

УДК 631.816; 631.333
© 2012

В.І. Смаглий,
кандидат
технічних наук
ННЦ «ІМЕСГ»

РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ ПО ЛОПАТЦІ ПРИ НАХИЛІ ОСІ ЇЇ ОБЕРТАННЯ

*Виведено рівняння руху матеріальної частинки
вздовж прямолінійної лопатки загального
положення з нахилою віссю її обертання,
отримано найбільш загальний його розв'язок у
квадратурах.*

Актуальність проблеми. Рух матеріальної частинки по лопатці, яка обертається навколо осі, має місце в багатьох механізованих процесах [1, 2]. У реальних умовах усі поля і поверхні під машинами на стаціонарі не є ідеально горизонтальними, до того ж і сама вісь обертання конструкційно може бути нахилою до горизонтальної площини [3]. Тому такі дослідження є актуальними.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Найбільш повно такі дослідження проведено в [1, 2]. Однак в них не враховано кута нахилу поверхні поля та поверхні опори, тому потрібні додаткові дослідження в цьому напрямі.

Мета досліджень — отримати рівняння руху матеріальної частинки вздовж прямолінійної лопатки загального положення при зміні кута нахилу до горизонту осі її обертання, знайти найбільш точні їх розв'язки у квадратурах для загальних початкових умов руху частинки та проаналізувати їх.

Результати досліджень. Нехай, наприклад, дисковий розсіювач туків з конструкційним кутом β_K нахилу осі обертання диска до горизонтальної поверхні перебуває на полі, нахилому під кутом η до горизонту. Через центр диска (точку O) проведемо горизонтальну площину і площину, паралельну поверхні поля. Вісь OY декартової системи координат проведемо по лінії їх перетину, OX — горизонтально через точку O , а OZ — вертикально, так, щоб горизонтальна проекція $\rho \cos \beta_K$ вектора ρ , направлено вгору по осі обертання диска, лежала між осями OX і OY (рис. 1). Тоді проекції ρ на осі координат дорівнюватимуть: по OX ($\rho_x = \rho \cos \beta_K \cos \psi_1$), по OY ($\rho_y = \rho \cos \beta_K \sin \psi_1$) і по OZ ($\rho_z = \rho \sin \beta_K$). Тут ψ_1 — кут між вертикальною площиною, в якій лежала б вісь обертання диска в даному положенні агрегата на горизонтальному полі, і вертикальною площиною, проведеною через точку O перпендикулярно до нахилої поверхні поля в напрямку її максимальної крутизни, тобто між проекцією $\rho \cos \beta_K$ вектора ρ на горизонтальному полі і віссю OX (рис. 1).

Під час переходу агрегату у взятому його положенні на нахилу під кутом η поверхню поля поворот вектора ρ відбуватиметься навко-

ло осі OY , а його проекція $\rho \cos \beta_K \sin \psi_1$ на цю вісь залишиться незмінною. Тоді проекція ρ на XOZ , яка подана на XOZ^1 (рис. 1) і дорівнює

$\rho \sqrt{\sin^2 \beta_K + \cos^2 \beta_K \cos^2 \psi_1}$, повернеться на кут η , у результаті попередній кут ξ_1 між цією проекцією і віссю OX стане рівним $\xi_2 = (\xi_1 + \eta)$, тобто під час повороту площини, паралельної поверхні поля, навколо осі OY відносно горизонту проти годинникової стрілки він зменшиться на η , а при зворотному повороті — зросте на η . Так як

$\cos \xi_1 = (\cos \beta_K \cos \psi_1) / \sqrt{\sin^2 \beta_K + \cos^2 \beta_K \cos^2 \psi_1}$, (рис. 1), проекція вектора ρ на вісь OX після його повороту нахиленим полем дорівнюватиме: $\rho = \sqrt{\sin^2 \beta_K + \cos^2 \beta_K \cos^2 \psi_1} [\cos(\xi_1 \mp \eta)]$, а проекція ρ на вісь OY не змінюється. При цьому тангенс ψ_2 буде рівним:

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{\cos \beta_K \sin \psi_1}{[\sqrt{\sin^2 \beta_K + \cos^2 \beta_K \cos^2 \psi_1}] [\cos(\xi_1 \mp \eta)]}$$

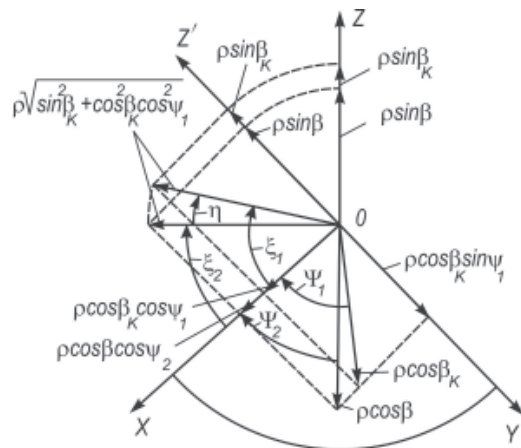


Рис. 1. До визначення кутів нахилу: β — осі обертання лопатки до горизонту; ψ_2 — осі OX до вертикальної площини, в якій лежить вісь обертання лопатки.

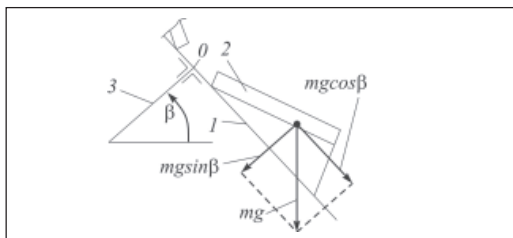


Рис. 2. До пояснення першого етапу розкладання сили ваги частинки

Поділений на ρ корінь квадратний із суми квадратів цих проекцій вектора ρ на осі OX і OY дає:

$$\cos \beta = \sqrt{(\sin^2 \beta_K + \cos^2 \beta_K \cos^2 \psi_1) \times \sqrt{[\cos^2(\xi_1 \mp \eta)] + \cos^2 \beta_K \sin^2 \psi_1}}$$

Тобто нахилена під кутом β до горизонту вісь обертання буде лежати у вертикальній площині, розташованій під кутом ψ_2 до осі OX , що фіксує її у просторі. За перебування ρ в інших октантах ψ_2 і β знаходять аналогічно.

Далі беремо лопатку із взаємно перпендикулярними полицями, нижня — встановлена під кутом γ до диска, а бічна — перпендикулярно до диска на відстані R_0 від нахиленої осі його обертання. Розвернемо диск так, щоб вісь його обертання розташовувалась у площині рисунка (рис. 2). Тоді складова сили ваги mg частинки розкладеться на перпендикулярну до диска 1 складову $mg \sin \beta$ та паралельну йому складову $mg \cos \beta$. Причому складова $mg \sin \beta$ одночасно буде паралельною осі 3 обертання диска 1 з лопаткою 2, а складова $mg \cos \beta$ буде пара-

лельною вертикальній площині, яка проходить через вісь 3 обертання диска 1 і його центр у точці O (рис. 2, рис. 3, а). Потім $mg \cos \beta$ розкладається на перпендикулярну до бічної полиці лопатки складову $mg \cos \beta \sin \theta$ та складову $mg \cos \beta \cos \theta$ (рис. 3, а), яка проходить паралельно диску і лежить у площині бічної полиці лопатки. Далі складова $mg \cos \beta \cos \theta$ розкладається на поздовжню лопатці складову $mg \cos \beta \cos \theta \cos \gamma$ та складову $mg \cos \beta \cos \theta \sin \gamma$, перпендикулярну до її нижньої полиці (рис. 3, а, б). Складова $mg \sin \beta$ розкладається на поздовжню лопатці складову $mg \sin \beta \sin \gamma$ та перпендикулярну до її нижньої полиці складову $mg \sin \beta \cos \gamma$ (рис. 3). Складові відцентрової сили $F_{\text{ц}} = m \omega^2 R$ частинки не залежать від β , тому вони не змінюються від зміни положення осі обертання лопатки (рис. 3 а, б).

Відповідно (рис. 3, а, б) рівняння руху частинки по лопатці, коли коефіцієнт тертя частинки по лопатці і диску $f \neq 0$, набуває вигляду:

$$\dot{V}_L = \omega^2 R \cos \alpha \cos \gamma + g \cos \beta \cos \theta \cos \gamma - g \sin \beta \sin \gamma - F_T / m; \quad (1)$$

$$F_T = fmg(\cos \beta \cos \theta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \pm \cos \beta \sin \theta) + f m \omega^2 R (\cos \alpha \sin \gamma \pm \sin \alpha) + f 2 m \omega V_L \cos \gamma,$$

де V_L — значення поточної швидкості руху частинки вздовж лопатки, м/с; R — радіус перебування частинки відносно осі її обертання, м; m , g — маса частинки (кг) і прискорення вільного падіння тіла — 9,81 м/с²; F_T — сумарна сила тертя полиць лопатки по частинці, Н; ω — кутова швидкість обертання диска та лопатки, 1/с; θ — кут між боковою полицею лопатки і вертикальною площиною, в якій лежить вісь обертання

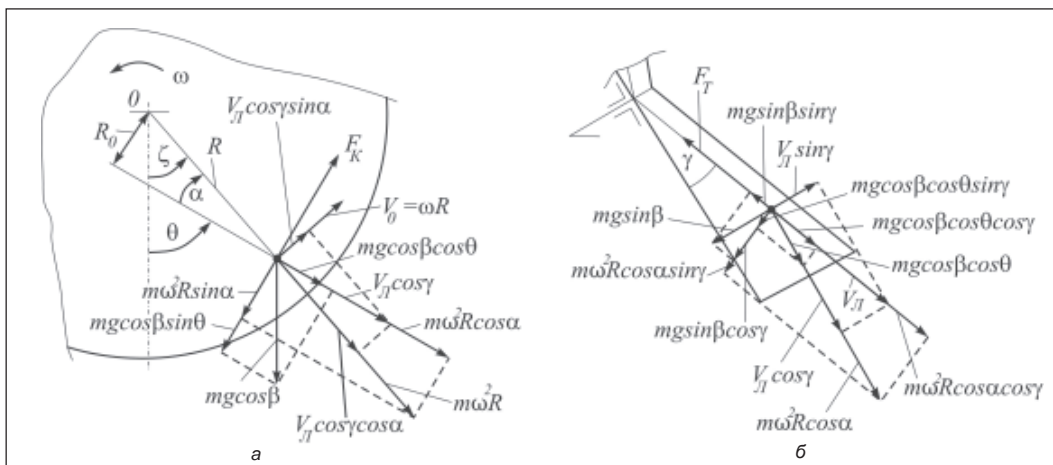


Рис. 3. Схема сил, які діють на частинку (а — вигляд по осі обертання диска; б — перпендикулярно до бокової полиці лопатки).

ня диска (рис. 2, а), радіан; α — кут між радіусом R і боковою полицею лопатки, радіан.

Зліва в (1) стоїть прискорення частинки вздовж лопатки m/c^2 . Перший член справа — поділена на масу частинки поздовжня лопатці складова відцентрової сили частинки; другий — поділена на масу частинки поздовжня лопатці складова сили ваги частинки, яка отримана від паралельної диску складової цієї сили; третій — поділена на масу частинки поздовжня лопатці складова сили ваги частинки, яка отримана від перпендикулярної до диска складової цієї сили (рис. 3).

У виразі F_T у дужках першого члена справа стоїть поділена на масу частинки і на прискорення вільного падіння тіла сума складових сили ваги частинки, перпендикулярних до бокової і нижньої полиць лопатки (рис. 3).

У дужках другого члена справа стоїть поділена на відцентрову силу частинки сума складових цієї сили, які перпендикулярні до бокової і нижньої полиць лопатки (рис. 3). Третій член — сила тертя від сили інерції Кориоліса. Верхні знаки тут відповідають ω проти годинникової стрілки, а нижні — за нею (рис. 3). Оскільки в момент подачі частинки на лопатку вона перебуває під певним початковим кутом нахилу θ_{Π} відносно базової площини (рис. 3), значення $\theta = \theta_{\Pi} \pm \omega t$; $\cos \theta = \cos(\theta_{\Pi} \pm \omega t)$; $\sin \theta = \sin(\theta_{\Pi} \pm \omega t)$; $R \sin \alpha = R_0$; $V_{\Pi} = \dot{S}$; $\dot{V}_{\Pi} = \ddot{S}$; $R \cos \alpha = \sqrt{R^2 - R_0^2} = S \cos \gamma$, що перетворює (1) в рівняння:

$$\ddot{S} + A \dot{S} + BS = L \cos(\theta_{\Pi} \pm \omega t) + D \sin(\theta_{\Pi} \pm \omega t) + P, \quad (2)$$

де S — шлях, пройдений частинкою вздовж лопатки, м; t — час руху частинки вздовж неї, с; $A = 2f\omega \cos \gamma$; $B = -\omega^2 \cos \gamma (\cos \gamma - f \sin \gamma)$; $L = g \cos \beta \times (\cos \gamma - f \sin \gamma)$; $D = \mp f g \cos \beta$; $P = -g \sin \beta (\sin \gamma + f \cos \gamma) \mp f \omega^2 R_0$.

Отримане рівняння (2) є неоднорідним лінійним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Метод їх розв'язування у квадратурах наведено в [4]. У цьому разі загальний розв'язок (2) має вигляд:

$$S = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + S^*, \quad (3)$$

де C_1, C_2 — постійні інтегрування однорідного рівняння, отриманого з (2); λ_1, λ_2 — корені характеристичного рівняння (2), які дорівнюють:

$$\lambda_1 = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}; \quad \lambda_2 = -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}; \quad (4)$$

S^* — частинний розв'язок рівняння (2), який шукається у вигляді:

$$S^* = l \cos(\theta_{\Pi} \pm \omega t) + d \sin(\theta_{\Pi} \pm \omega t) + p. \quad (5)$$

Визначивши з (5) похідні від S^* по t та підставивши їх, як і саме значення S^* з (5), у (2), одержимо:

$$l = \frac{L(B - \omega^2) \mp DA\omega}{(B - \omega^2)^2 + A^2\omega^2}; \quad d = \frac{D(B - \omega^2) \pm LA\omega}{(B - \omega^2)^2 + A^2\omega^2}; \quad p = \frac{P}{B}.$$

Після цього загальний розв'язок (3) набуває вигляду:

$$S = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + l \cos(\theta_{\Pi} \pm \omega t) + d \sin(\theta_{\Pi} \pm \omega t) + p, \quad (6)$$

звідки:

$$V_{\Pi} = \dot{S} = [C_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \lambda_2 \exp(\lambda_2 t)] \mp \omega \sin(\theta_{\Pi} \pm \omega t) \pm d \omega \cos(\theta_{\Pi} \pm \omega t).$$

З початкових значень: $t_{\Pi} = 0$; $\theta(t_{\Pi}) = \theta_{\Pi}$; $V_{\Pi}(t_{\Pi}) = V_{\Pi\Pi}$; $S(t_{\Pi}) = S_{\Pi}$ та рівнянь (6) визначаємо C_1 і C_2 :

$$C_1 = \frac{(S_{\Pi} \lambda_2 - V_{\Pi\Pi}) - (l \lambda_2 \mp d \omega) \cos \theta_{\Pi} - (d \lambda_2 \pm l \omega) \sin \theta_{\Pi} - p \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)};$$

$$C_2 = -\frac{(S_{\Pi} \lambda_1 - V_{\Pi\Pi}) - (l \lambda_1 \mp d \omega) \cos \theta_{\Pi} - (d \lambda_1 \pm l \omega) \sin \theta_{\Pi} - p \lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Для лопатки, зміщеної по інший бік від осі обертання на величину R_0 , напроти показаний на рис. 3, рівняння руху частинки набуде вигляду:

$$\dot{V}_{\Pi} = \omega^2 R \cos \alpha \cos \gamma + g \cos \beta \cos \theta \cos \gamma - g \sin \beta \sin \gamma - F_T / m; \quad (7)$$

$$F_T = f m g (\cos \beta \cos \theta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \pm \cos \beta \sin \theta) + f m \omega^2 R (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha) + f_2 m \omega V_{\Pi} \cos \gamma,$$

яке зводиться до (2) зміною лише P . Тут $P = -g \sin \beta (\sin \gamma + f \cos \gamma) \pm f \omega^2 R_0$.

Для вертикальної осі обертання: $\beta = \pi/2$, при $R \neq 0$, $f \neq 0$, $\gamma \neq 0$: $L = 0$; $D = 0$; $A = 2f\omega \cos \gamma$; $B = -\omega^2 \cos \gamma (\cos \gamma - f \sin \gamma)$; $P = -g (\sin \gamma + f \cos \gamma) \mp f \omega^2 R_0$, а рівняння (2) набуває вигляду: $\ddot{S} + A \dot{S} + BS = P$.

У нашому випадку (рис. 3) знак (-) відповідає обертанню диска проти годинникової стрілки, а (+) — за нею. У цьому разі $l = 0$, $d = 0$,

$p=P/B$, а розв'язок останнього рівняння має вигляд [4]:

$$S=C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + p; \quad (8)$$

$$V_{\Pi} = \dot{S} = C_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \lambda_2 \exp(\lambda_2 t),$$

де значення λ_1 і λ_2 залишаються незмінними і визначаються з (4), а сталі C_1 і C_2 за початкових умов: $t_{\Pi}=0$; $V_{\Pi}(t_{\Pi})=V_{\Pi\Pi}$; $S(t_{\Pi})=S_{\Pi}$ дорівнюватимуть:

$$C_1 = \frac{S_{\Pi} \lambda_2 - V_{\Pi\Pi} - p \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1};$$

$$C_2 = - \left[\frac{S_{\Pi} \lambda_1 - V_{\Pi\Pi} - p \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]. \quad (9)$$

Коли бокова полиця лопатки лежатиме по інший бік від осі обертання на відстані R_0 від неї напроти показаній на рис. 3, зміниться лише $P = -g(\sin\gamma + f \cos\gamma) \pm f \omega^2 R_0$, тому розв'язок рівняння буде ідентичним наведеному за нового значення P . Значення радіуса R , на якому перебуває частинка на лопатці, завжди визначається залежністю $R = \sqrt{S^2 \cos^2 \gamma + R_0^2} = (S \cos \gamma) / \cos \alpha$, а значення $S(t_{\Pi})=S_{\Pi}$ завжди дорівнює відстані між точкою на лопатці, в якій $R=R_0$, і точкою подачі частинки на лопатку з радіусом R_{Π} . Тому

початкове значення $S_{\Pi} \cos \gamma = \sqrt{R_{\Pi}^2 - R_0^2}$. Коли бокова полиця лопатки лежатиме у площині осі її обертання: ($R_0=0$), $R=S \cos \gamma$, $S=R / \cos \gamma$, а $S_{\Pi} \cos \gamma = R_{\Pi}$.

Для горизонтальної осі обертання диска з рис. 3: $\beta=0$, $\cos \beta=1$, $\sin \beta=0$, що дає:

$$\dot{V}_{\Pi} = \omega^2 R \cos \alpha \cos \gamma + g \cos(\theta_{\Pi} \pm \omega t) \cos \gamma - F_T / m; \quad (10)$$

$$F_T = m f [g \{ \cos(\theta_{\Pi} \pm \omega t) \sin \gamma \pm \sin(\theta_{\Pi} \pm \omega t) \} + \omega^2 R (\cos \alpha \sin \gamma \pm \sin \alpha) + 2 \omega V_{\Pi} \cos \gamma].$$

Вираз (10) зводиться до (2), де: $A=2f\omega \cos \gamma$; $B=-\omega^2 \cos \gamma (\cos \gamma - f \sin \gamma)$; $L=g(\cos \gamma - f \sin \gamma)$; $D=\pm f g$; $P=\pm f \omega^2 R_0$, де верхні знаки відповідають обертанню диска проти годинникової стрілки, а нижні — за нею (рис. 3). Його квадратуру шукають ідентично (2) за нових значень A , B , L , D , P , де λ_1 і λ_2 також визначаються з (4). Кут θ завжди береться $\theta = \theta_{\Pi} \pm \omega t$.

Коли бокова полиця лопатки буде розташована по інший бік від точки O на відстані R_0 від неї напроти показаній на рис. 3, рівняння (10) зводиться до (2), в якому: $A=2f\omega \cos \gamma$; $B=-\omega^2 \cos \gamma (\cos \gamma - f \sin \gamma)$; $D=\pm f g$; $L=g(\cos \gamma - f \sin \gamma)$; $P=\pm f \omega^2 R_0$, де верхні знаки відповідають обертанню диска проти годинникової стрілки, а нижні — за нею.

Висновки

Усі рівняння руху частинки вздовж лопатки із взаємоперпендикулярними полицями за її обертання є однотипними рівняннями, які розв'язуються у квадратурах одним і тим самим досить простим методом, показаним у статті. Значення кута θ нахилу бокової полиці лопатки до базової вертикальної площини, що проходить через нахилену вісь обертання диска, слід брати $\theta = \theta_{\Pi} \pm \omega t$ відповідно до напрямку обертання диска і відраховувати (разом зі значенням θ_{Π} в момент подачі частинки на лопатку) від нижньої ділянки сліду базової

площини на площині диска. Початкові і поточні значення шляху S руху частинки по лопатці пов'язані з початковим і поточним значеннями радіуса R обертання частинки навколо осі залежністю $S \cos \gamma = \sqrt{R^2 - R_0^2} = R \cos \alpha$.

Під час визначення розташування осі обертання диска у просторі одну із осей OX або OY декартової системи координат слід проводити по лінії перетину двох площин — горизонтальної і паралельної поверхні поля, проведених через центр диска.

Бібліографія

1. Адамчук В.В. Механіко-технологічні і технічні основи підвищення ефективності внесення твердих мінеральних добрив та хіммеліорантів: автореф. дис. на злобуття наук. ступ. д-ра техн. наук. — К., 2006. — 26 с.
2. Василенко П.М. Теорія руху частинки по шерохуватим поверхностям сільськогосподарських

машин. — К.: Изд-во УАСХН, 1960. — 283 с.

3. Либберман К.Е. Зарубежные машины для применения минеральных удобрений. — М., 1966.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1978. — Т. 2. — 575 с.