УДК 631.816.631.333

В.І. Смаглій,
кандидат технічних наук
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»

ОПТИМІЗАЦІЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ В ПОЛІ ВІДЦЕНТРОВИХ СИЛ

Установлено, що задачі оптимізації руху частинки в полі відцентрових сил належать до варіаційних задач динаміки з ізопериметричними і неголономними в'язями. Криві, на яких оптимізується рух частинок в такому полі, лежать близько до логарифмічних спіралей. Виявлена можливість застосування й інших класичних підходів до розв'язання цих проблем. Показано, що відцентрова сила в деяких випадках формально може проявляти себе силою, породженою потенціальним полем.

Ключові слова: *частинка, маса, лопатка, радіус, оптимізація, функціонал, швидкість, прискорення, тертя, логарифмічна спіраль.*

Понад 90% мінеральних добрив вносяться відцентровими робочими органами, які застосовуються у вібровідцентрових сепараторах зерна та інших сільськогосподарських машинах [1, 2]. Їх оптимізація може збільшити ширину захвату таких машин та зменшити їхню енергоємність.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. При невеликих нахилах прямолінійної лопатки до радіуса диска в бік його обертання вдається дещо збільшити абсолютну швидкість руху частинки в кінці лопатки [1]. Однак оптимізація цього процесу в літературних джерелах не розглядалася.

Мета досліджень — виявити можливі критерії оптимізації процесу розгону матеріальної частинки лопаткою, що обертається, та оптимізувати її в напрямі досягнення максимальної швидкості й прискорення частинки.

Результати досліджень. Аналіз показує, що серед критеріїв оптимізації можуть бути: розгін частинки до заданої абсолютної швидкості V (м/с) при мінімальних енерговитратах; розгін частинки до максимально можливої абсолютної швидкості V руху на кінці лопатки з радіусом R_K (м), що обертається з кутовою швидкістю ω (1/с); розгін частинки вздовж лопатки з максимальним абсолютним прискоренням; сходження частинки з лопатки на радіусі R_K за мінімальний час t (с) під час її обертання; розгін частинки до заданої абсолютної швидкості V при мінімальному значенні сил її тертя тощо. Очевидно, що найбільш значущими серед них є перші 3. Оскільки другий критерій наочніший, спробуємо здійснити оптимізацію такого процесу саме за ним. Візьмемо плоский диск з перпендикулярною до нього лопаткою і вертикальною віссю обертання. Оскільки максимальної абсолютної швидкості частинки в кінці такої лопатки буде досягнуто, коли вона буде відігнута від радіального напрямку в бік її обертання, значення V дорівнюватиме векторній сумі колової і радіальної її складових:

$$V = \sqrt{(\omega R + V_Л \sin\alpha)^2 + V_Л^2 \cos^2\alpha} = = \sqrt{\omega^2 R^2 + V_Л^2 + 2\omega R V_Л \sin\alpha}, \quad (1)$$

де $V_Л$ — відносна швидкість частинки вздовж лопатки, м/с; α — кут між радіусом R і вектором $V_Л$ руху частинки по лопатці, радіан.

Пошук оптимальних V є задачею варіаційного числення [3]. Оптимальні значення V формуються на її елементарних ділянках, тому вони становитимуть суму з оптимальних ΔV, тобто інтеграл з них. Беручи похідну з (1) за t (с), маємо функціонал, який набуває тут стаціонарного значення, у вигляді:

$$I = V = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{(\omega R + V_Л \sin\alpha)\omega \dot{R} + (V_Л + \omega R \sin\alpha)\dot{V}_Л}{\sqrt{\omega^2 R^2 + V_Л^2 + 2\omega R V_Л \sin\alpha}} + \frac{(\omega R V_Л \cos\alpha)\dot{\alpha}}{\sqrt{\omega^2 R^2 + V_Л^2 + 2\omega R V_Л \sin\alpha}}]dt \to \max, \quad (2)$$

на який накладаються 1 ізопериметрична і 3 неголономних в'язі, а саме:

$$\int_{t_1}^{t_K} (V_Л \cos\alpha)dt = R_K - R_П; \quad (3)$$

$$\dot{R} = V_Л \cos\alpha; \quad (4)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{V_Л}{\rho} - \frac{V_Л \sin\alpha}{R}; \quad (5)$$

$$\dot{V}_Л = R\omega^2 \cos\alpha - f \times [R\omega^2 \sin\alpha + 2\omega V_Л + g + (V_Л{}^2/\rho)], \quad (6)$$

де ρ — радіус кривини бічної перпендикулярної до диска полиці лопатки, м; $R_п$, $R_к$ — початковий і кінцевий радіуси перебування частинки на лопатці, м; $t_п$, $t_к$ — відповідно початкове і кінцеве значення часу руху частинки, с.

Це є типова ізопериметрична варіаційна задача динаміки з неголономними в'язями, яка розв'язується на основі рівняння Ейлера–Лагранжа [3]:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial V_Л} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{V}_Л} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial R} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{R}} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\alpha}} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\rho}} = 0, \end{array}\right\} \quad (7)$$

де

$$F = \frac{(\omega R + V_Л \sin\alpha)\omega\dot{R} + (V_Л + \omega R \sin\alpha)\dot{V}_Л + (\omega R V_Л \cos\alpha)\dot{\alpha}}{\sqrt{\omega^2 R^2 + V_Л^2 + 2\omega R V_Л \sin\alpha}} + \lambda_1 V_Л \cos\alpha + \lambda_2(t)[\dot{R} - V_Л \cos\alpha] + \lambda_3(t)[\dot{\alpha} - \frac{V_Л}{\rho} + \frac{V_Л \sin\alpha}{R}] + \lambda_4(t)[\dot{V}_Л - \omega^2 R \cos\alpha + f \times (\omega^2 R \sin\alpha + q + 2wV_Л + 2V_Л{}^2/\rho)], \quad (8)$$

де у (8) λ_1 — постійний і λ_2 (t), λ_3 (t), λ_4 (t) — змінні коефіцієнти Лагранжа. Рівняння (7) містять 4 невідомих коефіцієнта Лагранжа, а також 4 $V_Л$, R, ρ, α невідомі параметри лопатки та руху частинки. Оскільки λ_1 можна отримати простим добиранням його значень до витримування умови (3), після доповнення (7) неголономними в'язями (4–6) вона складатиметься з 7-ми рівнянь із 7-ма невідомими, тобто стане замкненою. Початкові значення ρ, α, λ_2 (t), λ_3 (t), λ_4 (t) знаходимо з рівнянь трансверсальності виду [3]:

$$[F - \dot{V}_Л \frac{\partial F}{\partial \dot{V}_Л} - \dot{\alpha}\frac{\partial F}{\partial \dot{\alpha}} - \dot{R}\frac{\partial F}{\partial \dot{R}}]_{t=0}\delta t = 0;$$

$$[\frac{\partial F}{\partial \dot{V}_Л}]_{t=0}\delta V_Л = 0; \quad [\frac{\partial F}{\partial \dot{\alpha}}]_{t=0}\delta\alpha = 0; \quad [\frac{\partial F}{\partial \dot{R}}]_{t=0}\delta R = 0;$$

$$[F - \dot{V}_Л \frac{\partial F}{\partial \dot{V}_Л} - \dot{\alpha}\frac{\partial F}{\partial \dot{\alpha}} - \dot{R}\frac{\partial F}{\partial \dot{R}}]_{t=t_K}\delta t = 0;$$

$$[\frac{\partial F}{\partial \dot{V}_Л}]_{t=t_K}\delta V_Л = 0; \quad [\frac{\partial F}{\partial \dot{\alpha}}]_{t=t_K}\delta\alpha = 0;$$

$$[\frac{\partial F}{\partial \dot{R}}]_{t=t_K}\delta R = 0,$$

де δt, $\delta V_Л$, $\delta\alpha$, δR — варіації змінних у початковій ($t=t_п=0$) і кінцевій ($t=t_к$) точках.

З рівнянь (2, 6, 8) видно, що цей метод досить складний і потребує застосування обчислювальних машин. Тому пошукаємо простіші розв'язки задачі.

Радіальна швидкість частинки за розміщення лопатки під кутом α до радіуса R падає в (1) за збільшення α від $\alpha=0$ пропорційно $\cos\alpha$, а колова — зростає пропорційно $\sin\alpha$. Оскільки тут падіння $\cos\alpha$ буде меншим за зростання $\sin\alpha$, існує резерв збільшення абсолютної швидкості частинки через виготовлення лопаток криволінійної форми. Тобто звичайна лопатка оптимальна лише простотою. Для доведення цього знайдемо форму лопатки з найбільшою швидкістю частинки на її кінці, коли $f=0$. У цьому разі прискорення частинки у відносному русі вздовж лопатки дорівнюватиме:

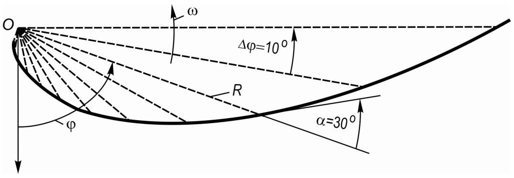
$$\dot{V}_Л = \frac{dV_Л}{dt} = \frac{dR}{dt}\frac{dV_Л}{dR} = V_Л \cos\alpha \frac{dV_Л}{dR} = \omega^2 R \cos\alpha. \quad (9)$$

Скорочення на $\cos\alpha$ та інтегрування (9) дає:

$$V_Л = \sqrt{\omega^2(R^2 - R_П^2) + V_{ЛП}^2}.$$

Отже, за ідеальної лопатки при $f=0$ відносна $V_Л$ швидкість частинки не залежить від кута α, тобто відцентрова сила формально проявляє себе силою, породженою потенціальним полем. Це дає можливість легко знайти похідну від абсолютної швидкості V руху частинки по α з (1):

$$V_\alpha^1 = \frac{\omega R V_Л \cos\alpha}{\sqrt{\omega^2 R^2 + V_Л^2 + 2\omega R V_Л \sin\alpha}}. \quad (10)$$



Форма лопатки, яка надає частинці максимальної потужності її розгону та максимального абсолютного прискорення, для f=0, $R_п \to 0$, $V_{лп} \to 0$

З (10) ця похідна позитивна на проміжку $0 \le \alpha \le \pi/2$, тобто абсолютна швидкість V на цьому проміжку зростає і має максимум у точці, де $\alpha \to \pi/2$, $V_\alpha^1 = 0$. Тут максимальні значення швидкості V є межею, до якої вона прямує, коли $\alpha \to \pi/2$. У ній $V_{MAX} = \sqrt{\omega^2 R^2 + \omega^2 (R^2 - R_п^2) + 2\omega R \sqrt{\omega^2 (R^2 - R_п^2) + V_{лп}^2}}$. Ця швидкість буде досягнута за час $t \to \infty$ на лопатці, зігнутій у напрямку її обертання по логарифмічній спіралі, в якої $\alpha \to \pi/2$, а полюс збігається з віссю обертання. Коли частинка розпочинає рух максимально близько до осі обертання, тобто коли $R_п \to 0$, а початкова відносна швидкість $V_{лп} \to 0$, $V_{MAX} \to 2\omega R$, абсолютна швидкість руху частинки дорівнюватиме двом коловим швидкостям руху кінця лопатки. У радіальній прямолінійній лопатці за таких самих умов $V_{MAX} \to \omega R\sqrt{2}$, що в $\sqrt{2}$ разів менше, ніж у попередньому випадку, а кінетична енергія частинки буде вдвічі меншою за попередню.

Тепер знайдемо криву, яка надає частинці найбільше абсолютне прискорення. Очевидно, що за найінтенсивнішого розгону частинки у просторі потужність N (Вт/кг), з якою зростає кінетична енергія одиниці маси m (кг) частинки $E = V^2/2$ (Дж/кг), буде максимальною. Знайдемо розв'язок цієї задачі для лопатки, виконаної по логарифмічній спіралі, де α=const. Тоді з урахуванням (1) похідна з E по t(c) для одиниці маси має вигляд:

$$N = (\omega^2 R + \omega V_Л \sin\alpha)\dot{R} + (V_Л + \omega R \sin\alpha)\dot{V}_Л. \quad (11)$$

Підстановка в (11):

$$\dot{V}_Л = \omega^2 R\cos\alpha - f(\omega^2 R\sin\alpha + V_Л^2 K + 2\omega V_Л + g);$$
$$\dot{R} = V_Л \cos\alpha$$

дає:

$$N = 2\omega^2 R V_Л \cos\alpha + (\omega^3 R^2 + \omega V_Л^2)\sin\alpha\cos\alpha -$$
$$-(V_Л + \omega R\sin\alpha) f(\omega^2 R\sin\alpha + V_Л^2 K + 2\omega V_Л + g).$$

У логарифмічної спіралі кривина $K = 1/(R\sqrt{1+ctg^2\alpha}) = (\sin\alpha)/R$. Побудуємо нашу криву з суми елементарних ділянок з логарифмічних спіралей. Тоді після взяття першої частинної похідної з (11) за α одержимо:

$$\partial N/\partial\alpha = (\omega^3 R^2 + \omega V_Л^2)(\cos^2 - \sin^2\alpha) -$$
$$-2\omega^2 R V_Л \sin\alpha - f\omega R\cos\alpha \times$$
$$\times(\omega^2 R\sin\alpha + \frac{V_Л^2 \sin\alpha}{R} + 2\omega V_Л + g) - f \times \quad (12)$$
$$\times(V_Л + \omega R\sin\alpha)(\omega^2 R\cos\alpha + \frac{V_Л^2 \cos\alpha}{R}) = 0.$$

Після перетворень (12) маємо:

$$(1 + \frac{V_Л^2}{\omega^2 R^2})(\cos 2\alpha - 2f\sin\alpha\cos\alpha) =$$
$$= 2\frac{V_Л}{\omega R}\sin\alpha + f\cos\alpha(\frac{3V_Л}{\omega R} + \frac{V_Л^3}{\omega^3 R^3} + \frac{g}{\omega^2 R}). \quad (13)$$

Розв'язуючи (13) разом з рівняннями руху частинки вздовж лопатки:

$$\dot{V}_Л = \omega^2 R\cos\alpha - f(\omega^2 R\sin\alpha + \frac{V_Л^2}{R}\sin\alpha + 2\omega V_Л + g),$$

$\dot{R} = V_Л \cos\alpha$ та рівнянням $\dot{\varphi} = (V_Л \sin\alpha)/R$,

де φ — аргумент функції R=R(φ), будуємо криву, по якій формується лопатка на диску. У неї α=const лише на елементарних ділянках, а вся крива буде сумою логарифмічних спіралей з цих ділянок. У (13) α залежить лише від *f* і співвідношень $V_Л/R$ та $g/\omega^2 R$. При *f*=0 (13) перетворюється на вираз:

$$(1 + \frac{V_Л^2}{\omega^2 R^2})\cos 2\alpha = (V_Л/\omega R)2\sin\alpha.$$

За початкових умов: $R_п \to 0$; $V_{лп} \to 0$ для *f*=0 вираз (9) забезпечує рівність $V_Л = \omega R$ [3], що дає: $\cos 2\alpha = \sin\alpha$. Через підстановку $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ця рівність перетворюється на рівняння: $2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$, з якого отримуємо $\sin\alpha = 1/2$, звідки $\alpha = \pi/6 = 30^o$. У цьому разі максимальна потужність розгону частинки та її прискорення досягатимуться на лопатці, зігнутій по кривій: $R = R_п \exp[(ctg 30^o)\varphi] = R_п \exp[1{,}732\varphi]$ у напрямку її обертання з α=const на всій її довжині. На рисунку показано форму такої лопатки для нашого випадку. Розрахунки свідчать, що абсолютна швидкість сходження такої частинки буде на 22,5% (а кінетична енергія частинки в 1,5 раза) більшою, ніж у радіально розміщеної ідеальної лопатки при однакових значеннях $V_п \to 0$, $R_п \to 0$,

ω і $R_К$. Отже, можна зробити висновок, що максимальний розгін частинки досягається на криволінійних лопатках, зігнутих в напрямку їх обертання, близьких за формою до логарифмічних спіралей.

Задача пошуку форми лопатки з найбільш інтенсивним розгоном частинки може бути розв'язана і методом варіаційного числення. Для цього, як і в задачі розгону частинки до максимальної швидкості, необхідно отримати другу похідну від абсолютної швидкості руху частинки за часом t з виразу (1), на основі якої формується функціонал, що оптимізується, або сформувати функціонал на основі першої похідної в часі t з виразу (11) потужності N, яка йде на збільшення кінетичної енергії частинки. Однак аналіз вказує на громіздкість отримуваних при цьому аналітичних виразів. За оптимізації такого процесу за іншими критеріями задачу розв'язують аналогічно наведеному випадку.

З отриманих результатів видно, що таку оптимізацію можна проводити і простішими способами. Наприклад, прорахувати кілька значень $V_Л$ частинки в кінці лопатки за різних значень α=const логарифмічної спіралі. Потім з допомогою (1) побудувати графічну залежність абсолютної швидкості V від α, на якій вибрати значення α з максимальним значенням V. Точніший результат можна отримати через розбиття усього шляху руху частинки на кілька окремих ділянок, чим більше — тим точніше.

У разі, коли нижня полиця лопатки розміщена під постійним кутом γ нахилу до горизонтальної площини, задача розв'язується аналогічно з урахуванням:

$$\begin{aligned}\dot{V}_Л &= \omega^2 R\cos\gamma\cos\alpha - g\sin\gamma - f\times\\ &\times(\omega^2 R\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{R}V_Л^2\cos^2\gamma +\\ &+2\omega V_Л\cos\gamma + g\cos\gamma + \omega^2 R\sin\gamma\cos\alpha),\end{aligned} \tag{14}$$

де α — кут між R і дотичною до бокової полиці лопатки на її горизонтальній проекції, радіан.

На основі [4, 5] абсолютна швидкість руху частинки в просторі дорівнює:

$$V = \sqrt{\omega^2 R^2 + V_Л^2 + 2\omega R V_Л\cos\gamma\sin\alpha},$$

а вектор V розміщений під кутом γ_V нахилу до горизонту, в якого:

$$\sin\gamma_V = \frac{V_Л\sin\gamma}{\sqrt{\omega^2 R^2 + V_Л^2 + 2\omega R V_Л\cos\gamma\sin\alpha}}.$$

Він лежить у вертикальній площині, яка розміщена під кутом ϑ до радіуса сходження частинки з лопатки. Значення:

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{\omega R + V_Л\cos\gamma\sin\alpha}{V_Л\cos\gamma\cos\alpha}.$$

Очікується, що V_{MAX} досягається на лопатках з максимальним значенням dV/dR, тобто за умови ∂[dV/dR]/$\partial\alpha$=0,або dV/dS$\to$max, тобто в яких відношення ΔV до ΔR приросту радіуса перебування частинки на лопатці або до приросту ΔS шляху руху частинки буде найбільшим на всьому R або S. Тут:

$$\frac{dV}{dR} = \frac{(\omega^2 R + \omega V_Л\cos\gamma\sin\alpha)\dot{R} + (V_Л + \omega R\cos\gamma\sin\alpha)\dot{V}_Л + (\omega R V_Л\cos\gamma\cos\alpha)\dot{\alpha}}{V_Л\cos\gamma\cos\alpha\sqrt{\omega^2 R^2 + V_Л^2 + 2\omega R V_Л\cos\gamma\sin\alpha}}, \tag{15}$$

де $\dot{R} = V_л\cos\gamma\cos\alpha$; $\dot{\alpha} = \frac{V_л}{\rho} - \frac{V_л\sin\alpha}{R}$.

У лопатки, виконаної по логарифмічній спіралі, радіус кривини ρ=R/sinα, тому в неї $\dot{\alpha}$=0. Дослідження (15) як звичайної функції від α на екстремум потребують окремого розгляду.

Висновки

Задачі оптимізації руху частинки в полі відцентрових сил належать до варіаційних задач динаміки з ізопериметричними і неголономними в'язями, деякі з них сформульовані в цій статті. Для ідеальної лопатки максимальна абсолютна швидкість розгону матеріальної частинки досягається на кривій у вигляді логарифмічної спіралі з параметром $\alpha\to\pi/2$. На ній частинка з початковими $R_п\to0$; $V_п\to0$ теоретично отримує абсолютну швидкість, що дорівнює двом коловим швидкостям руху кінця лопатки.

Для f=0 найінтенсивніший розгін матеріальної частинки досягається на логарифмічній спіралі, в якої параметр α=30^o. На ній з початковими $R_п\to0$; $V_п\to0$ частинка до-

сягає абсолютної швидкості, яка на 22,5% більша, ніж за тих самих умов на радіальній прямолінійній лопатці, а її кінетична енергія буде в 1,5 раза більшою, ніж в останньої. Форма лопатки змінює енергетичні, кінематичні й технологічні показники роботи відповідних машин, тому через неї можна керувати цими показниками. Незалежність $dV_л/dR$ від α для ідеальної горизонтальної лопатки, що обертається, формально надає відцентровій силі частинки властивості сили, породженої потенціальним полем.

Бібліографія

1. *Адамчук В.В.* Механіко-технологічні і технічні основи підвищення ефективності внесення твердих мінеральних добрив та хіммеліорантів: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. д-ра тех. наук. — К., 2006. — 40 с.
2. *Гончаров Є.С.* Резерви удосконалення пневматичної сепарації зернових матеріалів//Механізація і електрифікація сільського господарства. — Вип. № 18. — К.: Урожай, 1971. — С. 30.
3. *Ельсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1968. — 424 с.
4. *Смаглій В.І.* Виведення сили і прискорення Коріоліса//Вісн. аграр. науки. — 2011. — № 4. — С. 49–52.
5. *Смаглій В.І.* Рух матеріальної частинки по криволінійній лопатці з вертикальною віссю обертання //Там само. — 2013. — № 2. — С. 47–50.

Надійшла 23.04.2013.

ВІСТІ З НАУКОВИХ УСТАНОВ

ПРОДУКТИВНІСТЬ МОЛОЧНИХ КОРІВ У ДАНІЇ

Економіка Данії опирається на високотехнологічне сільське господарство, сучасні малі підприємства, високий ступінь соціального захисту населення і велику зовнішню торгівлю. Країна займає перше місце у світі з виробництва продуктів харчування на душу населення. Основу сільського господарства становлять 51,6 тис. фермерських господарств. До того ж 17,8 тис. з них зайняті у виробництві цілий рік. Експорт — це м'ясо, молочні продукти, яйця, риба та ін. Данія — один з найбільших у світі експортерів свинини, сиру і вершкового масла (понад 30% внутрішнього валового продукту).

За останні 5 років продуктивність підконтрольних корів молочних порід у середньому зросла на 117 кг (+71, +157). За цей період також поліпшились якісні показники молока (таблиця).

Поголів'я і продуктивність підконтрольних молочних порід

Порода	Рік	Кількість лактацій	Продуктивність корів за 305 днів			
			надій, кг	Уміст у молоці, %		жир + білок, кг
				жиру	білка	
Датська голштинська	2012	370569	9529	4,09	3,49	722,3
»	2007	361517	9372	4,05	3,35	633,5
Джерсейська	2012	68044	6665	5,93	4,11	662,5
»	2007	58448	6555	5,89	4,06	652,2
Червона датська	2012	36585	8734	4,29	3,49	679,5
»	2007	40333	8663	4,18	3,50	665,3
Червона голштинська	2012	5545	8548	4,25	3,42	655,6
»	2007	5059	8419	4,28	3,44	650,0

Досвід ведення молочного скотарства в Данії, вважаємо, потребує ретельного вивчення та впровадження у вітчизняне сільське господарство.

І.В. Базишина, М.С. Гавриленко,
кандидати сільськогосподарських наук
Інститут розведення і генетики тварин НААН