против 14-ти в матрице табл. 3; при бóльшем количестве факторов этот недостаток ПФП типа 3^k быстро увеличивается. Кроме того, все планы типа 3^k нерототабельны и очень чувствительны к параллельным опытам в центре плана.

Если при АМФЭ получен анормальный отклик в одной из строк матрицы без дублирования, то опыт надо повторить, если в одной из строк с большим количеством параллельных опытов (например, в центре плана), то надо отсеять анормальное значение по одному из известных критериев.

Если поддержание факторов на строго заданных уровнях X_i технически невозможно, а для получения отклика в каждом опыте не требуются большие затраты времени и средств, то при решении задач интерполяции можно использовать ПМФЭ, который позволяет методом множественного регрессионного анализа получить полином первого порядка (4), но в натуральных значениях. При этом регрессионный анализ дает очень большое рассеяние, так как интервалы варьирования факторов I_i нередко сравнимы с ошибками в их измерении. При ПМФЭ невозможно оценить ошибку эксперимента и провести статистический анализ, факторы оказываются коррелированными друг с другом и коэффициенты регрессии раздельно оценить невозможно, а опытов значительно больше, чем при АМФЭ.

Чтобы улучшить свойства модели при проведении ПМФЭ, используют метод квантования: для каждого опыта натуральное значение фактора заменяют на кодированное по правилу:

$$\text{если } \Phi_{\text{н}i} < (\bar{\Phi}_{\text{н}i} - 2\Delta_i)\text{, то } X_{\text{н}i} = -1;$$
$$\text{если } \Phi_{\text{н}i} > (\bar{\Phi}_{\text{н}i} + 2\Delta_i)\text{, то } X_{\text{н}i} = 1;$$
$$\text{если } (\bar{\Phi}_{\text{н}i} - 2\Delta_i) \le \Phi_{\text{н}i} \le (\bar{\Phi}_{\text{н}i} + 2\Delta_i)\text{, то } X_{\text{н}i} = 0,$$

где $\Phi_{\text{н}i}$ – натуральное значение i-го фактора;

$\bar{\Phi}_{\text{н}i}$ – среднее натуральное значение i-го фактора;

$X_{\text{н}i}$ – кодированное значение i-го фактора;

Δ_i – погрешность измерения для фактора $\Phi_{\text{н}i}$.

Получается квантованная матрица. Из нее выбирают те строки, которые совпадают по знакам при X_i со строками ортогональной матрицы ПФП типа 2^k с центральной точкой, включая подбор параллельных опытов. Обработка такой матрицы позволяет получить модель, аналогичную получаемой при АМФЭ. Ошибка, вызванная квантованием, сводится к нулю введением специальной поправки.

Если ранжирование факторов показало, что их число велико, то можно использовать насыщенные планы, чтобы получить линейную математическую модель первого порядка (4). Наиболее оптимальные насыщенные планы – дробный насыщенный план при $N = k + 1$ (для $k = 3, 7, 15, 31$ и т. д.), планы Плакетта-Бермана (для $k = 11, 19, 23, 27, 35$ и т. д.) и симплекс-планы первого порядка. Все они ортогональные, обработка ведется по простейшим формулам. Для оценки адекватности модели в матрицу вводят три-четыре фиктивных фактора, т. е. несколько увеличивают количество опытов.

Планирование в задачах оптимизации. Описание поверхности отклика в эксперименте полиномом сводится к тому, что реальная поверхность отклика сглаживается некоторой теоретической поверхностью, описываемой полученной моделью. Фактические экстремальные точки этой поверхности методами интерполяции не могут быть обнаружены, и при существенно нелинейном характере реальной поверхности отклика интерполяционное планирование может дать неправильный результат. Поэтому для задач оптимизации разработаны особые стратегии. Наиболее распространена *стратегия крутого восхождения* [6], которая заключается в следующем:

- первоначально в небольшой части факторного пространства ставится ПФП типа 2^k с небольшим интервалом варьирования факторов;
- по результатам этого АМФЭ выбирается точка, давшая лучший отклик, и от нее проводят ряд последовательных опытов, изменяя значения факторов в каждом из них;
- после достижения наибольшего значения отклика для описания этой области оптимума ставится план второго порядка.

Планирование в задачах экстраполяции. С проблемой экстраполяции результатов АМФЭ вне области экспериментирования приходится сталкиваться при ускоренных испытаниях на надежность, так как для достаточно надежных двигателей проводить АМФЭ на уровне номинальных нагрузок нецелесообразно. Из-за чрезмерной длительности испытаний за нижний уровень такого фактора, как температура изоляции, принимают температуру не менее предельно допустимой для ее класса нагревостойкости, а за верхний уровень – еще более высокую. Аналогично поступают и при испытании на надежность подшипниковых смазок.

Экстраполяция результатов исследований в область номинальных, более низких значений температуры и нагрузок, т. е. далеко за границы области эксперимента, теоретически трудна: прямолинейные доверительные границы для кривой регрессии могут быть построены только в области эксперимента, а за ее пределами доверительные интервалы заключены уже между гиперболами, и с увеличением шага экстраполяции ее ошибка резко возрастает. Специальные методы планирования эксперимента, рассмотренные в работах [8 и 9], практического применения при исследованиях надежности двигателей пока еще не нашли.

Проведение эксперимента и обработка его результатов

Изготовление испытываемых образцов. Образцы необходимо распределить между уровнями каждого фактора в соответствии с номерами по матрице планирования и предупредить возможный дрейф уровней факторов в зависимости от партии материала и порядкового номера технологического и испытательного обо-

Таблица 4

Факторы и их уровни для рабочей матрицы планирования эксперимента (значения кодированные / натуральные)			Номера образцов	Рандомизированный порядок изготовления	Количество образцов
Марка пропиточного лака	Концентрация пропиточного лака, %	Температура сушки обмотки, °C			
+1/МЛ–92	+1/50	+1/170	1, 9	2	2
		–1/150	2	7	1
	–1/45	+1/170	3	1	1
		–1/150	4, 10	6	2
–1/ПЭ–933	+1/50	+1/170	5	3	1
		–1/150	6, 11	8	2
	–1/45	+1/170	7, 12	5	2
		–1/150	8	4	1

рудования путем их рандомизации по таблице равномерно распределенных случайных чисел (ГОСТ 11.003–73), а также на одном уровне стабилизировать те факторы, которые не введены в эксперимент, но могут повлиять на отклик. Поэтому для проведения каждого АМФЭ необходимо составлять специальную инструкцию.

В инструкции должны быть указаны объект и цель исследований, параметры оптимизации, данные о факторах и их уровнях, матрица планирования, а также рабочая матрица с указанием названий факторов, их безразмерных и натуральных значений, номеров образцов и рандомизированной очередности изготовления. Пример рабочей матрицы для ПФП типа 2^3 с проведением параллельных опытов в четырех строках дан в табл. 4. В инструкции должны быть также указаны:

- номера чертежей и технологических инструкций по изготовлению исследуемых сборочных единиц;
- операции, в которых предусмотрены отклонения от чертежей или технологии, вызванные необходимостью ввести в эксперимент тот или иной исследуемый фактор;
- методика испытаний и оценки однородности партий материала, единиц технологического оборудования и т. п.;
- нестирающаяся нумерация изготовляемых сборочных единиц;
- дополнительные операции, связанные с испытаниями;
- запас от одной трети до половины всех ресурсов – сырья, рабочего времени – для повторных опытов в случае возможной утраты образцов;
- методика испытаний образцов, методика измерения и регистрации отклика, критерии отказов при дефектации сборочных единиц.

Обработка результатов АМФЭ. В результате обработки получают модель исследуемого процесса в виде полинома первого (4) или второго порядка (1) и (3), в котором дана зависимость отклика y от заданных факторов X_i. Для ввода задачи в компьютер подготавливают следующие исходные данные [6 и 7]:

N – количество строк матрицы эксперимента;

k – количество независимых переменных (факторов);

X_{iu} … X_{ku} – кодированные значения от i-й до k-й независимой переменной в u-й строке матрицы;

- характер дублирования (в зависимости от него задаются исходные данные от m до y_l): равномерное; неравномерное; в одной точке; в отдельной серии опытов, не входящей в матрицу;

m – количество дублированных опытов в каждой строке матрицы при равномерном дублировании;

n_u– то же в u-й строке матрицы при неравномерном дублировании;

n_1 – то же в единственной дублированной строке матрицы;

L – то же в отдельной серии опытов, не входящих в матрицу;

y_{ui} – отклик в i-м дублированном опыте u-й строки матрицы;

y_{1i} – то же в i-м опыте единственной дублированной строки матрицы;

y_u – то же в недублированных строках матрицы;

y_l – то же в l-м дублированном опыте отдельной серии;

• количество рассчитываемых коэффициентов регрессии: все коэффициенты; часть коэффициентов;

b_0, b_i, b_{ij}, b_{ijk} – перечисление рассчитываемых коэффициентов;

α^* – доверительная вероятность.

Воспроизводимость опытов (ошибка эксперимента, однородность дисперсий) характеризуется дисперсией воспроизводимости:

$$S^2\{y\} = S_E/f_E,$$

где S^2 – сумма квадратов отклонений отклика;

f_E – число степеней свободы.

Величины S_E и f_E в зависимости от характера дублирования опытов определяют по формулам табл. 5, в которой дополнительно использованы следующие условные обозначения:

$\bar{y}_u$ – среднее арифметическое значение отклика в u-й строке;

$\bar{y}_1$ – то же в единственной дублированной строке;

$\bar{y}$ – то же в отдельной серии опытов.

При равномерном дублировании воспроизводимость опытов оценивают по критерию В. Дж. Кохрена

$$C_E = S^2_{u\,\max} / (\sum_{J=1}^{N} S^2_u);$$
$$S^2_u = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_{uj} - \bar{y}_u)^2,$$

где S^2_u – дисперсия отклика по u-й строке матрицы;

$S^2_{u\,\max}$ – максимальное значение из всех S^2_u.

Если рассчитанное значение C_E при $f_1 = m - 1$, $f_2 = N$ и заданной α^* не превосходит табличного значения ($C_E \le C_{\text{табл}}$), то нет оснований отвергать воспроизводимость опытов в эксперименте и можно пользоваться рассчитанным значением $S^2\{y\}$.

Во всех других случаях дублирования воспроизводимость опытов оценивается по критерию М. С. Бартлетта

$$\chi^2_E = \frac{1}{C}(f_E \lg S^2\{y\} - \sum_{u=1}^{N} f_u \lg S^2_u);$$

$$C = 0{,}4343\ [1 + \frac{1}{3(N-1)}\left(\sum_{u=1}^{N}\frac{1}{f_u} - \frac{1}{f_E}\right)];$$

$$f_u = n_u - 1.$$

Таблица 5

Характер дублирования опытов	Сумма квадратов S_E	Число степеней свободы f_E
Неравномерное	$\sum_{u=1}^{N}\sum_{j=1}^{nu}(y_{uj} - \bar{y}_u)^2$	$\sum_{u=1}^{N}(n_u - 1)$
Равномерное ($n_u = m$)	$\sum_{u=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}(y_{uj} - \bar{y}_u)^2$	$N(m-1)$
В одной точке матрицы ($u = 1$)	$\sum_{j=1}^{n1}(y_{1j} - \bar{y}_1)^2$	$n_1 - 1$
В отдельной серии из L опытов, не входящей в матрицу	$\sum_{l=1}^{L}(y - \bar{y})^2$	$L - 1$

Если χ^2_E при $f = N - 1$ и заданной α^* не превосходит табличного значения критерия К. Пирсона ($\chi^2_E \le \chi^2_{\text{табл}}$), то нет оснований отвергать воспроизводимость опытов в эксперименте и можно пользоваться рассчитанным значением $S^2\{y\}$.

Коэффициенты регрессии модели полинома определяют по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}\bar{y}_u;\ b_i = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}X_{iu}\bar{y}_u;$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}X_{iu}X_{ju}\bar{y}_u;\ b_{ijs} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}X_{iu}X_{ju}X_{su}\bar{y}_u;$$

$$b_{ijs\ldots k} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}X_{iu}X_{ju}X_{su}\ldots X_{ku}\bar{y}_u$$

при $i < j$; $j < s$, …, $s < k$ и т. д.,

где X_{iu}, X_{ju}, X_{su}, … , X_{ku} – кодированные значения i-го, j-го, s-го … k-го факторов в u-й строке матрицы. Их значимость определяется по критерию Стьюдента (У. Госсета):

$$t_i = |b_i|/\sqrt{S^2\{b_i\}};\ t_0 = |b_0|/\sqrt{S^2\{b_0\}};\ t_{ij} = b_{ij}/\sqrt{S^2\{b_{ij}\}};$$

$$S^2\{b_0\} = S^2\{b_i\} = S^2\{b_{ij}\} = S^2\{y\} / (\sum_{u=1}^{N} n_u),$$

где $S^2\{b\}$ – дисперсии, характеризующие ошибку в определении регрессии.

Если расчетное значение t_i (или t_{ij}) при f_E и заданной α^* больше табличного значения двустороннего критерия ($t_i > t_{\text{табл}}$ или $t_{ij} > t_{\text{табл}}$), то оцениваемый коэффициент регрессии b_i или b_{ij} значим. Если $t_i \le t_{\text{табл}}$, то данный коэффициент из уравнения исключается. Незначимость коэффициентов регрессии может быть обусловлена следующими причинами: фактор

Таблица 6

Характер дублирования опытов	Остаточная сумма квадратов S_{LF}
Неравномерное	$\sum_{u=1}^{N} n_u(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$
Равномерное ($n_u = m$)	$m\sum_{u=1}^{N}(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$
В одной точке матрицы (u = 1)	$\sum_{u=1}^{N} n_u(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2 = n_l(\bar{y}_l - \hat{y}_l)^2 + \sum_{u=1}^{N-1}(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$
В отдельной серии из L опытов, не входящей в матрицу	$\sum_{i=1}^{L}(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$

не влияет на параметр оптимизации; велика ошибка в определении отклика; мал шаг варьирования фактора; экстремум функции отклика по данной переменной находится вблизи центра плана.

Если один из коэффициентов регрессии b_i оказался намного больше каждого из остальных или даже больше b_0, то это значит, что интервал варьирования I_i этого фактора выбран чрезмерно большим и эксперимент надо спланировать заново.

Оценку адекватности модели опытным данным выполняют тогда, когда $N - \lambda > 0$. Для этого рассчитывают дисперсию адекватности

$$S^2_{\text{ад}} = S_{LF}/f_{LF},$$

где S_{LF} – остаточная сумма квадратов;

f_{LF} – число степеней свободы.

Величины S_{LF} и f_{LF} в зависимости от характера дублирования опытов определяют по формулам табл. 6; символом $\hat{y}_u$ обозначено значение в u-й строке, рассчитанное по модели со значимыми членами, а $\hat{y}_1$ – в единственной дублированной строке; число степеней свободы $f_{LF} = N - \lambda$.

Адекватность модели оценивают по значению критерия Р. Фишера

$$F_{\text{ад}} = S^2_{\text{ад}}/S^2\{y\}.$$

Если $F_{\text{ад}}$ при f_{LF} и f_E и заданной α^* не превосходит табличного значения ($F_{\text{ад}} \le F_{\text{табл}}$), то математическая модель адекватна опытным данным.

Для каждого варианта расчета на печать выдаются: исходные данные; результаты расчета: S_E, f_E, $S^2\{y\}$, C_E (или χ^2_E), b_0, b_i, b_{ij}, t_0, t_i, t_{ij}, $t_{\text{табл}}$, λ, S_{LF}, $S^2_{\text{ад}}$, f_{LF}, $F_{\text{ад}}$.

Выводы. Многофакторные статистически спланированные эксперименты – наиболее научно обоснованный и достоверный метод исследования зависимости надежности асинхронного двигателя от конструктивных и технологических факторов.

Подготовка многофакторного эксперимента включает выбор: объекта и области исследований; математической модели исследуемого процесса; параметров оптимизации этого процесса; конструктивных и технологических факторов, априорно влияющих на объект исследований.

Планирование многофакторного эксперимента предусматривает выбор стратегии планирования и плана испытаний в зависимости от предполагаемого вида математической модели исследуемого процесса, а проведение – изготовление опытных образцов и их испытания.

В обработку результатов эксперимента входят: оценка воспроизводимости опытов; расчет коэффициентов регрессии и оценка их значимости; оценка адекватности полученной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хальд А.* Математическая статистика с техническими приложениями /А. Хальд. – М.: Иностр. лит-ра, 1956. – 664 с.
2. *Адлер Ю. П.* Применение математических методов при анализе надежности радиоэлектронной аппаратуры / Ю. П. Адлер, Н. В. Иванова, Б. Ю. Махнин // Проблемы планирования эксперимента: сб. тр. – М.: Наука, 1969. – С. 298–314.
3. *Налимов В. В.* Статистическое планирование экстремальных экспериментов / В. В. Налимов, Н. А. Чернова. – М.: Наука, 1965. – 340 с.
4. *Надежность* асинхронных двигателей / Б. Н. Ванеев, В. Д. Главный, В. М. Гостищев, Л. И. Сердюк. – К.: Техника, 1983. – 143 с.
5. *Захарченко П. И.* Обеспечение надежности асинхронных двигателей / П. И. Захарченко, И. Г. Ширнин, Б. Н. Ванеев, В. М. Гостищев. – Донецк: УкрНИИВЭ, 1998. – 324 с.
6. *Адлер Ю. П.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – М.: Наука, 1976. – 283 с.
7. *Таблицы* планов для факторных и полиномиальных моделей / В. З. Бродский, Л. И. Бродский, Т. И. Голикова, Е. П. Никитина. – М.: Металлургия, 1982. – 742 с.
8. *Круг Г. А.* Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции / Г. А. Круг, Ю. А. Сосулин, В. А. Фатуев. – М.: Наука, 1977. –208 с.
9. *Лецкий Э. К.* Планирование ускоренных испытаний на надежность/ Э. К. Лецкий // Надежность и контроль качества. – 1981. – № 7. – С. 11–17.