

Механізація, електрифікація

УДК 631.816. 631.333
© 2012

В.І. Смаглий
кандидат
технічних наук

Національний
науковий центр
«Інститут механізації
та електрифікації
сільського господарства»

ПРО СИЛУ КОРІОЛІСА ДЛЯ ЛОПАТКИ З ГОРИЗОНТАЛЬНОЮ ТА НАХИЛЕНОЮ ВІССЮ ОБЕРТАННЯ

Установлено, що сила Коріоліса не залежить від кута нахилу осі обертання лопатки, а потужність, яку вона розвиває, завжди дорівнює сумі потужності, яку розвиває відцентрова сила частинки на її рух уздовж лопатки, і потужності руху частинки, коли вона переходить на інший радіус обертання.

Проблема. Сила Коріоліса виникає у багатьох механізованих процесах [2]. Її виведення через векторний аналіз переносного і відносно-го рухів матеріальної частинки [3, 4] не дає чіткого розуміння її фізичної суті, що може призвести до помилок у застосуванні цієї сили.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Найповніше її виведення розкрито в джерелах [1, 3, 4]. За математичними викладками [3, 4] важко зрозуміти її фізичну суть, а просте її виведення [1] через енергетичний аналіз такого процесу охоплює лише лопатки з вертикальною віссю обертання.

Мета досліджень — вивести силу Коріоліса на основі фізичних процесів, які відбуваються з частинкою на лопатці з горизонтальною і нахиленою віссю обертання, дослідити їх та узагальнити результати.

Мета досліджень — вивести силу Коріоліса на основі фізичних процесів, які відбуваються з частинкою на лопатці з горизонтальною і нахиленою віссю обертання, дослідити їх та узагальнити результати.

Результати досліджень. Розглянемо лопатку зі взаємно перпендикулярними полицями, нижньою — розташованою під кутом γ до диска, перпендикулярного до горизонтальної осі його обертання, і боковою — встановленою перпендикулярно до диска на відстані R_0 від цієї осі. Тоді повна енергія E (Дж) матеріальної частинки масою m (кг), яка обертається з лопаткою із кутовою швидкістю ω (1/с) і рухається вздовж неї зі швидкістю V_L (м/с) на радіусі R (м) від осі обертання в положенні її бокової полиці під кутом θ до базової вертикальної площини,

що проходить через цю вісь, при $f=0$ дорівнюватиме (рис. 1):

$$E = (m/2)[(\omega R \pm V_{Ly})^2 + (V_{Lx})^2 + (V_{Lz})^2] + mgh, \quad (1)$$

де V_{Lx}, V_{Ly} і V_{Lz} — проекції швидкості V_L на координатні осі X, Y, Z , м/с; α — кут між радіусом R і бічною полицею лопатки, радіан; h, h_0 — відповідно висота підняття частинки та осі обертання диска над землею поверхнею, м; g — прискорення вільного падіння, 9,81 м/с².

Підставивши в (1) значення $V_{Lx} = V_L \cos \gamma \cos \alpha$; $V_{Ly} = V_L \cos \gamma \sin \alpha$; $V_{Lz} = V_L \sin \gamma$, взявши похідної по t від обох частин (9) та проведено спрощень, одержимо:

$$N = m(\omega^2 R \dot{R} + V_L \dot{V}_L \pm \omega R_0 \dot{V}_L \cos \gamma) + mg \dot{h}. \quad (2)$$

З рис. 1 при $f=0$: $\dot{R} = V_L \cos \gamma \cos \alpha$; $\dot{V}_L = \omega^2 R \cos \alpha \cos \gamma + g \cos \theta \cos \gamma$; $h = h_0 - R \cos(\theta - \alpha)$; $\dot{h} = \pm \omega R \sin(\theta - \alpha) - V_L \cos \gamma \cos \theta$, підстановка яких у (2) дає:

$$N = 2m\omega^2 V_L R \cos \gamma \cos \alpha \pm m\omega^3 R_0 R \cos^2 \gamma \cos \alpha \mp mg\omega R_0 \cos \theta \sin^2 \gamma \pm mg\omega R \sin \theta \cos \alpha. \quad (3)$$

Якщо $f \neq 0$, до загальних витрат потужності в (2) додається потужність сил тертя частинки по лопатці. Тоді зведена сила сил тертя F_T (рис. 1) буде складатись із п'яти сил, а саме: із сили $F_1 = fmg \sin \theta$ тертя бічної полиці лопатки по частинці від перпендикулярної до неї складової сили ваги частинки; із сили $F_2 = fm\omega^2 R \sin \alpha$ тертя від перпендикулярної до бічної полиці лопатки складової відцентрової сили частинки; із сили $F_3 = fmg \cos \theta \sin \gamma$ тертя по нижній полиці лопатки від перпендикулярної до неї складової

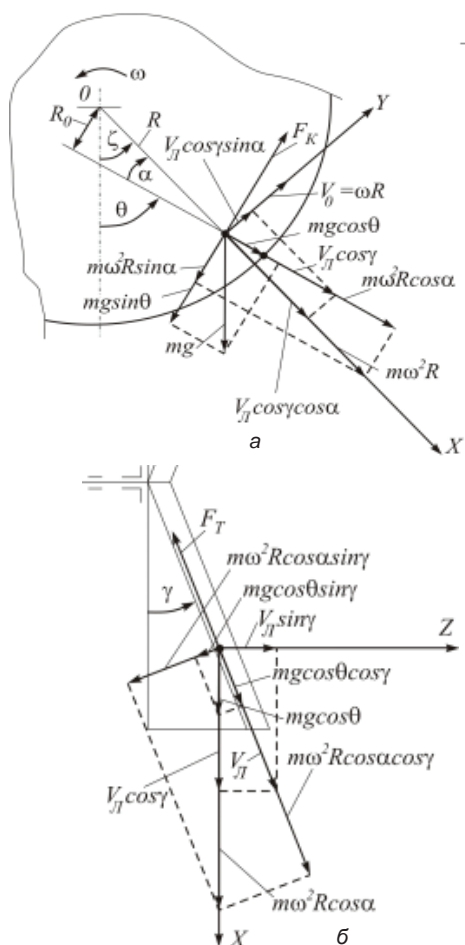


Рис. 1. Сили, які діють на частинку (а — вид по горизонтальній осі обертання диска; б — вид збоку перпендикулярно до бічної полиці лопатки)

сили ваги частинки; із сили $F_4 = f m \omega^2 R \cos \alpha \sin \gamma$ тертя від перпендикулярної до нижньої полиці лопатки складової відцентрової сили частинки, із сили $F_5 = F_K$ тертя від сили інерції Кориоліса, перпендикулярної до бокової полиці лопатки. Тоді з урахуванням (2) маємо:

$$N = m(\omega^2 R \ddot{R} + V_{\Gamma} \dot{V}_{\Gamma} \pm \omega R_0 \dot{V}_{\Gamma} \cos \gamma) + m g \dot{h} + F_T V_{\Gamma}. \quad (4)$$

Підставивши: $\dot{R} = V_{\Gamma} \cos \gamma \cos \alpha$; $\dot{V}_{\Gamma} = \omega^2 R \cos \alpha \cos \gamma + g \cos \theta \cos \gamma - F_T / m$; $\dot{h} = \pm \omega R \sin(\theta - \alpha) - V_{\Gamma} \cos \gamma \cos \alpha$ в (4), одержуємо для показаного на рис.1 випадку:

$$N = 2m\omega^2 V_{\Gamma} R \cos \gamma \cos \alpha \pm m\omega^3 R_0 R \cos^2 \gamma \cos \alpha \mp m g \omega R_0 \cos \theta \sin^2 \gamma \pm m g \omega R \sin \theta \cos \alpha \mp \omega R_0 F_T \cos \gamma. \quad (5)$$

Аналізуючи (3, 5), бачимо, що (5) відрізі-

няється від (3) лише останнім членом, який відповідає потужності паралельної диску складової сил тертя частинки $F_T \cos \gamma$ по лопатці на плечі R_0 за даного значення ω . Оскільки тертя частинки по лопатці направлено протилежно силі тертя лопатки по частинці (рис. 1), у цьому разі за обертання диска проти годинникової стрілки сила $F_T \cos \gamma$ допомагатиме обертати лопатку. У цьому випадку перед цим членом стоїть знак (-). Це свідчить про вияви внутрішньої потужності, яку тут повертають у систему переносного руху сили тертя частинки по лопатці. Перший член справа в (3 і 5), який стосується сили Кориоліса, показує, що таке розташування осі обертання диска та лопатки не змінює цієї сили. Коли вісь обертання нахилити під кутом β до горизонтальної площини, сила mg ваги частинки спочатку розкладеться на перпендикулярну до диска складову $mg \sin \beta$ та паралельну диску складову $mg \cos \beta$, які лежать у площині, паралельній базовій вертикальній площині, що проходить через вісь

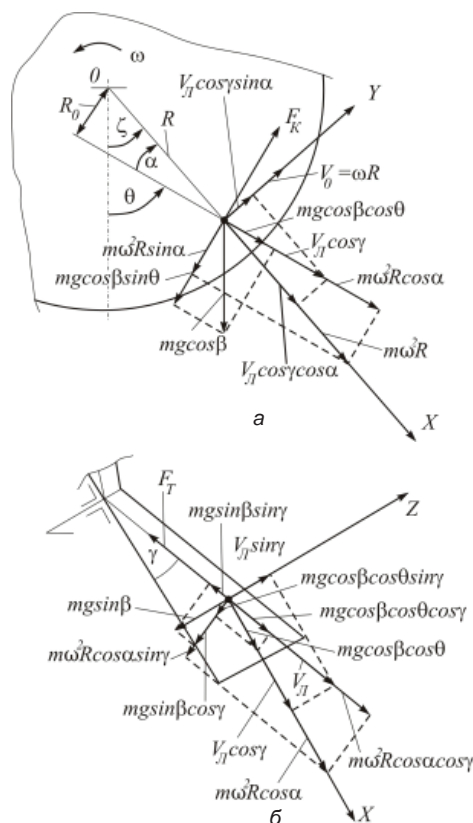


Рис. 2. Сили, які діють на частинку (а — вид по нахилений осі обертання диска; б — вид збоку перпендикулярно до бокової полиці лопатки)

обертання; далі на поздовжні та перпендикулярні до полиць лопатки складові (рис. 2 а, б).

Складові сили $F_{\perp} = m\omega^2 R$ не залежать від β як при вертикальній [1], так і горизонтальній (рис. 1 а, б) та нахиленій (рис. 2 а, б) осі обертання такої лопатки.

Розташували осі координат так, щоб вісь ОХ проходила вздовж радіуса R перебування частинки на лопатці, вісь ОУ — по вектору $V_0 = \omega R$ колової швидкості частинки, а вісь ОZ — перпендикулярно до диска (рис. 2 а, б), запишемо значення складових V_{\perp} по цих осях: $V_{\perp X} = V_{\perp} \cos \gamma \cos \alpha$; $V_{\perp Y} = \omega R \pm V_{\perp} \cos \gamma \sin \alpha$; $V_{\perp Z} = V_{\perp} \sin \gamma$. Тоді енергія частинки при $f=0$ дорівнюватиме:

$$E = (m/2)[(\omega R \pm V_{\perp Y})^2 + (V_{\perp X})^2 + (V_{\perp Z})^2] + mgh, \quad (6)$$

що після підстановки складових, деяких перетворень та взяття похідної з обох частин (6) по часу t дає:

$$N = m(\omega^2 R \dot{R} + V_{\perp} \dot{V}_{\perp} \pm \omega R_0 V_{\perp} \cos \gamma) + mgh. \quad (7)$$

Оскільки при $f=0$ з рис. 2 а, б:

$\dot{V}_{\perp} = \omega^2 R \cos \alpha \cos \gamma + g \cos \beta \cos \theta \cos \gamma - g \sin \beta \sin \gamma$; $\dot{R} = V_{\perp} \cos \gamma \cos \alpha$; $\dot{h} = \pm \omega R \cos \beta \sin(\theta - \alpha) - V_{\perp} \cos \beta \cos \theta \cos \gamma + V_{\perp} \sin \gamma \sin \beta$, після їх підстановки в (7) отримуємо:

$$N = 2 m \omega^2 R V_{\perp} \cos \gamma \cos \alpha \pm m \omega^3 R_0 R \cos^2 \gamma \cos \alpha \mp m g \omega R_0 \cos \beta \cos \theta \sin^2 \gamma \mp m g \omega R_0 \cos \gamma \sin \gamma \sin \beta \pm m g \omega R \cos \beta \sin \theta \cos \alpha. \quad (8)$$

У цьому разі за визначення \dot{h} враховувався не лише рух частинки в її проекції на диск, а й її рух зі швидкістю $V_{\perp Z}$ по осі Z, нахиленій до горизонтальної площини під кутом β (рис. 2 а, б). Цьому відповідає член $V_{\perp} \sin \gamma \sin \beta$ у виразі \dot{h} для цього випадку. З (8) видно, що в цьому разі у процесі енергообміну в системі лопатка — частинка беруть участь кілька сил та їхніх складових. Перша — сила Кориоліса $F_K = 2m\omega V_{\perp} \cos \gamma$, яка на плечі $R \cos \alpha$ за даної ω розвиває потужність, котрій у (8) відповідає перший член справа. Як показано в [1], друга і третя сили являють собою відповідно складову $F_{\perp \beta} = \pm m \omega^2 R \sin \alpha$ відцентрової сили, яка діє на плечі $R \cos \alpha$ перпендикулярно до бічної полиці лопатки, та складову відцентрової сили $F_{\perp \theta} = \mp m \omega^2 R \cos \alpha \sin \gamma$, що діє перпендикулярно до нижньої полиці лопатки на плечі R_0 (рис. 2 а, б). Разом вони розвивають потужність, котрій у (8) відповідає другий член справа. Четверта — перпендикулярна до нижньої полиці лопатки складова $F_{\perp H1} = \mp m g \cos \beta \cos \theta \sin \gamma$ від складової $m g \cos \beta \cos \theta$ сили ваги частинки (рис. 2 а, б). Остання своєю горизонтальною складовою $F_{\perp H1} \sin \gamma$ на плечі R_0 за даної ω розвиває потужність, якій у (8) відповідає третій член справа. Причому в показано-

му (рис. 2) випадку ця сила нібито крутить лопатку. У цьому випадку перед цим членом стоїть знак (-). П'ята — перпендикулярна до нижньої полиці лопатки складова $F_{\perp H2} = \mp m g \sin \beta \cos \gamma$ від складової $m g \sin \beta$ сили ваги частинки (рис. 2 а, б), котра своєю паралельною до диска складовою $F_{\perp H2} \sin \gamma$ на плечі R_0 за даної ω розвиває потужність, якій у (8) відповідає четвертий член справа. При $\beta = \pi/2$ (8) переходить у вираз, отриманий в [1] для вертикальної осі обертання такої лопатки. При цьому незмінними лишаються лише сили, яким у (8) відповідають перший і другий члени справа, зокрема і сила Кориоліса, аналіз яких подано вище.

Коли $f \neq 0$, до загальних енерговитрат потужності в (7) додається аналогічно (4) потужність $N_T = F_T V_{\perp}$ сил тертя частинки по лопатці. У цьому разі загальна сила тертя частинки F_T виникає від перпендикулярних до нижньої полиці лопатки складових $m g \cos \beta \cos \theta \sin \gamma$ та $m g \sin \beta \cos \gamma$ сили ваги частинки, а також складової $m \omega^2 R \cos \alpha \cos \gamma$ її відцентрової сили; та від перпендикулярних до бічної полиці лопатки складових $m g \cos \beta \sin \theta$ сили ваги частинки та $m \omega^2 R \sin \alpha$ відцентрової сили частинки, а також від сили інерції Кориоліса F_K (рис. 2 а, б). Таким чином, при $f \neq 0$ одержуємо:

$$\dot{V}_{\perp} = \omega^2 R \cos \alpha \cos \gamma + g \cos \beta \cos \theta \cos \gamma - g \sin \beta \sin \gamma - F_T / m; \quad \dot{R} = V_{\perp} \cos \gamma \cos \alpha; \\ F_T = f m g (\cos \beta \cos \theta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \pm \cos \beta \sin \theta) + f m \omega^2 R (\cos \alpha \sin \gamma \pm \sin \alpha) + f 2 m \omega V_{\perp} \cos \gamma; \\ \dot{h} = \pm \omega R \cos \beta \sin(\theta - \alpha) - V_{\perp} \cos \beta \cos \theta \cos \gamma + V_{\perp} \sin \beta \sin \gamma.$$

Після їх підстановки в ідентичний для нашої випадку вираз (4) і деяких спрощень, маємо:

$$N = 2 m \omega^2 R V_{\perp} \cos \gamma \cos \beta \pm m \omega^3 R R_0 \cos^2 \gamma \cos \alpha \mp m g \omega R_0 \cos \beta \cos \theta \sin^2 \gamma \mp m g \omega R_0 \cos \gamma \sin \gamma \sin \beta \pm m g \omega R \cos \beta \sin \theta \cos \alpha \mp \omega R_0 F_T \cos \gamma. \quad (9)$$

Вираз (9) відрізняється від (8) лише останнім членом справа. З нього видно, що в цьому разі зведена сила тертя своєю горизонтальною складовою $F_T \cos \gamma$ на плечі R_0 за даної ω розвиває потужність, якій і відповідає останній член у (9). Знак (-) перед ним означає, що в показаному на рис. 2 а, б випадку ця складова допомагає крутити лопатку, що засвідчує вияви в системі лопатка — частинка паразитної потужності.

За обертання диска за годинниковою стрілкою перед цим членом стоятиме знак (+), що робить цю потужність не паразитною. Всі інші сили, зокрема і сила Кориоліса, тут лишилися такими, якими вони були у (8). Сила Кориоліса не змінюється тут через особливий збіг обставин, унаслідок чого різні за своєю фізичною

суттю явища породили специфічні за аналітичним виглядом сили, частина з яких (F_C , F_B , F_0) завжди зводиться в силу Коріоліса [1]. Вони є незалежні від кута β нахилу цієї осі і завжди отримуються із виразів $m\omega^2 R \dot{R} + mV_L \dot{V}_L$, які одержані взяттям похідної із перших двох членів справа від суми $\omega^2 R^2$ та $(V_L)^2$ у виразі кінетичної енергії частинки [1]. Однак сума квадратів

V_0 та V_L дорівнює квадрату абсолютної швидкості частинки лише за перпендикулярності векторів V_0 і V_L . Тому розрахована із суми квадратів згаданих вище векторів при $\alpha \neq 0$ енергія відрізняється від E_K на величину $\pm m\omega R V_L \cos \alpha \sin \alpha$. На покриття цієї різниці і йде потужність протидії перпендикулярним боковій і нижній полицям лопатки складовим відцентрової сили.

Висновки

Для прямолінійної лопатки, бокова полиця якої паралельна осі її обертання, а нижня — перпендикулярна до бокової, сила Коріоліса не змінює свого аналітичного вигляду за різного розташування цієї осі в просторі.

Потужність сили, з якою лопатка протидіє перпендикулярним до її полиць складовим відцентрової сили частинки, йде на покриття

різниці між потужністю сили Коріоліса і потужністю, витраченої на зміну кінематичних параметрів руху частинки, коли кут між векторами V_0 і V_L не є прямим.

Термін «сила Коріоліса» потребує розмежування: активна сила Коріоліса і сила інерції Коріоліса [3]. Це стосується і їхніх прискорень.

Бібліографія

1. Смаглій В.І. Виведення сили і прискорення Коріоліса при русі матеріальної частинки вздовж лопатки, що обертається навколо вертикальної осі. Наук. доповідь. — Глеваха: ННЦ «ІМЕСГ», 2010. — 18 с.
2. Василенко П.М. Теорія руху частинки по шероховатим поверхностям сільськогосподарських

- машин. — К.: изд-во УАСХН, 1960. — 279 с.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка. — К.: Техніка, 2004. — 510 с.
4. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка: Підруч. — Ч.1. — Статика. Кінематика. — К.: Знання, 2004. — 599 с.