



Механізація, електрифікація

УДК 631.816.631.333

© 2014

В.І. Смаглій,

*кандидат
технічних наук*

*ВП НУБіП України
«Ніжинський
агротехнічний
інститут»*

РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ, КИНУТОЇ У ВІЛЬНИЙ ПОВІТРЯНИЙ ПРОСТІР

Мета. Розробити високоточну методику наближеного інтегрування рівнянь балістики, яка б не змінювала природи сил, що діють на частинку. **Методи.** Застосовано апроксимацію у рівняннях балістики членів $V^{N-1}V_x$ і $V^{N-1}V_y$ поліномами 3-, 4-ї і т.д. степені в часі t . Перші значення коефіцієнтів цих поліномів знаходять з рівнянь нульового наближення, а наступні — ітерацією, тобто інтегруванням рівнянь балістики з цими поліномами з подальшим їх уточненням через усереднення попередніх та отриманих після інтегрування значень V_x і V_y в них до їх збігу. **Результати.** Розроблена універсальна методика дає змогу отримати практично будь-яку точність розрахунків параметрів руху частинки на взятій ділянці. **Висновки.** Ця методика досить проста, може конкурувати з числовими методами розрахунків, застосовуватись у визначенні точності таких розрахунків та інтегруванні інших рівнянь, що не інтегруються в елементарних функціях.

Ключові слова: рівняння, нульове наближення, апроксимація, прийоми методу ітерацій, усереднення, уточнення, порівняння, збіг.

Актуальність проблеми. Залежності руху матеріальної частинки, кинутої у вільний повітряний простір, потрібні для визначення ширини захвату машин з внесення добрив, засобів захисту рослин, поливу рослин тощо [10].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Такі рівняння та їх розв'язки подані в [1–7, 10], а їх аналіз подається в [10]. Загалом ці рівняння не інтегруються в елементарних функціях, тому їх використання має певні складнощі. У найпростіших розв'язках [3] сили опору повітря по осях OY і OX множать на синус і косинус кута нахилу вектора V (м/с) абсолютної швидкості руху частинки до горизонту, чим надають їм інтегрованого вигляду, однак це змінює природу цих сил,

що негативно впливає на точність результатів. Тому потрібні подальші дослідження.

Мета досліджень — розробити просту методику, яка дає необхідну точність розрахунків параметрів руху матеріальної частинки, кинутої під кутом у вільний повітряний простір, без зміни фізичної природи сил у такому її русі.

Методика досліджень. Застосовано апроксимацію у рівняннях балістики членів $V^{N-1}V_x$ і $V^{N-1}V_y$ поліномами 3-, 4-ї і т.д. степені в часі t . Перші значення коефіцієнтів цих поліномів знаходять з рівнянь нульового наближення, а наступні — ітерацією, тобто інтегруванням рівнянь балістики з цими поліномами з подальшим їх уточненням через усереднення попередніх та отриманих після

інтегрування значень V_x і V_y в них до їх збігу.

Результати досліджень. Нами було помічено, що інтегруванню зазначених рівнянь сприяють прийоми методу ітерацій [8]. Справді, якщо на певній ділянці часу t (с) апроксимувати в них $V^{N-1}V_x$ і $V^{N-1}V_y$ наближеними поліномами за степенями t , які дають більші, ніж фактичні їх значення, то отримані після їх інтегрування в рівняннях балістики V_x і V_y зменшаться, а в протилежному разі — збільшаться. Усереднюючи попередні й отримані значення цих швидкостей у взятих точках t та уточнюючи щоразу ці поліноми, ми автоматично рухаємося до точних їх значень. Точність дає степінь поліномів і кількість їх наближень. Розкладання $V^{N-1}V_x$ і $V^{N-1}V_y$ в ряди Маклорена не дає тут потрібного результату, тому на висхідній ділянці траєкторії нульове наближення отримуємо методом суперпозиції, де сумарний ефект є сумою ефектів від кожного окремого фактора. Іх 2 — опір повітря і вага частинки. Рівняння балістики мають вигляд [3]:

$$\dot{V}_x = -\frac{g}{\omega_0^N} V^{N-1}V_x; \quad \dot{V}_y = -g - \frac{g}{\omega_0^N} V^{N-1}V_y, \quad (1)$$

де $n = 1, 0; 1, 2; 1, 5; 2, 0$ залежно від режиму обтікання частинки повітрям [9]. Коли діє лише сила опору повітря, за найпоширенішого квадратичного закону обтікання частинки ($N = 2$) для абсолютної швидкості V запишемо:

$$\dot{V} = -\frac{gV^2}{\omega_0^2}, \quad \text{звідки } V = \frac{V_{\text{п}}\omega_0^2}{gV_{\text{п}}t + \omega_0^2}, \quad (2)$$

де $V_{\text{п}}$ — початкове ($t_{\text{п}} = 0$) значення абсолютної швидкості руху частинки, м/с; g — прискорення вільного падіння тіла, 9,81 м/с²; ω_0 — швидкість витання частинки, м/с.

Підставивши V з (2) в (1) для горизонтальної осі OX , за квадратичного закону опору частинки маємо:

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{g}{\omega_0^2} V V_x = -\frac{g}{\omega_0^2} \left(\frac{V_{\text{п}}\omega_0^2}{gV_{\text{п}}t + \omega_0^2} \right) V_x. \quad (3)$$

Інтегрування (3) дає:

$$V_x = \frac{V_{\text{хп}}\omega_0^2}{gV_{\text{п}}t + \omega_0^2} = \frac{V_{\text{хп}}}{\frac{gV_{\text{п}}t}{\omega_0^2} + 1}. \quad (4)$$

Аналогічно для вертикальної осі OY в разі дії лише сили опору повітря:

$$V_y = \frac{V_{\text{yp}}\omega_0^2}{gV_{\text{п}}t + \omega_0^2}, \quad (5)$$

де $V_{\text{хп}}$ і V_{yp} — значення початкової швидкості частинки по осі OX і OY , м/с.

Враховуючи і силу тяжіння, для V_y з (1, 5) приблизно запишемо:

$$V_y = -gt + \frac{V_{\text{yp}}\omega_0^2}{gV_{\text{п}}t + \omega_0^2}. \quad (6)$$

У верхній точці траєкторії $V_y = 0$, тому час $t_{\text{вис}}$ руху частинки до неї з (6) дорівнює:

$$t_{\text{вис}} = -\frac{\omega_0^2}{2gV_{\text{п}}} + \frac{\omega_0}{g} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4V_{\text{п}}^2} + \frac{V_{\text{yp}}}{V_{\text{п}}}}. \quad (7)$$

Подальше інтегрування (4, 6) з урахуванням $t_{\text{п}} = 0$, $X=X_{\text{п}}$, $Y=Y_{\text{п}}$ дає:

$$X = X_{\text{п}} + \frac{V_{\text{хп}}\omega_0^2}{gV_{\text{п}}} \ln\left(\frac{gV_{\text{п}}t + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right). \quad (8)$$

$$Y = Y_{\text{п}} - \frac{gt^2}{2} + \frac{V_{\text{yp}}\omega_0^2}{gV_{\text{п}}} \ln\left(\frac{gV_{\text{п}}t + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right), \quad (9)$$

де $X_{\text{п}}$, $Y_{\text{п}}$ — початкові горизонтальна і вертикальна координати частинки, м. Цих формул достатньо для приблизних розрахунків параметрів її руху на висхідній ділянці. Далі в (1) $V^{N-1}V_x$ і $V^{N-1}V_y$ апроксимуюємо степеневими функціями, які проходять через 3, 4, 5 і т.д. точок на інтервалі t цієї ділянки. Наприклад, для початкової, двох середніх і кінцевої точок інтервалу t :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1t_1 + a_2t_1^2 + a_3t_1^3 &= V_1^{N-1}V_{x1}; \\ a_0 + a_1t_2 + a_2t_2^2 + a_3t_2^3 &= V_2^{N-1}V_{x2}; \\ a_0 + a_1t_3 + a_2t_3^2 + a_3t_3^3 &= V_3^{N-1}V_{x3}, \end{aligned} \quad (10)$$

де a_0, a_1, a_2, a_3 — постійні коефіцієнти; t_0, t_1, t_2, t_3 — час руху частинки відповідно в початковій точці ($t_0=0$), на першому (t_1), на другому (t_2), на третьому (t_3) проміжку, с; $V_{\text{п}}^{N-1}V_{\text{хп}}$, $V_1^{N-1}V_{x1}$, $V_2^{N-1}V_{x2}$, $V_3^{N-1}V_{x3}$ — значення $V^{N-1}V_x$ відповідно — початкове, наприкінці 1-го, наприкінці 2-го, наприкінці 3-го проміжків, м²/с², перші з яких визначаємо із залежностей нульового наближення (4, 6), а далі — за цією методикою.

Для 3-х однакових проміжків часу t підставкою в (11) значень $t_2=2t_1$, $t_3=3t_1$ і заміною $a_0=V_{\text{п}}^{N-1}V_{\text{хп}}$, $V_1^{N-1}V_{x1}-a_0=b_1$, $V_2^{N-1}V_{x2}-a_0=b_2$, $V_3^{N-1}V_{x3}-a_0=b_3$;

$$\begin{aligned} a_1t_1 + a_2t_1^2 + a_3t_1^3 &= b_1; \\ 2a_1t_1 + 4a_2t_1^2 + 8a_3t_1^3 &= b_2; \\ 3a_1t_1 + 9a_2t_1^2 + 27a_3t_1^3 &= b_3, \end{aligned} \quad (11)$$

Звідки:

$$a_1 t_1 = (18b_1 + 2b_3 - 9b_2) / 6;$$

$$a_2 t_1^2 = (4b_2 - b_3 - 5b_1) / 2;$$

$$a_3 t_1^3 = (b_3 + 3b_1 - 3b_2) / 6.$$

Знаючи t_1 , легко знайти a_1 , a_2 , a_3 , однак зручніше користуватись $a_1 t_1$; $a_2 t_1^2$; $a_3 t_1^3$. Для $V^{N-1} V_Y$ аналогічно маємо: $V^{N-1} V_Y = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$. Тоді $c_0 = V_{\Pi}^{N-1} V_{Y\Pi}$ у початковій точці. Для $t_2 = 2t_1$; $t_3 = 3t_1$; $V_1^{N-1} V_{Y1} - c_0 = d_1$; $V_2^{N-1} V_{Y2} - c_0 = d_2$; $V_3^{N-1} V_{Y3} - c_0 = d_3$ також отримуємо:

$$c_1 t_1 = (18d_1 + 2d_3 - 9d_2) / 6;$$

$$c_2 t_1^2 = (4d_2 - d_3 - 5d_1) / 2;$$

$$c_3 t_1^3 = (d_3 + 3d_1 - 3d_2) / 6.$$

Тоді з (1):

$$\dot{V}_x = -\frac{g}{\omega_0^n} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3); \quad (12)$$

$$\dot{V}_Y = -g - \frac{g}{\omega_0^n} (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3),$$

які легко інтегруються і дають:

$$V_x = V_{x\Pi} - \frac{g}{\omega_0^n} \left(a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2} + \frac{a_2 t^3}{3} + \frac{a_3 t^4}{4} \right); \quad (13)$$

$$V_Y = V_{Y\Pi} - g t - \frac{g}{\omega_0^n} \left(c_0 t + \frac{c_1 t^2}{2} + \frac{c_2 t^3}{3} + \frac{c_3 t^4}{4} \right);$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_Y^2}. \quad (13) \text{ визначаємо наступні}$$

V_x, V_Y і V в точках t_1, t_2, t_3 , які щоразу усереднюємо діленням навіпіл суми з попередніх та отриманих їх значень. Цим ми швидше досягнемо потрібної точності й уникнемо нестійкості розв'язків. Наприкінці з (12, 13) для $t_k = k t_1$ (у взятих точках $k=1, 2, 3$, а поза ними $k=t/t_1$ буде дробовим) маємо:

$$X_k = X_{\Pi} + V_{x\Pi} k t_1 - \frac{g}{\omega_0^n} \left(\frac{a_0}{2} + \frac{k a_1 t_1}{6} + \frac{k^2 a_2 t_1^2}{12} + \frac{k^3 a_3 t_1^3}{20} \right) k^2 t_1^2; \quad (14)$$

$$Y_k = Y_{\Pi} + V_{Y\Pi} k t_1 - \frac{g k^2 t_1^2}{2} - \frac{g}{\omega_0^n} \left(\frac{c_0}{2} + \frac{k c_1 t_1}{6} + \frac{k^2 c_2 t_1^2}{12} + \frac{k^3 c_3 t_1^3}{20} \right) k^2 t_1^2.$$

На низхідній ділянці траєкторії руху, якщо $V_{Y\Pi}=0$, опір повітря в (6) дорівнює нулю на всій узятій ділянці. Тому в нульовому наближенні враховуємо його вплив лише від вертикальної її швидкості. Тоді для $|V_{Y\Pi}| \leq \omega_0$ запишемо для $N=2$: $\dot{V}_Y = -g + \frac{g}{\omega_0^2} V_Y^2$, що рівнозначно:

$$\left(-\frac{\omega_0^2}{g} \right) \frac{dV_Y}{dt} = \omega_0^2 - V_Y^2. \quad (15)$$

При $t_{\Pi}=0$, $V_Y = V_{Y\Pi}$ з (15) отримуємо:

$$t = \frac{\omega_0}{2g} \left[\ln \frac{\omega_0 + V_{Y\Pi}}{\omega_0 - V_{Y\Pi}} - \ln \frac{\omega_0 + V_Y}{\omega_0 - V_Y} \right],$$

де t — час досягнення частинкою швидкості V_Y , м/с.

Значення V_Y тут є від'ємними величинами, тому t в останньому виразі завжди будуть позитивні і зростатимуть за наближення V_Y до ω_0 . З V_Y одержуємо:

$$V_Y = \omega_0 \frac{(\omega_0 + V_{Y\Pi}) - (\omega_0 - V_{Y\Pi}) \exp\left(\frac{2g}{\omega_0} t\right)}{(\omega_0 + V_{Y\Pi}) + (\omega_0 - V_{Y\Pi}) \exp\left(\frac{2g}{\omega_0} t\right)}. \quad (16)$$

Для визначення Y вираз (15) подаємо у вигляді:

$$\left(-\frac{\omega_0^2}{g} \right) \frac{V_Y dV_Y}{dY} = \omega_0^2 - V_Y^2, \quad (17)$$

$$\text{який дає: } Y = Y_{\Pi} - \frac{\omega_0^2}{2g} \left[\ln \frac{(\omega_0^2 - V_{Y\Pi}^2)}{(\omega_0^2 - V_Y^2)} \right].$$

Зі зростанням V_Y дріб під логарифмом збільшується, а Y — зменшується. Якщо з виразу (17) визначити V_{Yk} при $Y_k=0$ і підставити його у вираз для t , можна визначити час $t_{\text{низ}}$ руху частинки до падіння на поверхню поля. Звідки:

$$\exp \frac{2g Y_{\Pi}}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 - V_{Y\Pi}^2}{\omega_0^2 - V_{Yk}^2}, \text{ що дає:}$$

$$V_{Yk} = -\sqrt{\omega_0^2 - (\omega_0^2 - V_{Y\Pi}^2) \exp\left(-\frac{2g Y_{\Pi}}{\omega_0^2}\right)};$$

$$t_{\text{низ}} = \frac{\omega_0}{2g} \left[\ln \frac{\omega_0 + V_{Y\Pi}}{\omega_0 - V_{Y\Pi}} - \ln \frac{\omega_0 + V_{Yk}}{\omega_0 - V_{Yk}} \right].$$

Для $|V_{Y\Pi}| \geq \omega_0$ (15) матиме розв'язки:

$$Y = Y_{\Pi} - \frac{\omega_0^2}{2g} \left[\ln \frac{(\omega_0^2 - V_{Y\Pi}^2)}{(\omega_0^2 - V_Y^2)} \right];$$

$$t = \frac{\omega_0}{2g} \ln \frac{(V_{Y\Pi} + \omega_0)(V_Y - \omega_0)}{(V_{Y\Pi} - \omega_0)(V_Y + \omega_0)};$$

$$V_Y = \omega_0 \frac{V_{Y\Pi} + \omega_0 + (V_{Y\Pi} - \omega_0) \exp\left(\frac{2gt}{\omega_0}\right)}{V_{Y\Pi} + \omega_0 - (V_{Y\Pi} - \omega_0) \exp\left(\frac{2gt}{\omega_0}\right)}. \quad (18)$$

Проведемо розрахунки руху частинки $\omega_0=8$ м/с, кинуті з висоти $h = 1$ м під кутом 15° до горизонту в повітря з $V_{\Pi}=40$ м/с. Тоді на висхідній

ділянки з (6) $t_{\text{вис}}=0,34125$ с. Приблизно $t_{\text{вис}}$ ділимо на 3 рівних проміжки, наприклад, по 0,15 с. кожний. З (4, 6) V_x, V_y в точках t_0, t_1, t_2, t_3 діапазону зміни t дорівнюватимуть: $V_{x0}=38,6$ м/с; $V_{x1}=20,1$ м/с; $V_{x2}=13,6$ м/с; $V_{x3}=10,28$ м/с; $V_{y0}=10,3$ м/с; $V_{y1}=3,9$ м/с; $V_{y2}=0,7$ м/с; $V_{y3}=-1,66$ м/с, звідки: $t_1=0,15$ с; $a_0=1545,44$ м²/с²; $b_1=-1132,76$ м²/с²; $b_2=-1360,04$ м²/с²; $b_3=-1438,036$ м²/с²; $c_0=414,08$ м²/с²; $d_1=-333,68$ м²/с²; $d_2=-404,48$ м²/с²; $d_3=-431,36$ м²/с²; що дає: $a_1t_1=-1837,5$ м²/с²; $a_2t_1^2=830,84$ м²/с²; $a_3t_1^3=-126,03$ м²/с²; $c_1t_1=-538,1$ м²/с²; $c_2t_1^2=240,9$ м²/с²; $c_3t_1^3=-36,49$ м²/с²; з (13) формуємо наступні V_x, V_y і V , які для $t_k=kt_1$ ($k=1, 2, 3$) будуть:

$$V_{yk} = V_{yp} - gkt_1 - \frac{g}{\omega_0} (c_0 + k \frac{c_1 t_1}{2} + k^2 \frac{c_2 t_1^2}{3} + k^3 \frac{c_3 t_1^3}{4}) kt_1; \quad (19)$$

$$V_{xk} = V_{xp} - \frac{g}{\omega_0} (a_0 + k \frac{a_1 t_1}{2} + k^2 \frac{a_2 t_1^2}{3} + k^3 \frac{a_3 t_1^3}{4}) kt_1.$$

Оскільки всі члени в дужках (10) відомі, обчислення V_x і V_y спрощується.

Далі розмірності опускаємо як відомі. Перше наближення дає: $V_{x1}=18,6$; $V_{x2}=14,19$; $V_{x3}=12,5$; $V_{y1}=3,9$; $V_{y2}=1,7$; $V_{y3}=0,188$. Усередненням V_x і V_y отримуємо: $V_{x1}=19,35$; $V_{x2}=13,16$; $V_{x3}=9,59$; $V_{y1}=3,9$; $V_{y2}=1,2$; $V_{y3}=-0,73$; з яких: $b_1=-1162,9$; $b_2=-1371,1$; $b_3=-1452,7$; $d_1=-336,76684$; $d_2=-398,2194$; $d_3=-421,16085$; які дають: $a_1t_1=-1916,2$; $a_2t_1^2=891,33$; $a_3t_1^3=-143,0$; $c_1t_1=-552,66$; $c_2t_1^2=256,0627$; $c_3t_1^3=-39,46719$. У наступному наближенні: V_x, V_y, V маємо: $V_{x1}=19,1$; $V_{x2}=14$; $V_{x3}=12,3$; $V_{y1}=4,05$; $V_{y2}=1,7$; $V_{y3}=-0,05$; звідки: $b_1=-1167,45$; $b_2=-1357,4$; $b_3=-1410,46$; $d_1=-334,44$; $d_2=-390,167$; $d_3=-418,4$; $a_1t_1=1936,4$; $a_2t_1^2=909,07$; $a_3t_1^3=-140,1$; $c_1t_1=-557,55$; $c_2t_1^2=264,98$; $c_3t_1^3=-41,87$. $V_{x1}=19,2$; $V_{x2}=13,76$; $V_{x3}=9,5$; $V_{y1}=3,98$; $V_{y2}=1,61$; $V_{y3}=0,27$. Усереднення дає: $V_{x1}=19,2$; $V_{x2}=13,7$; $V_{x3}=10,23$; $V_{y1}=3,98$; $V_{y2}=1,53$; $V_{y3}=-0,33$. Оскільки отримано достатню точність, розрахунки припиняємо. Розраховуємо: $b_1=-1168,1$; $b_2=-1355,47$; $b_3=-1440,72$; $d_1=-335,92$; $d_2=-392,85$; $d_3=-417,5$, які дають: $a_1t_1=-1951,5$; $a_2t_1^2=929,8$; $a_3t_1^3=-146,46$; $c_1t_1=-557,6$; $c_2t_1^2=262,8$; $c_3t_1^3=-41,1$. З них визначаємо X_3, Y_3 та швидкості V_{x3}, V_{y3} частинки наприкінці цієї ділянки. З них: $X_1=4,01$ м; $X_2=6,44$ м; $X_3=8,18$ м; $Y_1=1,98$ м; $Y_2=2,39$ м; $Y_3=2,496$ м; $V_{x3}=9,736$ м/с;

$V_{y3}=0,17$ м/с. Середні значення: $V_{x3}=9,98$ м/с; $V_{y3}=-0,05$ м/с; $V_3=9,98$ м/с беремо початковими в розрахунках низхідної ділянки. Нульове наближення одержимо з (4, 15).

$$V_x = \frac{V_{xp}}{[gV_{yp}t/\omega_0^2 + 1]}; \quad Y = Y_p - \frac{\omega_0^2}{2g} [\ln \frac{(\omega_0^2 - V_{yp}^2)}{(\omega_0^2 - V_y^2)}];$$

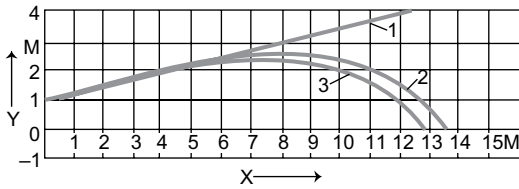
$$V_{yk} = -\sqrt{\omega_0^2 - (\omega_0^2 - V_{yp}^2) \exp(-\frac{2gY_p}{\omega_0^2})};$$

$$t_{\text{низ}} = \frac{\omega_0}{2g} [\ln \frac{\omega_0 + V_{yp}}{\omega_0 - V_{yp}} - \ln \frac{\omega_0 + V_{yk}}{\omega_0 - V_{yk}}];$$

$$V_y = \omega_0 \frac{(\omega_0 + V_{yp}) - (\omega_0 - V_{yp}) \exp(\frac{2g}{\omega_0} t)}{(\omega_0 + V_{yp}) + (\omega_0 - V_{yp}) \exp(\frac{2g}{\omega_0} t)}$$

де V_{yk} — кінцева швидкість частинки за її падіння на землю, м/с.

З них знаходимо час $t_{\text{низ}}$ і значення V_y і V_x в його точках t_1, t_2, t_3 . Спочатку знаходимо $V_{yk}=-5,831$ м/с, потім: $t_{\text{низ}}=0,74$ с, приблизно третю його частину приймаємо за $t_1=0,3$ с, $t_2=2t_1, t_3=3t_1$. Далі з (4, 16) знаходимо V_x, V_y і V : $V_{xp}=10$; $V_{yp}=-0,05$; $V_{x1}=6,84$; $V_{x2}=5,2$; $V_{x3}=4,2$; $V_{y1}=-2,85$; $V_{y2}=-5,04$; $V_{y3}=-6,4$; $V_p=10$; $V_1=7,4$; $V_2=7,24$; $V_3=7,68$; $V_p V_{xp}=99,6$; $V_1 V_{x1}=50,7$; $V_2 V_{x2}=37,7$; $V_3 V_{x3}=32,26$; $V_p V_{yp}=-0,5$; $V_1 V_{y1}=-21,14$; $V_2 V_{y2}=-36,5$; $V_3 V_{y3}=-49,45$; $a_0=99,66$; $b_1=-48,94$; $b_2=-61,96$; $b_3=-67,4$; $c_0=-0,5$; $d_1=-20,6$; $d_2=-36,0$; $d_3=-48,9$; $a_1t_1=-76,3$; $a_2t_1^2=32,142$; $a_3t_1^3=-4,72$; $c_1t_1=-24,2$; $c_2t_1^2=4,07$; $c_3t_1^3=-0,4781$. Визначаємо з (19) V_x, V_y і V у точках t_1, t_2, t_3 $V_{x1}=6,72$; $V_{x2}=4,76$; $V_{x3}=3,134$; $V_{y1}=-2,47$; $V_{y2}=-4,07$; $V_{y3}=-5,03$. Усереднення дає: $V_{x1}=6,78$; $V_{x2}=4,98$; $V_{x3}=3,66$; $V_{y1}=-2,66$; $V_{y2}=-4,5$; $V_{y3}=-5,7$. Звідки: $V_1=7,28$; $V_2=6,75$; $V_3=6,8$; $V_1 V_{x1}=49,38$; $V_2 V_{x2}=33,67$; $V_3 V_{x3}=24,96$; $V_1 V_{y1}=-19,38$; $V_2 V_{y2}=-30,77$; $V_3 V_{y3}=-39,045$; $a_0=99,6$; $b_1=-50,3$; $b_2=-66,0$; $b_3=-74,7$; $c_0=-0,5$; $d_1=-18,88$; $d_2=-30,27$; $d_3=-38,546$; $a_1t_1=-76,78$; $a_2t_1^2=31,09$; $a_3t_1^3=-4,6$; $c_1t_1=-24,086$; $c_2t_1^2=5,93$; $c_3t_1^3=-0,7$. Інтегрування дає: $V_{x1}=6,74$; $V_{x2}=4,9$; $V_{x3}=3,5$; $V_{y1}=-2,5$; $V_{y2}=-4,27$; $V_{y3}=-5,6$. Усереднення дає: $V_{x1}=6,76$; $V_{x2}=4,95$; $V_{x3}=3,6$; $V_{y1}=-2,58$; $V_{y2}=-4,4$; $V_{y3}=-5,67$. Звідки: $V_1=7,2$; $V_2=6,6$; $V_3=6,7$; $V_1 V_{x1}=48,9$; $V_2 V_{x2}=32,8$; $V_3 V_{x3}=24,19$; $V_1 V_{y1}=-18,67$; $V_2 V_{y2}=-29,25$; $V_3 V_{y3}=-38,08$; $a_0=99,66$; $b_1=-50,74$; $b_2=-66,85$; $b_3=-75,47$; $c_0=-0,5$; $d_1=-18,17$; $d_2=-28,75$; $d_3=-37,58$; $a_1t_1=-77,1$; $a_2t_1^2=30,88$; $a_3t_1^3=-4,52$; $c_1t_1=-23,90$; $c_2t_1^2=6,706$; $c_3t_1^3=-0,971$. З (19) маємо: $V_{x1}=6,75$; $V_{x2}=4,9$; $V_{x3}=3,6$; $V_{y1}=-2,5$; $V_{y2}=-4,3$;



Траєкторії руху частинки в наведеному прикладі: 1 — у безповітряному просторі; 2 — за означеним методом; 3 — за рівняннями (4–9) та (15–18)

$V_{Y3} = -5,73$. Усереднення дає: $V_{X1} = 6,75$; $V_{X2} = 4,95$; $V_{X3} = 3,61$; $V_{Y1} = -2,543$; $V_{Y2} = -4,37$; $V_{Y3} = -5,702$. Оскільки отримано достатню точність, на завершення знаходимо: $V_1 = 7,22$; $V_2 = 6,6$; $V_3 = 6,75$; $V_1 V_{X1} = 48,77$; $V_2 V_{X2} = 32,67$;

$V_3 V_{X3} = 24,37$; $V_1 V_{Y1} = -18,35$; $V_2 V_{Y2} = -28,88$; $V_3 V_{Y3} = -38,49$; $b_1 = -50,89$; $b_2 = -67,0$; $b_3 = -75,29$; $d_1 = -17,85$; $d_2 = -28,38$; $d_3 = -37,99$; $a_1 t_1 = -77,3$; $a_2 t_1^2 = 30,9$; $a_3 t_1^3 = -4,5$; $c_1 t_1 = -23,66$; $c_2 t_1^2 = 6,87$; $c_3 t_1^3 = -1,069$. 3 (19) маємо: $V_{X1} = 6,75$; $V_{X2} = 4,96$; $V_{X3} = 3,63$; $V_{Y1} = -2,52$; $V_{Y2} = -4,36$; $V_{Y3} = -5,76$. 3 (14) для $t_1 = 0,3$ с; $t_2 = 2t_1$, $t_3 = 3t_1$ на низхідній ділянці: $X_1 = 10,63$ м; $X_2 = 12,37$ м; $X_3 = 13,65$ м; $Y_1 = 2,09$ м; $Y_2 = 1,046$ м; $Y_3 = -0,482$ м, за якими будемо траєкторію руху частинки (рисунок). З рисунка видно, що у нашому випадку до $X = 5$ м траєкторії руху для взятих варіантів збігаються, а в подальшому — розходяться. Крива 3 практично збігається з інтегруванням численними методами, що підтверджує цю методику, тому уточнені розрахунки можна проводити за нею, а приблизні — за (4–9) та (15–18). При $N = 1$ рівняння (1) інтегруються.

Висновки

Розроблена методика наближеного інтегрування рівнянь балістики дає змогу без зміни фізичної природи сил, які діють на частинку, досягнути будь-якої точності розрахунків параметрів руху частинки на взятій ділянці. Розділення взятого діапазону часу t на однакові проміжки t_1 та застосування значень $t_k = kt_1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) спрощує розрахунки за цією

методикою. Усереднення попередніх та отриманих значень V_x і V_y прискорює збіг розрахунків і запобігає проявам нестійкості розв'язків. Точність розв'язків збільшується зі збільшенням кількості проміжків на ділянці t , підвищенням степеня поліномів та кількості їх уточнень, однак достатніми є і три проміжки. Приблизні розрахунки можна вести за (4–9) та (15–18), а уточнені — за цією методикою.

Бібліографія

1. Адамчук В.В. Теория Центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений/В.В. Адамчук. — К.: Аграр. наука, 2010. — 178 с.
2. Адамчук В.В. Теоретичне дослідження руху частинки технологічного матеріалу в повітряному середовищі в умовах вітру і супроводжуючого повітряного струменя/В.В. Адамчук//Промислова гідраліка і пневматика. — 2005. — № 1(17). — С. 47–52.
3. Волков В.А. Приближенный расчет движения тел в сопротивляющихся средах/В.А. Волков//Труды ВИСХОМ. — Вып. 24. — М., 1959. — 17 с.
4. Заика П.М. Свободное движение материальной точки в спокойной изотропной газообразной среде/П.М. Заика, В.И. Мельник, А.И. Аникеев//Динамика и прочность машин: Вестник НТУ «ХПИ». — Х., 2001. — Вып. 25. — С. 153–164.
5. Заика П.М. Теорія сільськогосподарських машин/П.М. Заика//Машини для приготування і внесення добрив. — Х.: Око, 2002. — Т. 1, Ч. 3. — 342 с.
6. Ловейкін В.С. Дослідження дальності польоту частинок твердих мінеральних добрив шляхом моделювання/В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, А.І. Дитюк//Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. — Кіровоград: КНТУ, 2009. — Вип. 39. — С. 82–90.
7. Ольшанский В.П. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки/В.П. Ольшанский, С.И. Ольшанский. — Х.: Изд. Савчук А.О., 2013. — 204 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление/Н.С. Пискунов. — М.: Наука, 1978. — Т. 2. — 310 с.
9. Смаглій В.І. До визначення швидкості витання матеріалу в умовах стиснення/В.І. Смаглій//Вісн. с.-г. науки. — 1981. — № 9. — С. 56–60.
10. Тищенко Л.М. Задачі балістики матеріальної точки в моделях розсіювання добрив/Л.М. Тищенко, В.П. Ольшанський//Механізація та електрифікація сільськогосподарства: 36. ННЦ «ІМЕСГ». — Вип. 98. — К., 2013. — С. 174–182.

Надійшла 08.07.2014.