Механізація, електрифікація

УДК 631.816.631.333

В.І. Смаглій,
кандидат технічних наук
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»

ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ ПО ЛОПАТЦІ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Розроблений метод прямої перевірки правильності розв'язків диференційних рівнянь руху матеріальної частинки вздовж лопатки, що обертається, які широко використовуються у розрахунках багатьох механізованих сільськогосподарських процесів, дає змогу виявити в них помилки як випадкового, так і системного та методичного характеру. Це дає можливість відокремити правильні розв'язки від помилкових, обґрунтовано провести їх аналіз та розробити рекомендації щодо їх придатності для практичного застосування.

Ключові слова: *лопатка, обертання, матеріальна частинка, вихідне рівняння руху, інтегрування в квадратурах, похідна, пряма перевірка, підстановка, перетворення.*

Актуальність проблеми. Рух матеріальної частинки вздовж лопатки, що обертається, має місце в багатьох механізованих сільськогосподарських процесах. Не випадково рівняння та розв'язки такого руху лежать в основі багатьох наукових праць [1–12, 14, 15, 18] та інших. Ці розв'язки аналітично різні, що, однак, суперечить теоремі про єдиний розв'язок таких рівнянь [13]. Тому розробка методів прямої перевірки цих розв'язків на відповідність вихідному рівнянню є потрібною та актуальною.

Огляд останніх досліджень і публікацій. У літературі, на жаль, не знаходимо методів прямої перевірки правильності розв'язків таких рівнянь. До того ж в [4] кут θ нахилу лопатки до базової площини в цих рівняннях взято рівним $\theta=\omega t$, що не було відзначено в інших роботах, а в деяких і просто продубльовано. Це є неприйнятним для нахиленої і горизонтальної осей обертання лопатки [15]. Тому в [15] уперше було показано, що θ треба брати з урахуванням його початкового значення $\theta_П$, тобто $\theta=\theta_П+\omega t$. Це робить такі рівняння універсальними і дає змогу виявити вплив $\theta_П$ на процес руху частинки.

Мета досліджень — розробити метод прямої перевірки розв'язків рівнянь руху матеріальної частинки по лопатці, що обертається, на відповідність вихідному рівнянню і продемонструвати його на конкретному прикладі.

Результати досліджень. Розв'язки диференційних рівнянь полягають в їх інтегруванні в квадратурах, а пряма перевірка розв'язків — у їх диференціюванні з отриманням вихідних рівнянь. Однак розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами, до яких належать згадані рівняння [15], містять в собі члени $\exp\lambda_1 t$ і $\exp\lambda_2 t$, які не знищуються навіть за нескінченного диференціювання отриманих виразів, тоді як у вихідних рівняннях ці члени відсутні. Це ускладнює пряму перевірку правильності цих розв'язків. Аналіз показує, що вихід з такого становища є: диференціюючи отримане в розв'язках рівняння шляху S(t), пройденого частинкою вздовж лопатки, визначаємо з нього рівняння швидкості $V_Л(t)$ відносного руху частинки по лопатці. Розв'язуючи S(t) і $V_Л=\dot{S}(t)$ як систему з двох рівнянь відносно $\exp\lambda_1 t$ і $\exp\lambda_2 t$, знаходимо їх значення. Далі диференціюванням $V_Л(t)$ у часі t яке також містить члени типу $\exp\lambda_1 t$ і $\exp\lambda_2 t$. Підставивши знайдені $\exp\lambda_1 t$ і $\exp\lambda_2 t$ у вираз $\dot{V}_Л(t)$, ми отримаємо (у разі правильного розв'язку) вихідне рівняння. Слід зазначити, що такий самий результат можна одержати і через визначення з отриманих розв'язків значень $C_1 \exp\lambda_1 t$ і $C_2 \exp\lambda_2 t$, однак в частині робіт значення C_1 і C_2 неможливо виділити з наведених у них розв'язків, оскільки вони наводяться з уже підставленими (часом помилковими) сталими. Тому попередній спосіб є універсальнішим.

Для прикладу перевіримо цим методом розв'язки рівняння руху частинки вздовж лопатки загального положення з нахиленою віссю обертання, які отримані в [15]. Там показано, що рівняння руху матеріальної частинки вздовж прямолінійної лопатки загального положення з нахиленою під кутом β до горизонту віссю обертання, яке є універсальним і для вертикальної і для горизонтальної осей обертання, зводиться до канонічного виду рівняння:

$$\ddot{S} + A\dot{S} + BS = L\cos(\theta_П \pm \omega t) + D\sin(\theta_П \pm \omega t) + P. \quad (1)$$

До речі, з (1) видно, що в ньому усунуто системну помилку у визначенні кута θ у функціях $\cos\theta$ і $\sin\theta$ цих рівнянь, допущену у [2, 4, 7] та ін.

Тут: S — шлях, пройдений частинкою по лопатці, м; $\theta_П$ — початкове значення кута нахилу бокової полиці лопатки до вертикальної площини, в якій лежить вісь обертання, береться, коли частинка торкнеться обох її полиць; A, B, L, D, P — постійні. У [15] показано, що розв'язки цього рівняння мають вигляд:

$$S = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + I\cos(\theta_П \pm \omega t) + d\sin(\theta_П \pm \omega t) + p; \quad (2)$$

$$V_Л = \dot{S} = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \mp I\omega\sin(\theta_П \pm \omega t) \pm d\omega\cos(\theta_П \pm \omega t), \quad (3)$$

де:

$$I = \frac{L(B-\omega^2) \mp DA\omega}{(B-\omega^2)^2 + A^2\omega^2}; \quad d = \frac{D(B-\omega^2) \pm LA\omega}{(B-\omega^2)^2 + A^2\omega^2}; \quad p = \frac{P}{B}. \quad (4)$$

$$C_1 = \frac{S_П\lambda_2 - V_{ЛП} - (I\lambda_2 \mp d\omega)\cos\theta_П - (d\lambda_2 \pm I\omega)\sin\theta_П - \lambda_2 p}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad (5)$$

$$C_2 = -\frac{S_П\lambda_1 - V_{ЛП} - (I\lambda_1 \mp d\omega)\cos\theta_П - (d\lambda_1 \pm I\omega)\sin\theta_П - \lambda_1 p}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad (6)$$

$$\lambda_1 = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}; \quad \lambda_2 = -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}. \quad (7)$$

Тут: $V_{ЛП}$ — початкове значення швидкості руху частинки по лопатці; м/с; $S_П$ — початкове значення шляху руху частинки, яке дорівнює відстані від точки на лопатці з радіусом R_o до початкової точки дотику частинки до обох полиць лопатки, м [15]; λ_1, λ_2 , — корені характеристичного рівняння, отриманого з (1); R_o — відстань від бокової полиці лопатки до осі її обертання, м.

Час руху частинки по лопатці визначається ітераційною залежністю:

$$t \approx \frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{S - C_2\exp(\lambda_2 t) - I\cos(\theta_П \pm \omega t) - d\sin(\theta_П \pm \omega t) - p}{C_1}(C), \quad (8)$$

яку застосовують методом покрокового наближення. У першому наближенні в правій частині залежності приймаємо t=0, у другому — значення t, отримане в першому наближенні, у третьому — отримане в другому і т.д. до досягнення необхідної точності, оскільки основну частку S у (2) дає член $C_1\exp(\lambda_1 t)$.

Спочатку проведемо перевірку для верхніх знаків цих виразів. Тут значення I і d відповідно дорівнюють [15]:

$$I = \frac{L(B-\omega^2) - DA\omega}{(B-\omega^2)^2 + A^2\omega^2}; \quad d = \frac{D(B-\omega^2) + LA\omega}{(B-\omega^2)^2 + A^2\omega^2}; \quad p = \frac{P}{B}. \quad (8а)$$

Потім у розв'язках вихідного рівняння вираз шляху S почергово множимо на λ_2 та λ_1. З цього рівняння та рівняння швидкості $V_Л$ руху частинки в їх загальному вигляді знаходимо $\exp(\lambda_1 t)$ і $\exp(\lambda_2 t)$. Для знаходження $\exp(\lambda_1 t)$:

$$S\lambda_2 = C_1\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + I\lambda_2\cos(\theta_П + \omega t) + d\lambda_2\sin(\theta_П + \omega t) + \lambda_2 p;$$
$$V_Л = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - I\omega\sin(\theta_П + \omega t) + d\omega\cos(\theta_П + \omega t), \quad (9)$$

звідки:

$$e^{\lambda_1 t} = \frac{S\lambda_2 - V_Л - (I\lambda_2 - d\omega)\cos(\theta_П + \omega t) - (d\lambda_2 + I\omega)\sin(\theta_П + \omega t) - \lambda_2 p}{C_1(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (10)$$

Аналогічно для $\exp(\lambda_2 t)$:

$$S\lambda_1 = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_1 e^{\lambda_2 t} + I\lambda_1\cos(\theta_П + \omega t) + d\lambda_1\sin(\theta_П + \omega t) + \lambda_1 p; \quad (11)$$

знаходимо прискорення $\dot{V}_Л(t)=\ddot{S}(t)$ частинки, звідки:

$$V_Л = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - l\omega\sin(\theta_П + \omega t) + +d\omega\cos(\theta_П + \omega t),$$

$$e^{\lambda_2 t} = -\frac{S\lambda_1 - V_П - (l\lambda_1 - d\omega)\cos(\theta_П + \omega t) - -(d\lambda_1 + l\omega)\sin(\theta_П + \omega t) - \lambda_1 p}{C_2(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (12)$$

Далі з виразу (3) беремо першу похідну від $V_Л$ у часі t. У результаті маємо:

$$\dot{V}_Л = C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} - l\omega^2 \times \times\cos(\theta_П + \omega t) - d\omega^2\sin(\theta_П + \omega t). \quad (13)$$

Після підстановки значень $\exp(\lambda_1 t)$ і $\exp(\lambda_2 t)$ з (10,12) в (13) отримуємо:

$$\begin{aligned}\dot{V}_Л &= \lambda_1^2\frac{S\lambda_2 - V_Л - (l\lambda_2 - d\omega)\cos(\theta_П + \omega t) - -(d\lambda_2 + l\omega)\sin(\theta_П + \omega l) - \lambda_2 p}{\lambda_2 - \lambda_1} - \\ &-\lambda_2^2\frac{S\lambda_1 - V_Л - (l\lambda_1 - d\omega)\cos(\theta_П + \omega t) - -(d\lambda_1 + l\omega)\sin(\theta_П + \omega t) - \lambda_1 p}{\lambda_2 - \lambda_1} - \\ &-l\omega^2\cos(\theta_П + \omega t) - d\omega^2\sin(\theta_П + \omega t).\end{aligned} \quad (14)$$

З урахуванням, що: $\lambda_1\lambda_2$=B; $(\lambda_1+\lambda_2)$=–A, маємо:

$$\begin{aligned}\dot{V}_Л &= -BS - AV_Л + Bp + \\ &+[\frac{\lambda_2^2(l\lambda_1 - d\omega) - \lambda_1^2(l\lambda_2 - d\omega)}{\lambda_2 - \lambda_1} - \\ &-l\omega^2]\cos(\theta_П + \omega t) + \\ &+[\frac{\lambda_2^2(d\lambda_1 + l\omega) - \lambda_1^2(d\lambda_2 + l\omega)}{\lambda_2 - \lambda_1} - \\ &-d\omega^2]\sin(\theta_П + \omega t).\end{aligned} \quad (15)$$

Упорядкування виразу в перших квадратних дужках (15) дає:

$$\begin{aligned}&[l\frac{(\lambda_2^2\lambda_1 - \lambda_1^2\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} - l\omega^2 + \frac{d\omega(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_2 - \lambda_1}]\times \\ &\times\cos(\theta_П + \omega t) = [(B - \omega^2)l - \\ &-(\lambda_2 + \lambda_1)d\omega]\cos(\theta_П + \omega t) = \\ &= [(B - \omega^2)l + Ad\omega]\cos(\theta_П + \omega t),\end{aligned} \quad (16)$$

Після підстановки значень ; , d з (8) в (16) отримуємо:

$$[(B - \omega^2)l + Ad\omega]\cos(\theta + \omega t) = L\cos(\theta + \omega t). \quad (17)$$

Аналогічно для других квадратних дужок у виразі (15):

$$\begin{aligned}&[\frac{\lambda_2^2(d\lambda_1 + l\omega) - \lambda_1^2(d\lambda_2 + l\omega)}{\lambda_2 - \lambda_1} - d\omega^2]\times \\ &\times\sin(\theta_П + \omega t) = [(B - \omega^2)d - Al\omega]\times \\ &\times\sin(\theta_П + \omega t).\end{aligned} \quad (18)$$

Підстановка значень l і d з (8) у (18) дає:

$$[(B - \omega^2)d - Al\omega]\sin(\theta_П + \omega t) = D\sin(\theta + \omega t). \quad (19)$$

Враховуючи, що $\dot{V}_Л=\ddot{S}$, $V_Л=\dot{S}$, pB=P, отримуємо:

$$\begin{aligned}\dot{V}_Л &= \ddot{S} = -A\dot{S} - BS + L\cos(\theta_П + \omega t) + \\ &+D\sin(\theta_П + \omega t) + P,\end{aligned} \quad (20)$$

тобто вихідне рівняння (1).

Для нижніх знаків аналогічно отримуємо:

$$e^{\lambda_1 t} = \frac{S\lambda_2 - V_Л - (l\lambda_2 + d\omega)\cos(\theta_П - \omega t) - -(d\lambda_2 - l\omega)\sin(\theta_П - \omega t) - \lambda_1 p}{C_1(\lambda_2 - \lambda_1)}; \quad (21)$$

$$e^{\lambda_2 t} = -\frac{S\lambda_1 - V_Л - (l\lambda_1 + d\omega)\cos(\theta_П - \omega t) - -(d\lambda_1 - l\omega)\sin(\theta_П - \omega t) - \lambda_1 p}{C_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (22)$$

що після підстановки (21, 22) в (13) і часткового впорядкування дає:

$$\begin{aligned}\dot{V}_Л &= -BS - AV_Л + Bp + \\ &+[\frac{\lambda_2^2(l\lambda_1 + d\omega) - \lambda_1^2(l\lambda_2 + d\omega)}{\lambda_2 - \lambda_1} - \\ &-l\omega^2]\cos(\theta_П - \omega t) + \\ &+[\frac{\lambda_2^2(d\lambda_1 - l\omega) - \lambda_1^2(d\lambda_2 - l\omega)}{\lambda_2 - \lambda_1} - \\ &-d\omega^2]\sin(\theta_П - \omega t).\end{aligned} \quad (23)$$

Упорядкування виразів у квадратних дужках перед $\cos(\theta_П - \omega t)$ та $\sin(\theta_П - \omega t)$ після підстановки значень l і d з їх нижніми знаками дає (1, 20).

Це означає, що наведені в [15] універсальні розв'язки цього рівняння є правильними. Тому в цьому вигляді вони можуть бути рекомендовані для застосування в конструкторських розрахунках таких процесів, у наукових дослідžеннях та навчальному процесі студентів відповідних спеціальностей. Зазначимо, що підстановка в (1) значень S і $V_Л$ з (2, 3) з урахуванням $Bl \pm Ad\omega - L = l\omega^2$ та $Bd \mp Al\omega - D = d\omega^2$ дає (13), що підтверджує їх правильність, однак пряма перевірка розв'язків з отриманням вихідного рівняння (1) можлива лише методом, поданим у цій статті. Коли частинка спочатку рухається лише по нижній полиці лопатки, не торкаючись бокової її полиці, на першому етапі розрахунків для вертикальної осі обертання можна скористатися рівняннями, наведеними в [16]. Рівняння руху частинки лише по боковій полиці лопатки, паралельній вертикальній осі обертання, коли вісь OX лежить горизонтально на диску в площині бокової полиці лопатки, віддаленої від осі обертання на R_o, вісь OY — вертикально вгору, паралельно осі обертання, а точка 0 — на диску в точці $R = R_o$, мають вигляд:

$$\ddot{Y} = -g - F_Y / m, \quad \ddot{X} = R\omega^2 \cos\alpha - F_X / m, \text{ де:}$$

$$F_X = f\,m(\pm\omega^2 R \sin\alpha + 2\omega \dot{X}) \frac{\dot{X}}{\sqrt{(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2}};$$

$$F_Y = f\,m(\pm\omega^2 R \sin\alpha + 2\omega \dot{X}) \frac{\dot{Y}}{\sqrt{(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2}}.$$

Тут f — коефіцієнт тертя, α — кут між радіусом R і вектором $\dot{X}$, тобто вектором відносної швидкості руху частинки по осі OX, рад. У цих рівняннях верхній знак належить до випадку, коли лопатка нахилена до радіуса R в напрямку її обертання, а нижній — проти нього. Після досягнення частинкою нижньої полиці лопатки, подальші розрахунки ведемо за (1).

Диференційне рівняння руху частинки вздовж лопатки, що обертається, перевіряється його відповідністю рівнянням Лагранжа другого роду [4,16, 17], а вихідне рівняння — підстановкою в нього коефіцієнтів A, B, L, D, P.

Висновки

Пряму перевірку розв'язків рівнянь руху частинки вздовж прямої лопатки загального положення, що обертається, з отриманням вихідного рівняння слід проводити підстановкою значень $\exp\lambda_1 t$ та $\exp\lambda_2 t$ у вираз $\dot{V}_Л$, отриманий взяттям другої похідної з розв'язку S(t) цих рівнянь.

Значення $\exp\lambda_1 t$ та $\exp\lambda_2 t$ знаходять розв'язуванням щодо них системи з двох рівнянь: шляху S, пройденого частинкою, і швидкості $V_Л$ її руху вздовж лопатки, взятих з розв'язків вихідного рівняння.

Розв'язки, які таким способом не переходять у вихідне диференційне рівняння або не можуть бути перевірені такою методикою, мають ті чи інші помилки, і тому до їх з'ясування не повинні застосовуватися на практиці.

Значення кута θ нахилу бокової полиці лопатки до базової вертикальної площини, в якій лежить нахилена або горизонтальна вісь обертання лопатки, слід брати з урахуванням початкового значення цього кута $\theta_П$, тобто $\theta = \theta_П \pm \omega t$. Це усуває системну помилку, виявлену в багатьох публікаціях, і дає змогу отримати універсальні рівняння руху частинки та встановити вплив $\theta_П$ на показники роботи відповідних машин.

Вихідні рівняння (1) перевіряються їх виведенням через рівняння Лагранжа другого роду [4,16, 17], а канонічна форма запису вихідного рівняння (1) — підстановкою в нього значень постійних коефіцієнтів A, B, L, D, P.

Такої перевірки потребують матеріали наукових статей і дисертаційних робіт, що дасть змогу зробити аргументований висновок про їх достовірність.

Бібліографія

1. *Адамчук В.В.* Механіко-технологічні і технічні основи підвищення ефективності внесення твердих мінеральних добрив та хіммеліорантів: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. д-ра техн. наук. — К., 2006. — 26 с.

2. *Адамчук В.В., Адамчук О.В.* Теоретичне дослідження нового способу внесення хіммеліорантів// Вісн. аграр. науки. Спец. вип. — Травень, 2010. — С. 25–30.

3. *Брык Н.И.* Исследование процесса внесения органических удобрений из куч и исследование параметров валкообразователя: дис. на соискание учен. степ. канд. техн. наук. — К.: УСХА, 1976. — 200 с.

4. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. — К.: УАСХН, 1960. — 283 с.

5. *Голуб Г.А.* Механіко-технологічне обґрунтування технічних засобів для виробництва їстівних грибів: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. д-ра техн. наук. — К., 1980. — 40 с.

6. *Єфименко М.К.* Обоснование процесса работы и параметров рабочих органов машин для внесения полужидких органических удобрений: дис. на соискание учен. степ. канд. техн. наук. — Глеваха, 1987. — 343 с.

7. *Кузьменко В.Ф.* Обоснование технологического процесса и параметров рабочих органов для формирования массы при секционном заполнении траншейных хранилищ: автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. техн. наук. — Глеваха, 1990. — 19 с.

8. *Левчук Н.С.* Обоснование технологических операций и обоснование параметров машин для подготовки почвы и посева трав на откосах противоэрозионных сооружений: дис. на соискание учен. степ. канд. техн. наук. — Глеваха: УкрНИИ мех. и эл. сел. хоз-ва, 1980. — 146 с.

9. *Линник Н.К.* Исследование процесса внесения органических удобрений роторными разбрасывателями: автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. техн. наук. — К., 1970. — 27 с.

10. *Линник Н.К.* Технологии и средства механизации использования органических удобрений в условиях интенсивного земледелия Украины: дис. д-ра с.-х. наук. — К., 1994. — 299 с.

11. *Назаров С.И.* Экспериментально-теоретические основы механизации процесса сплошного внесения минеральных удобрений: автореф. дис. на соискание учен. степ. д-ра техн. наук. — Минск, 1970. — 375 с.

12. *Онищенко В.Б.* Обоснование процесса работы и параметров пневмоцентробежных рабочих органов машин для внесения твердых минеральных удобрений: дис. на соискание учен. степ. канд. техн. наук. — Глеваха, 1995. — 177 с.

13. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1978. — Т. 2. — 575 с.

14. *Ратушный В.В.* Обоснование процесса работы и параметров пневмоцентробежных рабочих органов многоканальных пневматических систем машин для внесения твердых минеральных удобрений: дис. на соискание учен. степ. канд. техн. наук. — Глеваха,1994. — 191 с.

15. *Смаглій В.І.* Рух матеріальної частинки по лопатці при нахилі осі її обертання//Вісн. аграр. науки. — 2012. — № 7. — С. 50–53.

16. *Смаглій В.І.* Рух матеріальної частинки вздовж криволінійної лопатки з вертикальною віссю обертання//Вісн. аграр. науки. — 2013. — № 2. — С. 47–50.

17. *Смаглій В.І.* Рух матеріальної частинки по шорстких дисках//Наук. вісн. НУБіП України. — Вип. 185. — Ч. 1. — К.: НУБіП, 2013. — С. 117–125.

18. *Хоменко М.С.* Исследование технологического процесса рассева минеральных удобрений центробежными аппаратами: дис. на соискание учен. степ. канд. техн. наук. — Челябинск, 1960. — 271с.

Надійшла 22.11.2013.