УДК 631.816: 631.333

В.І. Смаглій,
кандидат технічних наук
Національний науковий центр «ІМЕСГ»

РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ ПО КРИВОЛІНІЙНІЙ ЛОПАТЦІ З ВЕРТИКАЛЬНОЮ ВІССЮ ОБЕРТАННЯ

Виведене рівняння руху матеріальної частинки вздовж криволінійної лопатки з вертикальною віссю обертання відрізняється наявністю двох додаткових членів — силою тертя від відцентрової сили, яка виникає за відносного руху частинки по вигнутій боковій полиці лопатки, і силою тертя від додаткової відцентрової сили, яка виникає за відносного руху частинки по вигнутій нижній полиці лопатки.

Ключові слова: *рівняння Лагранжа другого роду, матеріальна частинка, узагальнені сили, відносна швидкість, відносне прискорення, відцентровані сили, сили тертя, сили ваги*

Актуальність проблеми. Рівняння руху матеріальної частинки по лопатці криволінійної форми, яка обертається навколо вертикальної осі, необхідне за оптимізації процесу розгону частинки в полі відцентрових сил, наприклад, лопаткою дискового розсіювача сипких матеріалів тощо.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Таке рівняння без його виведення подане в [2], що викликає сумніви стосовно його достовірності.

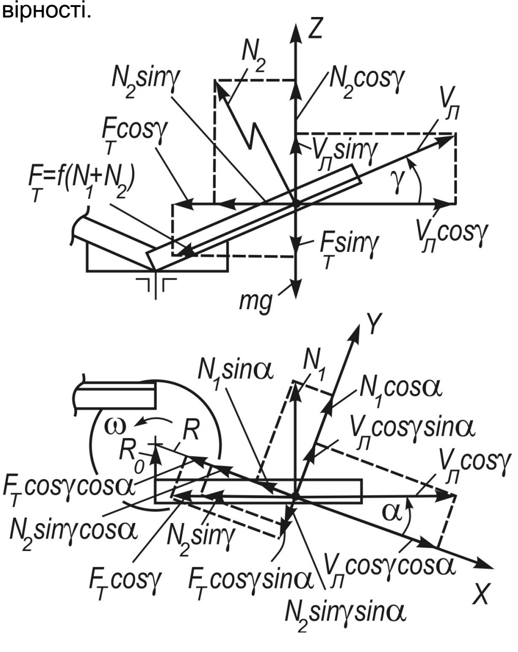

Рис. 1. Схема живих сил, які діють на частинку під час її складного руху вздовж лопатки загального положення з вертикальною віссю обертання

Мета досліджень — відпрацювати методику виведення і вивести таке рівняння на основі найзагальніших наукових підходів.

Результати досліджень. Універсальними рівняннями руху матеріальних тіл є рівняння Лагранжа другого роду [1, 3]. Розглянемо спочатку прямолінійну лопатку загального положення з вертикальною віссю обертання (рис. 1).

Нехай нижня плоска полиця лопатки нахилена під кутом γ до площини диска, а бічна плоска її полиця розміщена перпендикулярно до диска на відстані R_0 від осі його обертання. Тоді рівняння Лагранжа другого роду для такої частинки матимуть вигляд [1,3]:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial E}{\partial R} = Q_R; \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q_\phi; \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial E}{\partial h} = Q_H, \end{aligned} \qquad (1)$$

де h — висота підняття частинки на лопатці відносно диска, м; Q_R, Q_φ, Q_H — так звані живі [2] або ж узагальнені [1, 3] сили, які діють на частинку, відповідно: по радіусу R (м), по якому направлена вісь координат OX; по осі OY, направленій дотично до кола, на якому повертається на кут φ (радіан) частинка у складному русі; та по осі OZ, направленій по h паралельно осі обертання диска (рис. 1). Кінетична енергія E (Дж) частинки масою m (кг) в цьому разі дорівнює:

$$E = \frac{m}{2}[(\dot{R})^2 + R^2(\dot{\varphi})^2 + (\dot{h})^2]. \qquad (2)$$

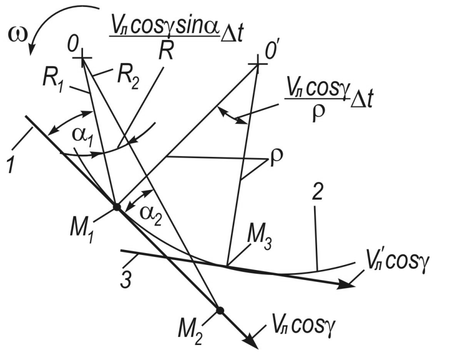

Рис. 2. До визначення значень $\dot{\alpha}$ та $\ddot{\varphi}$ під час руху частинки вздовж прямолінійної — 1 і криволінійної — 2 лопаток (3 — дотична до кривої 2 у точці M_3)

У разі обертання лопатки проти годинникової стрілки (рис. 1):

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{R}} = m\dot{R};\ \frac{\partial E}{\partial R} = mR(\dot{\varphi})^2;\ \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0;\ \frac{\partial E}{\partial \dot{h}} = mV_{Л}\sin\gamma;$$

$$\frac{\partial E}{\partial h} = 0;\ \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{R}} = m\ddot{R};\ \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR(\dot{R})(\dot{\varphi}) + mR^2\ddot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{h}} = m\dot{V}_{Л}\sin\gamma.$$

Після підстановки значень частинних похідних в (1) матимемо:

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{R} - mR(\dot{\varphi})^2 = Q_R; \\ & 2mR(\dot{R})(\dot{\varphi}) + mR^2\ddot{\varphi} = Q_{\varphi}; \\ & m\dot{V}_{Л}\sin\gamma = Q_H. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

У змінні (3) входять значення похідної $\dot{\alpha}$ від кута α нахилу радіуса R до бічної полиці лопатки по часу t та φ, тому для їх визначення розглянемо рис. 2. Нехай за елементарний проміжок часу Δt частинка, рухаючись у відносному русі по прямолінійній лопатці 1, перемістилася на горизонтальній проекції з точки M_1 в M_2. Тоді кут α_1 між радіусом R_1 і боковою полицею лопатки 1 зміниться і стане рівний α_2. Оскільки кут α_1 є зовнішнім кутом трикутника M_1OM_2, можна записати: $\alpha_1=\alpha_2$ +[(V_K cosγ sinα)/R]Δt. Звідки при $\Delta t \to 0$ значення $(\alpha_2-\alpha_1)/(\Delta t)=(\Delta\alpha)/(\Delta t)\to(\alpha)=-(V_Л \cos\gamma\ \sin\alpha)/R$. До того ж, кут φ рівний сумі кутів $\varphi_П$ від переносного і $\varphi_В$ відносного рухів частинки. Тому:

$$\dot{\alpha} = -\dot{\varphi}_В = -(V_Л\cos\gamma\sin\alpha)/R;$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_П \pm \dot{\varphi}_В = \omega \pm \frac{V_Л\cos\gamma\sin\alpha}{R};\ \dot{R} = V_Л\cos\gamma\cos\alpha;$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\pm R\dot{V}_Л\cos\gamma\sin\alpha \mp 2V_Л^2\cos^2\gamma\cos\alpha\sin\alpha}{R^2};$$

$$\ddot{R} = \dot{V}_Л\cos\gamma\cos\alpha + \frac{V_Л^2\cos^2\gamma\sin^2\alpha}{R}.$$

Підстановка в (3) її похідних дає:

$$\begin{aligned} & m\dot{V}_Л\cos\gamma\cos\alpha - mR\omega^2 \mp 2m\omega V_Л\cos\gamma\sin\alpha = Q_R; \\ & \pm mR\dot{V}_Л\cos\gamma\sin\alpha + 2mR\omega V_Л\cos\gamma\cos\alpha = Q_{\varphi}; \\ & m\dot{V}_Л\sin\gamma = Q_H. \end{aligned} \quad (4)$$

При $f\neq0$ живі сили в (4) складаються з нормальних до обох полиць лопатки сил реакції N_1, N_2, сили тертя лопатки $F_T=f(N_1+N_2)$, їхніх моментів та сили ваги частинки mq, у результаті чого вони наберуть вигляду (рис. 1):

$$\left.\begin{aligned} Q_R &= \mp N_1\sin\alpha - N_2\sin r\cos\alpha - fN_1\cos\gamma\cos\alpha - \\ &\quad fN_2\cos\gamma\cos\alpha; \\ Q\varphi &= RN_1\cos\alpha \mp RN_2\sin\gamma\sin\alpha \mp RfN_1\cos\gamma\sin\alpha \mp \\ &\quad \mp RfN_2\cos\gamma\sin\alpha; \\ Q_H &= N_2\cos\gamma - fN_1\sin\gamma - fN_2\sin\gamma - mq. \end{aligned}\right\} (5)$$

Після підстановки (5) в (4) та розв’язування (4), одержимо:

$$\begin{aligned} & F_T = f(N_1+N_2); \\ & N_1 = \pm mR\omega^2\sin\alpha + 2m\omega V_Л \\ & \cos\gamma; \\ & N_2 = mR\omega^2\ \sin\gamma\ \cos\alpha + mq\cos\gamma; \\ & \dot{V}_Л = R\omega^2\cos\gamma\cos\alpha - g\sin\gamma - F_T/m, \end{aligned}$$

що відповідає дійсності.

В усіх наведених вище рівняннях верхні знаки відповідають випадку, коли $V_Л \sin\alpha$ збігається з напрямком ω, у нашому разі — обертанню лопатки проти годинникової стрілки (рис. 2); нижні знаки — коли напрямок $V_Л \sin\alpha$ протилежний до ω, у нашому разі — за нею (рис. 2). При цьому кут α завжди береться гострим. Цього дотримуємось і в подальших викладках.

Для лопатки 2 (рис. 2) з криволінійною боковою полицею при $\gamma\neq0$, $f\neq0$ задачу розв’язують аналогічно. У цьому разі за час Δt частинка переходить з точки M_1 в точку M_3, а дотична 3 до лопатки 2 з радіусом ρ її кривизни в її проекції на горизонтальну площину додатково повертається з положення 1 в точці M_1 в положення 3 в точці M_3 (рис. 2) на кут $\Delta\alpha=[(V_л\cos\gamma)/\rho]\Delta t$. Тоді

$$(\dot{\alpha}) = (V_л \cos\gamma)/\rho - V_л(\cos\gamma \sin\alpha)/R,$$

де ρ — радіус кривизни кривої $\rho=\rho(\varphi_В)$ горизонтальної проекції бокової полиці лопатки 2 (рис. 2), м. Для лопатки, в якої $\gamma=const$, з рис. 2 додатково отримуємо:

$$\dot\varphi = \dot\varphi_П \pm \dot\varphi_В = \omega \pm \frac{V_л\cos\gamma\sin\alpha}{R};\ \dot R = V_л \cos\gamma\cos\alpha;$$

$$\ddot\varphi = \pm\frac{\dot V_л \cos\gamma\sin\alpha}{R} \mp \frac{2V_л^2\cos^2\gamma\cos\alpha\sin\alpha}{R^2} \pm$$

$$\pm\frac{V_л^2\cos^2\gamma\cos\alpha}{R\rho};\ \ddot R = \dot V_л\cos\gamma\cos\alpha -$$

$$-\frac{V_л^2\cos^2\gamma\sin\alpha}{\rho} + \frac{V_л^2\cos^2\gamma\sin^2\alpha}{R},$$

підстановка яких у (3) дає:

$$\left.\begin{aligned} & m\dot V_л \cos\gamma\cos\alpha - mR\omega^2 \mp 2m\omega V_л\cos\gamma\sin\alpha - \\ & -(mV_л^2\cos^2\gamma\sin\alpha)/\rho = Q_R; \\ & \pm mR\dot V_л\cos\gamma\sin\alpha + 2mR\omega V_л\cos\gamma\cos\alpha \pm \\ & \pm(RmV_л^2\cos^2\gamma\cos\alpha)/\rho = Q\varphi; \\ & m\dot V_л \sin\gamma = Q_H. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Підстановка живих сил із (5) в (6) і розв'язок (6) дає:

$N_1=\pm mR\omega^2\sin\alpha+2m\omega V_л\cos\gamma\pm(mV_л^2\cos^2\gamma)/\rho;$

$N_2 = mq\cos\gamma+mR\omega^2 \cos\alpha \sin\gamma;$

$F_T/m = f[\pm R\omega^2 \sin\alpha+2\omega V_л\cos\gamma\pm(V_л^2 \cos^2\gamma)/$

$\rho+q\cos\gamma+R\omega^2\cos\alpha\sin\gamma].$

$\dot V_л = R\omega^2\cos\alpha\cos\gamma - g\sin\gamma - F_T/m;$

У рівнянні $\dot V_л$ першою справа йде поділена на m поздовжня лопатці складова відцентрової сили; другою — поділена на m поздовжня лопатці складова сили ваги частинки; третьою — поділена на m сила F_T тертя частинки по полицях лопатки. У рівнянні F_T/m ідуть в дужках: першим — член, який враховує тертя криволінійної бічної полиці лопатки від перпендикулярної до неї складової відцентрової сили переносного руху частинки; другий — від сили інерції Коріоліса; третій — від відцентрової сили відносного руху частинки, яка виникає від закруглення бокової полиці лопатки радіусом ρ на її горизонтальній проекції; четвертий — від перпендикулярної до нижньої полиці лопатки складової сили ваги частинки; п'ятий — від перпендикулярної до нижньої полиці лопатки складової відцентрової сили частинки в її переносному русі на радіусі R.

У разі, коли $\gamma\neq const$, змінюються всі похідні від тригонометричних функцій, що містять γ, а також виникає необхідність знаходження $\dot\gamma$. З урахуванням цього знаходимо необхідні похідні:

$$\ddot R = \dot V_л\cos\gamma\cos\alpha - \frac{V_л^2\cos^2\gamma\sin\alpha}{\rho} +$$

$$+\frac{V_л^2\cos^2\gamma\sin^2\alpha}{R} - \frac{V_л^2\sin\gamma\cos\alpha}{r};$$

$$\ddot\varphi = \pm\frac{\dot V_л\cos\gamma\sin\alpha}{R} \mp \frac{2V_л^2\cos^2\gamma\cos\alpha\sin\alpha}{R^2} \pm$$

$$\pm\frac{V_л^2\cos^2\gamma\cos\alpha}{R\rho} \mp \frac{V_л^2\sin\gamma\cos\alpha}{rR};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial\dot h} = m\dot V_л\sin\gamma + mV_л(V_л/r)\cos\gamma =$$

$$= m\dot V_л\sin\gamma + m(V_л^2\cos\gamma)/r.$$

З них видно, що вони відрізняються від отриманих при постійних значеннях γ наявністю останніх членів справа. При цьому приймалося $\dot\gamma = \frac{V_л}{r}$, де r — радіус кривизни нижньої полиці лопатки за зростання кута її нахилу до диска по довжині лопатки в проекції на вертикальну дотичну до бокової полиці лопатки площину у взятій точці. Значення $\dot\gamma$ виводяться аналогічно $\dot\alpha$. Після підстановки похідних в (1), отримуємо:

$$\left.\begin{aligned} & m\dot V_л\cos\gamma\cos\alpha - mR\omega^2 \mp 2m\omega V_л\cos\gamma\sin\alpha - \\ & -\frac{mV_л^2\cos^2\gamma\sin\alpha}{\rho} - \frac{mV_л^2\sin\gamma\cos\alpha}{r} = Q_R; \\ & \pm mR\dot V_л\cos\gamma\sin\alpha + 2mR\omega V_л\cos\gamma\cos\alpha \pm \\ & \pm\frac{RmV_л^2\cos^2\gamma\cos\alpha}{\rho} \mp \frac{mRV_л^2\sin\gamma\sin\alpha}{r} = Q\varphi; \\ & m\dot V_л\sin\gamma + \frac{mV_л^2\cos\gamma}{r} = Q_H. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Оскільки так звані живі сили ідентичні тут (5), після їх підстановки в (7) одержуємо:

$N_1=\pm mR\omega^2\sin\alpha+2m\omega V_Л\cos\gamma\pm(mV_Л^2\cos^2\gamma)/\rho;$

$N_2= mq\cos\gamma+mR\omega^2 \cos\alpha\sin\gamma+(mV_Л^2)/r,$

а також рівняння руху частинки в натуральних координатах у вигляді:

$$\dot{V}_Л = R\omega^2 \cos\alpha\cos\gamma - g\sin\gamma - F_T / m, \quad (8)$$

де:

$$F_T=fm(\pm R\omega^2\sin\alpha+2\omega V_Л\cos\gamma\pm(V_Л^2\cos^2\gamma)/\rho+q\cos\gamma+R\omega^2\cos\alpha\sin\gamma+V_Л^2/r). \quad (9)$$

Рівняння (9) відрізняється від наведеного вище аналогічного рівняння для γ=const останнім членом, тобто силою тертя вигнутої по радіусу r нижньої полиці лопатки по частинці від відцентрової сили частинки, яка виникає від кривизни цієї полиці лопатки. Зрозуміло, що при вигнутій горбом угору цій полиці лопатки перед останнім членом у дужках (9) треба брати знак (–), оскільки в цьому разі значення $\dot{\gamma}$ <0, тобто є від'ємними.

Особливістю одержаних рівнянь є те, що в разі руху частинки з відносною коловою швидкістю $V_Л\cos\gamma=\omega R$ протилежно напрямку ω, коли ρ=R, r=4, $\alpha=\pi/2$, що відповідає спіралі, поміщеної всередину циліндра, який обертається навколо осі, у виразі сили тертя F_T перші три члени взаємно знищуються, оскільки у цьому разі частинка не буде обертатись. На лопатці, виконаній на диску по Архімедовій спіралі, яку описувала б на ньому частинка, рухаючись рівномірно по його радіусу зі швидкістю V_R, перші три члени у виразі F_T також взаємно знищуються, що засвідчує правильність цих рівнянь.

Слід сказати, що зазначене вище в (9) стосується частинки, що рухається на лопатці. Коли ж вона рухається під нижньою полицею лопатки, вигнутою випуклістю вгору, складова $q\cos\gamma$ в (9) береться зі знаком мінус, а $V_Л^2/r$ — зі знаком плюс. Крім того, ці викладки стосуються частинки, що рухається від центра до периферії лопатки. У разі зворотного руху частинки задача розв'язується аналогічно.

Висновки

Рівняння руху матеріальної частинки вздовж лопатки з криволінійною боковою і нижньою полицями відрізняється від такого самого рівняння для прямолінійної лопатки наявністю в ньому двох додаткових членів: перший стосується сили тертя від відцентрової сили, яка виникає у відносному русі частинки по вигнутій радіусом ρ боковій полиці лопатки; другий — сили тертя від відцентрової сили, яка виникає у відносному русі частинки по вигнутій радіусом r нижній полиці лопатки.

Бібліографія

1. *Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М.* Теоретична механіка: Підручник у 2 ч. — Ч. 1: Статика. Кінематика. — К.: Знання, 2004. — 599 с.

2. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. — К.: Изд. УАСХН, 1960. — 283 с.

3. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. — К.: Техніка, 2004. — 510 с.

Надійшла 12.06.2012.