



# Механізація, електрифікація

УДК 631.333

© 2015

*В.І. Смаглий,*

*кандидат  
технічних наук*

*ВП НУБіП України  
«Ніжинський  
агротехнічний  
інститут»*

## **РУХ ЧАСТИНКИ В ПОВІТРІ В УМОВАХ ВІТРУ І РУХУ АГРЕГАТУ**

**Мета.** Розробити високоточну методика наближеного інтегрування рівнянь руху матеріальної частинки, кинутої у повітря в умовах вітру і руху агрегату. **Методи.** Застосовано апроксимацію в рівняннях членів  $V_{ox}^{N-1}$ ,  $V_{oy}^{N-1}$  і  $V_{oz}^{N-1}$  поліномами 3-ї, 4-ї і т.д. степені в часі  $t$ . Перші значення коефіцієнтів цих поліномів знаходять з рівнянь нульового наближення, які наводяться у статті, а наступні — ітерацією, тобто інтегруванням рівнянь з цими поліномами зі щоразовим їх уточненням через усереднення попередніх та отриманих після інтегрування значень  $V_x$ ,  $V_y$  і  $V_z$  до їх збігу. **Результати.** Розроблена універсальна методика дає змогу отримати практично будь-яку точність розрахунків параметрів руху частинки на взятій ділянці її руху в умовах вітру і руху агрегату. **Висновки.** Ця методика досить проста, може конкурувати з методикою розрахунків, виконаних числовими методами, застосовуватись у визначенні точності таких розрахунків та в інтегруванні інших рівнянь, що не інтегруються в елементарних функціях.

*Ключові слова:* рівняння, нульове наближення, апроксимація, прийоми методу ітерацій, усереднення, уточнення, порівняння, збіг.

**Актуальність питання.** Рух добрив в умовах вітру і руху агрегату відбувається практично завжди. Однак розв'язки у квадратурах таких рівнянь одержано без урахування вітру та руху агрегату [2, 9]. Залежності руху матеріальної частинки, кинутої у вільний повітряний простір в умовах вітру і руху агрегату, потрібні для визначення в таких умовах ширини захвату машин з унесення добрив, засобів захисту рослин, поливу рослин тощо [10]. Тому ці дослідження є актуальними.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Усі відомі дослідження з цих питань

більше націлені на отримання диференціальних рівнянь такого руху і не стосуються розв'язків цих рівнянь у квадратурах. Тому розробка методів їх розв'язків потрібна як для теорії, так і для практики таких процесів. Такі рівняння та їх розв'язки подані в [1–7, 9, 10], а їх аналіз подається в [10]. Загалом ці рівняння не інтегруються в елементарних функціях, тому їх використання має певні складнощі.

**Мета досліджень.** Розробити високоточну методика наближеного інтегрування рівнянь руху частинки в заданих умовах і навести його приклад.

**Методика досліджень.** Застосовано апроксимацію в рівняннях членів  $V_0^{N-1}V_{ox}$ ,  $V_0^{N-1}V_{oy}$  і  $V_0^{N-1}V_{oz}$  поліномами 3-ї, 4-ї і т.д. степені в часі  $t$ . Перші значення коефіцієнтів цих поліномів знаходять з рівнянь нульового наближення, які наводяться у статті, а наступні — ітерацією, тобто інтегруванням рівнянь з цими поліномами зі щоразовим їх уточненням через усереднення попередніх та отриманих після інтегрування значень  $V_x$ ,  $V_y$  і  $V_z$  до їх збігу.

**Результати досліджень.** Нехай агрегат рухається по осі  $Ox$  зі швидкістю  $V_A$  (м/с). Розкидач з висоти  $h$  (м) під кутом  $\gamma$  до горизонтального поля викидає частинку зі швидкістю  $V_c$  (м/с) відносно себе, вектор якої на горизонтальній проекції направлений під кутом  $\alpha$  до його поздовжньої осі. Під кутом  $\theta$  до напрямку руху агрегату віє вітер зі швидкістю  $V_B$  (м/с) (рисунок). Тоді в нерухомій системі координат  $XYZ$  швидкість частинки по її осях дорівнюватиме відповідно:

$V_x = V_A + V_c \cos \gamma \cos \alpha$ ;  $V_y = V_c \cos \gamma \sin \alpha$ ;  
 $V_z = V_c \sin \gamma$ , а її абсолютна швидкість  $V$  у цій системі координат дорівнюватиме:

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ . Складові швидкості вітру по цих осях дорівнюватимуть:

$$V_{Bx} = V_B \cos \theta; \quad V_{By} = V_B \sin \theta; \quad V_{Bz} = 0,$$

а швидкості обтікання частинки повітрям відповідно дорівнюватимуть:

$$V_{Ox} = V_x \pm V_{Bx}; \quad V_{Oy} = V_y \mp V_{By}; \quad V_{Oz} = V_z.$$

У парних знаках «+» відповідає руху складової вітру на взятій осі проти руху по ній частинки, а знак «-» — за її рухом. Тоді абсолютна швидкість частинки відносно повітря дорівнюватиме:

$$V_0 = \sqrt{(V_x \pm V_{Bx})^2 + (V_y \mp V_{By})^2 + V_z^2},$$

а рівняння руху частинки по осях  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \dot{V}_{Ox} = -\frac{g}{\omega_0^N} V_0^{N-1} V_{Ox}; \\ \dot{V}_y &= \dot{V}_{Oy} = -\frac{g}{\omega_0^N} V_0^{N-1} V_{Oy}; \\ \dot{V}_z &= \dot{V}_{Oz} = -g - \frac{g}{\omega_0^N} V_0^{N-1} V_{Oz}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $N=1,0; 1,2; 1,5; 2,0$  — залежно від режиму обтікання частинки повітрям [9];

$\omega_0$  — швидкість витання частинки, м/с.

Розв'язок рівнянь типу (1) поданий в [9]. Він ґрунтується на прийомах методу ітерацій [8]. У ньому спочатку знаходять наближений розв'язок, одержаний, наприклад, методом суперпозиції. З його допомогою на взятому інтервалі  $t$ , який розбивають на 3, 4 і т.д. однакові проміжки, в їх точках знаходять значення  $V_0^{N-1}V_{Ox}$ ,  $V_0^{N-1}V_{Oy}$ ,  $V_0^{N-1}V_{Oz}$ , по яких проводять апроксимувальні поліноми 3-ї, 4-ї і т.д. степені від  $t$ . Якщо ці поліноми даватимуть значення  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  більші за фактичні, то після їх інтегрування в (1) ці значення зменшаться, а якщо менші — збільшаться. Усереднюючи щоразу попередні й отримані значення цих швидкостей у взятих точках та уточнюючи ці поліноми, ми автоматично рухаємося до їх точних значень. Останнє прискорює збіг результатів і запобігає нестійкості розв'язків. Підставивши в (1) значення змінних, маємо систему рівнянь, яка за відсутності руху агрегату і вітру переходить у рівняння балістики. Для нульового наближення приймемо, що в цьому разі  $V_0$  в (1) змінюється так, як і без урахування сил її ваги. Тоді для квадратичного, найбільш вживаного закону сили опору частинки ( $N=2$ ):

$$\dot{V}_0 = -\frac{g}{\omega_0^2} V_0^2, \text{ що дає: } V_0 = \frac{V_{0п}\omega_0^2}{gV_{0п}t + \omega_0^2}, \quad (2)$$

де  $V_{0п}$  — початкове значення  $V_0$ , м/с. Після підстановки (2) в (1) матимемо:

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \dot{V}_{Ox} = -\frac{gV_{0п}}{gV_{0п}t + \omega_0^2} V_{Ox}; \\ \dot{V}_y &= \dot{V}_{Oy} = -\frac{gV_{0п}}{gV_{0п}t + \omega_0^2} V_{Oy}; \\ \dot{V}_z &= \dot{V}_{Oz} = -g - \frac{gV_{0п}}{gV_{0п}t + \omega_0^2} V_z. \end{aligned} \quad (3)$$

З суперпозицією (1) інтегруються і дають [9]:

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= (V_x \pm V_{Bx}) = \frac{V_{0п}\omega_0^2}{gV_{0п}t + \omega_0^2}; \\ V_{Oy} &= (V_y \mp V_{By}) = \frac{V_{0п}\omega_0^2}{gV_{0п}t + \omega_0^2}; \\ V_z &= -gt + \frac{V_{0п}\omega_0^2}{gV_{0п}t + \omega_0^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $V_{0п}$ ,  $V_{0п}$ ,  $V_{0п}$  — початкові значення швидкостей  $V_{Ox}$ ,  $V_{Oy}$ ,  $V_{Oz}$ , м/с, з яких:

$$\begin{aligned} X - X_{\text{п}} \mp V_{\text{вх}} t &= \frac{V_{\text{охп}} \omega_0^2}{g V_{\text{т}}} \ln \left[ \frac{g V_{\text{оп}} t}{\omega^2} + 1 \right]; \\ Y &= Y_{\text{п}} \pm V_{\text{вг}} t + \frac{V_{\text{охп}} \omega_0^2}{g V_{\text{оп}}} \ln \left[ \frac{g V_{\text{оп}} t}{\omega_0^2} + 1 \right]; \\ Z &= Z_{\text{п}} - \frac{g t^2}{2} + \frac{V_{\text{озп}} \omega_0^2}{g V_{\text{оп}}} \ln \left[ \frac{g V_{\text{оп}} t}{\omega_0^2} + 1 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де  $V_{\text{озп}} = V_{\text{зп}}$ .

У подвійних знаках (5) «-» відповідають руху частинки проти складової вітру, а «+» — за нею. Цих залежностей достатньо для отримання нульового наближення руху добрив на висхідній ділянці траєкторії. У верхній її точці  $V_z=0$ , тому з останнього рівняння в (4) запишемо:

$$\begin{aligned} -g t_{\text{вис}} + \frac{V_{\text{озп}} \omega_0^2}{g V_{\text{оп}} t_{\text{вис}} + \omega_0^2} &= 0, \text{ звідки} \\ t_{\text{вис}} &= -\frac{\omega_0^2}{2g V_{\text{оп}}} + \frac{\omega_0}{g} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4V_{\text{оп}}^2} + \frac{V_{\text{озп}}}{V_{\text{оп}}}}, \end{aligned}$$

де  $t_{\text{вис}}$  — час руху частинки до найвищої точки траєкторії, с. Грубо ділимо  $t_{\text{вис}}$  на 3 рівні проміжки. Для  $V_0^{N-1} V_{\text{ох}}$  в їх точках  $t_{\text{п}}=0$ :  $t_1 \approx t_{\text{вис}} / 3$ ;  $t_2=2t_1$ ,  $t_3=3t_1$  маємо:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + a_3 t_1^3 &= V_{01}^{N-1} V_{\text{ох1}}; \\ a_0 + 2a_1 t_1 + 4a_2 t_1^2 + 8a_3 t_1^3 &= V_{02}^{N-1} V_{\text{ох2}}; \\ a_0 + 3a_1 t_1 + 9a_2 t_1^2 + 27a_3 t_1^3 &= V_{03}^{N-1} V_{\text{ох3}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поліном (11) проходить через 4 точки цих проміжків, в яких значення  $a_0=V_{\text{оп}}^{N-1} V_{\text{охп}}$  у початковій точці,  $V_{01}^{N-1} V_{\text{ох1}}$ ,  $V_{02}^{N-1} V_{\text{ох2}}$ ,  $V_{03}^{N-1} V_{\text{ох3}}$  — відповідно в кінці 1-го —  $t_1$ , 2-го —  $t_2$  і 3-го —  $t_3$  проміжків. Замінивши  $V_{01}^{N-1} V_{\text{ох1}} - a_0 = b_1$ ;  $V_{02}^{N-1} V_{\text{ох2}} - a_0 = b_2$ ;  $V_{03}^{N-1} V_{\text{ох3}} - a_0 = b_3$ , з (6) маємо:

$$\begin{aligned} a_1 t_1 &= (18b_1 + 2b_3 - 9b_2) / 6; \\ a_2 t_1^2 &= (4b_2 - b_3 - 5b_1) / 2; \\ a_3 t_1^3 &= (b_3 + 3b_1 - 3b_2) / 6. \end{aligned}$$

З них легко знайти  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , однак зручніше користуватись  $a_1 t_1$ ,  $a_2 t_1^2$ ,  $a_3 t_1^3$ .

Для  $V_0^{N-1} V_{\text{оу}}$  так само:  $V_0^{N-1} V_{\text{оу}} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$ . Тоді  $c_0 = V_{\text{оп}}^{N-1} V_{\text{оуп}}$  у початковій точці. Для  $t_1$ ,  $t_2 = 2t_1$ ;  $t_3 = 3t_1$ ;  $V_{01}^{N-1} V_{\text{оу1}} - c_0 = d_1$ ;  $V_{02}^{N-1} V_{\text{оу2}} - c_0 = d_2$ ;  $V_{03}^{N-1} V_{\text{оу3}} - c_0 = d_3$ ;  $c_1 t_1 = (18d_1 + 2d_3 - 9d_2) / 6$ ;

$$c_2 t_1^2 = (4d_2 - d_3 - 5d_1) / 2;$$

$$c_3 t_1^3 = (d_3 + 3d_1 - 3d_2) / 6.$$

Аналогічно для  $V_0^{N-1} V_{\text{оз}}$ :  $V_0^{N-1} V_{\text{оз}} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$ . Для  $t_1$ ,  $t_2=2t_1$ ;  $t_3=3t_1$ ;  $b_0 = V_{\text{оп}}^{N-1} V_{\text{озп}}$ ;  $V_{01}^{N-1} V_{\text{оз1}} - b_0 = j_1$ ;  $V_{02}^{N-1} V_{\text{оз2}} - b_0 = j_2$ ;  $V_{03}^{N-1} V_{\text{оз3}} - b_0 = j_3$ , звідки:

$$b_1 t_1 = (18j_1 + 2j_3 - 9j_2) / 6;$$

$$b_2 t_1^2 = (4j_2 - j_3 - 5j_1) / 2; \quad b_3 t_1^3 = (j_3 + 3j_1 - 3j_2) / 6.$$

Тоді з (5):

$$\dot{V}_x = -\frac{g}{\omega_0^N} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3);$$

$$\dot{V}_y = -\frac{g}{\omega_0^N} (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3);$$

$$\dot{V}_z = -g - \frac{g}{\omega_0^N} (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3),$$

які легко інтегруються і дають:

$$V_x = V_{\text{хп}} - \frac{g}{\omega_0^N} \left( a_0 + \frac{a_1 t}{2} + \frac{a_2 t^2}{3} + \frac{a_3 t^3}{4} \right) t;$$

$$V_y = V_{\text{yp}} - \frac{g}{\omega_0^N} \left( c_0 + \frac{c_1 t}{2} + \frac{c_2 t^2}{3} + \frac{c_3 t^3}{4} \right) t; \quad (7)$$

$$V_z = V_{\text{зп}} - g t - \frac{g}{\omega_0^N} \left( b_0 + \frac{b_1 t}{2} + \frac{b_2 t^2}{3} + \frac{b_3 t^3}{4} \right) t.$$

З (1, 3, 4) визначаємо наступні  $V_{\text{ох}}$ ,  $V_{\text{оу}}$ ,  $V_{\text{оз}}$  і  $V_0$  у точках  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , які щоразу усереднюємо діленням навпіл суми з попереднього й отриманого їх значень. Наприкінці розрахунків з (5) для  $t_k = k t_1$  (у взятих точках  $k=1, 2, 3$ , а поза ними  $k=t/t_1$  буде дробовим), маємо:

$$\begin{aligned} X_k &= X_{\text{п}} + V_{\text{хп}} k t_1 - \\ &= \frac{g}{\omega_0^N} \left( \frac{a_0}{2} + \frac{k a_1 t_1}{6} + \frac{k^2 a_2 t_1^2}{12} + \frac{k^3 a_3 t_1^3}{20} \right) k^2 t_1^2; \\ Y_k &= Y_{\text{п}} + V_{\text{yp}} k t_1 - \end{aligned}$$

$$= \frac{g}{\omega_0^N} \left( \frac{c_0}{2} + \frac{k c_1 t_1}{6} + \frac{k^2 c_2 t_1^2}{12} + \frac{k^3 c_3 t_1^3}{20} \right) k^2 t_1^2; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Z_k &= Z_{\text{п}} + V_{\text{зп}} k t_1 - \frac{g k^2 t_1^2}{2} - \\ &= \frac{g}{\omega_0^N} \left( \frac{c_0}{2} + \frac{k c_1 t_1}{6} + \frac{k^2 c_2 t_1^2}{12} + \frac{k^3 c_3 t_1^3}{20} \right) k^2 t_1^2. \end{aligned}$$

Для низхідної ділянки траєкторії у разі  $V_{\text{зп}}=0$  сила опору повітря в  $V_z$  в (9) завжди дорівнюватиме нулю. Тому для цієї ланки траєкторії як вихід приймаємо квадратичний від  $V_z$  закон опору повітря на всій ділянці. Тоді [9] для  $|V_z| \leq \omega_0$ ,  $N=2$ , запишемо:

$$\dot{V}_z = -g + \frac{g}{\omega_0^2} V_z^2, \text{ що рівнозначно:}$$

$$\left( -\frac{\omega_0^2}{g} \right) \frac{dV_z}{dt} = \omega_0^2 - V_z^2. \quad (9)$$

При  $t=0$ ,  $V_z=V_{zп}$  з (14) отримуємо:

$$t = \frac{\omega_0}{2g} \left[ \ln \frac{\omega_0 + V_{zп}}{\omega_0 - V_{zп}} - \ln \frac{\omega_0 + V_z}{\omega_0 - V_z} \right]. \quad (10)$$

Значення  $V_z$  є від'ємними величинами, тому  $t$  в останньому виразі завжди будуть додатними і зростатимуть за руху  $|V_z|$  до  $\omega_0$ .

З нього одержуємо [9]:

$$V_z = \omega_0 \frac{(\omega_0 + V_{zп}) - (\omega_0 - V_{zп}) \exp\left(\frac{2g}{\omega_0} t\right)}{(\omega_0 + V_{zп}) + (\omega_0 - V_{zп}) \exp\left(\frac{2g}{\omega_0} t\right)}; \quad (11)$$

$$Z = Z_{п} - \frac{\omega_0^2}{2g} \left[ \ln \frac{(\omega_0^2 - V_{zп}^2)}{(\omega_0^2 - V_z^2)} \right].$$

Зі зростанням  $|V_z|$  дріб під логарифмом збільшується, а  $Z$  спадає. Якщо з виразу (1) визначити  $V_{zк}$  при  $Z_k=0$  і підставити його у вираз  $t$ , можна визначити час  $t_{низ}$  руху частинки до падіння на поверхню поля.

Звідки:

$$V_{zк} = -\sqrt{\omega_0^2 - (\omega_0^2 - V_{zп}^2) \exp\left(-\frac{2gZ_{п}}{\omega_0^2}\right)}; \quad (12)$$

$$t_{низ} = \frac{\omega_0}{2g} \left[ \ln \frac{\omega_0 + V_{zп}}{\omega_0 - V_{zп}} - \ln \frac{\omega_0 + V_{zк}}{\omega_0 - V_{zк}} \right].$$

Для  $|V_{zп}| \geq \omega_0$  (9) матиме розв'язки, які подані в [9].

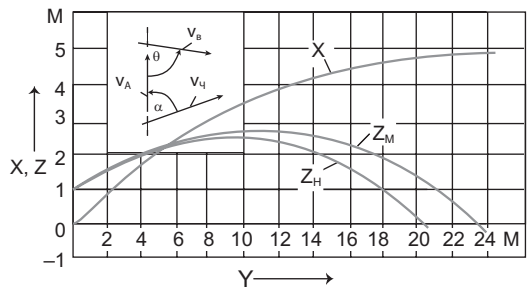
За руху частинки проти вітру по осі  $Ox$  можлива зміна значень  $V_x$  з додатніх на від'ємні. У цій точці  $V_{ox}=V_{vx}$ ,  $V_x=0$ , а значення  $t$  дорівнюють:

$$t_{3x} = \frac{(V_{oxп} - V_{vx})\omega_0^2}{V_{оп} V_{vx} g}.$$

За цих самих умов по осі  $Oy$  змінює знак і  $V_y$ , це відбувається в точці  $t_{3y} = \frac{(V_{oyп} - V_{vy})\omega_0^2}{V_{оп} V_{vy} g}$ .

**Приклад.** На стаціонарі розкидач з висоти  $h=1$  м кидає добрива ( $\omega_0 = 8$  м/с) зі швидкістю  $V_ч=40$  м/с під кутом  $\alpha = 70^\circ$  (на горизонтальній проекції) до своєї поздовжньої осі і під кутом  $\gamma = 15^\circ$  до горизонту (рисунок). Під час роботи він рухається зі швидкістю  $V_A=3$  м/с. Під кутом  $\theta = 80^\circ$  до напрямку його руху віє вітер зі швидкістю  $V_B=10$  м/с (рисунок). Знайти траєкторію руху їх частинок. З (1, 3) маємо:  $V_{xп}=16,3$  м/с;  $V_{yп}=36,3$  м/с;  $V_{zп}=10,352$  м/с;  $V_{Bx}=1,736$  м/с;  $V_{By}=9,848$  м/с;  $V_{Bz}=0$ ;  $V_{oxп}=18,036$  м/с;  $V_{oyп}=26,452$  м/с;  $V_{ozп}=V_{zп}=10,352$  м/с,  $V_{оп}=33,646$  м/с. Підставивши їх у (10), знаходимо  $t_{вис}=0,3627$  с, ділимо його на 3 рівні проміжки. Приблизно

беремо по  $t_1=0,14$  с кожен. Далі з (9) для  $t_п=0$ ;  $t_1=14$  с,  $t_2=2t_1$ ;  $t_3=3t_1$  маємо:  $V_{ox1}=10,475$  м/с;  $V_{ox2}=7,381$  м/с;  $V_{ox3}=5,698$  м/с;  $V_{oy1}=15,365$  м/с;  $V_{oy2}=10,827$  м/с;  $V_{oy3}=8,358$  м/с;  $V_{oz1}=4,638137$  м/с;  $V_{oz2}=1,489$  м/с;  $V_{oz3}=-0,85$  м/с;  $V_{o1}=19,166$  м/с;  $V_{o2}=13,188$  м/с;  $V_{o3}=10,15$  м/с нульового наближення. З них:  $V_{оп}V_{oxп}=a_0=606,772$  (розмірності опускаємо);  $V_{оп}V_{oyп}=c_0=890,0$ ;  $V_{оп}V_{ozп}=b_0=348,3$ ;  $V_{o1}V_{ox1}=200,764$ ;  $V_{o2}V_{ox2}=97,2$ ;  $V_{o3}V_{ox3}=7,835$ ;  $V_{o1}V_{oy1}=294,4856$ ;  $V_{o2}V_{oy2}=142,786$ ;  $V_{o3}V_{oy3}=84,834$ ;  $V_{o1}V_{oz1}=88,93$ ;  $V_{o2}V_{oz2}=19,65$ ;  $V_{o3}V_{oz3}=-8,637$ ;  $b_1=-406,01$ ;  $b_2=-509,572$ ;  $b_3=-548,937$ ;  $d_1=-595,51$ ;  $d_2=-747,2$ ;  $d_3=-805,166$ ;  $j_1=-259,37$ ;  $j_2=-328,65$ ;  $j_3=-356,937$ . На їх основі:  $a_1t_1=-636,67$ ;  $a_2t_1^2=270,35$ ;  $a_3t_1^3=-39,707$ ;  $c_1t_1=-934,12$ ;  $c_2t_1^2=397,0$ ;  $c_3t_1^3=-58,355$ ;  $b_1t_1=-404,135$ ;  $b_2t_1^2=169,6$ ;  $b_3t_1^3=-24,86$ . При  $N=2$  знаходимо:  $V_{x1}=8,39$ ;  $V_{x2}=5,52$ ;  $V_{x3}=3,76$ ;  $V_{y1}=24,697$ ;  $V_{y2}=20,48573$ ;  $V_{y3}=17,893$ ;  $V_{z1}=4,7608$ ;  $V_{z2}=2,43$ ;  $V_{z3}=0,882$ ;  $V_{ox1}=10,176$ ;  $V_{ox2}=7,305$ ;  $V_{ox3}=5,546$ ;  $V_{oy1}=14,849$ ;  $V_{oy2}=10,63773$ ;  $V_{oy3}=8,045$ ;  $V_{oz1}=4,7608$ ;  $V_{oz2}=2,43$ ;  $V_{oz3}=0,882$ . Усереднення дає:  $V_{ox1}=10,3255$ ;  $V_{ox2}=7,343$ ;  $V_{ox3}=5,622$ ;  $V_{oy1}=15,107$ ;  $V_{oy2}=10,732$ ;  $V_{oy3}=8,2$ ;  $V_{oz1}=4,7$ ;  $V_{oz2}=1,95$ ;  $V_{oz3}=0,016$ . Після 3-х таких наближень отримуємо:  $V_{x1}=8,53$ ;  $V_{x2}=5,72$ ;  $V_{x3}=3,9$ ;  $V_{y1}=24,793$ ;  $V_{y2}=20,783$ ;  $V_{y3}=18,13$ ;  $V_{z1}=4,788$ ;  $V_{z2}=2,313$ ;  $V_{z3}=0,449$ . Для досягнення частинкою верхньої точки її траєкторії додаємо час її руху  $\Delta t = V_{z3}/g = 0,449/9,81 = 0,04577$  с, до  $t_4=t_3+0,04577=0,4657$  с. У ній:  $k_4=t_4/t_1=3,3264$ ,  $V_{x4}=3,656$ ;  $V_{y4}=17,8$ ;  $V_{z4}=0,02$ ;  $X_1=1,63$ ;  $X_2=2,61$ ;  $X_3=3,247$ ;  $X_4=3,45$ ;  $Y_1=4,134$ ;  $Y_2=7,297$ ;  $Y_3=10,0$ ;  $Y_4=10,817$ ;  $Z_1=1,993$ ;  $Z_2=2,505$ ;  $Z_3=2,67$ ;  $Z_4=2,677$ , які є початковими для низхідної ланки траєкторії. Тоді з (10, 17) за падіння на ґрунт  $V_{yк}=-6,0$  м/с;



Отримані графічні залежності  $X(Y)$  і  $Z(Y)$  із заставкою-схемою векторів  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_ч$  ( $Z_M$  — за методикою,  $Z_n$  — у нульовому наближенні)

$t_{\text{чиз}}=0,793$  с, грубо розбиваємо  $t$  на 3 рівні ділянки по 0,3 с кожна. Зробивши 3 наближення, одержимо:  $V_{x1}=1,96776$ ;  $V_{x2}=1,0141$ ;  $V_{x3}=0,3123$ ;  $V_{y1}=15,299$ ;  $V_{y2}=13,877$ ;  $V_{y3}=13,877$ ;  $V_{z1}=12,8158$ ;  $V_{z2}=-2,481$ ;  $V_{z3}=-4,35$ ;  $V_{z4}=-5,781$ ;  $X_1=4,402$ ;  $X_2=4,702$ ;  $X_3=4,895$ ;  $Y_1=15,738$ ;  $Y_2=20,1$ ;  $Y_3=24,09$ ;

$Z_1=2,3995$ ;  $Z_2=1,25$ ;  $Z_3=-0,28$ . За цими значеннями будемо графіки руху частинки (рисунок).

З них видно, як боковий вітер вигинає траєкторію руху частинки від осі ОХ та істотно збільшує дальність руху частинки по осі ОУ порівняно з одержаною в [9].

## Висновки

Основними операціями за виведення рівнянь руху матеріальної частинки, кинутої у вільний повітряний простір в умовах вітру та руху агрегату, є почергове визначення складових  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  абсолютної швидкості руху частинки  $V$  по осях нерухомої системи координат  $XYZ$ ; складових  $V_{Vx}$ ,  $V_{Vy}$ ,  $V_{Vz}$  швидкості вітру  $V_B$  по цих осях і складових  $V_{Ox}$ ,  $V_{Oy}$ ,  $V_{Oz}$  відносно швидкості  $V_O$  руху частинки відносно повітря по цих осях. Після цього рівняння руху частинки в таких умовах набувають вигляду:

$$\dot{V}_x = \dot{V}_{Ox} = -\frac{g}{\omega_0^N} V_O^{N-1} V_{Ox};$$

$$\dot{V}_y = \dot{V}_{Oy} = -\frac{g}{\omega_0^N} V_O^{N-1} V_{Oy};$$

$$\dot{V}_z = \dot{V}_{Oz} = -g - \frac{g}{\omega_0^N} V_O^{N-1} V_{Oz},$$

які аналітично ідентичні рівнянням балістики [9] і розв'язуються ідентично їм. Найпростіший метод їх розв'язання наведено в цій статті, а також в [9].

## Бібліографія

1. Адамчук В.В. Теория центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений/ В.В. Адамчук. — К.: Аграр. наука, 2010. — 178 с.
2. Волков В.А. Приближенный расчет движения тел в сопротивляющихся средах/В.А. Волков//Труды ВИСХОМ. — Вып. 24. — М., 1959. — 17 с.
3. Заика П.М. Свободное движение материальной точки в спокойной изотропной газообразной среде/ П.М. Заика, В.И. Мельник, А.И. Аникеев//Динамика и прочность машин: Вестник НТУ «ХПИ». — Х., 2001. — Вып. 25. — С. 153–164.
4. Заїка П.М. Теорія сільськогосподарських машин/П.М. Заїка//Машини для приготування і внесення добрив: Т. 1. Ч. 3. — Х.: Око, 2002. — 342 с.
5. Ловейкін В.С. Дослідження дальності польоту частинок твердих мінеральних добрив шляхом моделювання/В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, А.І. Дитюк// Конструювання, виробництво та експлуатація с.-г. машин. — Кіровоград: КНТУ, 2009. — Вип. 39. — С. 82–90.
6. Ольшанский В.П. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки/В.П. Ольшанский, С.И. Ольшанский. — Х.: Изд. Савчук А.О., 2013. — 204 с.
7. Ольшанский В.П. Динамика материальной точки в подвижной воздушной среде/В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. — Х.: НТУ «ХПИ», 2012. — Вип. 67. — С. 84–89.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. — Т. 2. — М.: Наука, 1978. — 310 с.
9. Смаглий В.І. Рух матеріальної частинки, кинутої у вільний повітряний простір//Вісн. аграр. науки. — 2014. — № 9. — С. 39–43.
10. Тищенко Л.М. Задачі балістики матеріальної точки в моделях розсіювання добрив/Л.М. Тищенко, В.П. Ольшанський та ін.//Механізація та електрифікація сільського господарства: зб. ННЦ «ІМЕСГ». Вип. 98. — К., 2013. — С. 174–182.

Надійшла 10.09.2014.