УДК 631.816.631.333

В.І. Смаглій,
кандидат технічних наук
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»

ВИВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ ПО ПЛОЩИНІ, НАХИЛЕНІЙ ДО ВЕРТИКАЛЬНОЇ ОСІ ОБЕРТАННЯ

Мета. ***Вивести рівняння руху матеріальної частинки по шорсткій площині, встановленій під кутом до вертикальної осі свого обертання.*** **Методи.** ***Через рівняння Лагранжа другого роду отримано загальні рівняння руху частинки по площині, нахиленій до вертикальної осі обертання, застосовано рівняння переходу до рухомої системи координат, яка обертається разом із площиною.*** **Результати.** ***Розроблено фізичну модель руху частинки та виведено рівняння руху матеріальної частинки по шорсткій площині, установленій під кутом до вертикальної осі свого обертання.*** **Висновки.** ***Отримані рівняння переходять у відомі рівняння руху частинки по шорсткій горизонтальній площині, а також по шорсткій вертикальній площині при вертикальних осях їх обертання, що підтверджує правильність отриманих рівнянь для описування руху частинок добрив по нижній полиці лопатки відцентрового розкидача туків.***

Ключові слова: *рівняння Лагранжа другого роду, рухома система координат, обертання, сили реакції, тертя, маса, прискорення, похідна, підстановка, перетворення, аналіз.*

Актуальність питання. Рівняння руху частинки по площині, нахиленій під кутом до вертикальної осі обертання, необхідні для визначення руху матеріальної частинки по нижній полиці лопатки загального положення відцентрового розкидача туків [1 – 3, 6 – 9].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Спроба описати рух матеріальної частинки по площині, розташованій під кутом до вертикальної осі свого обертання, робилася вже давно [2]. Однак з посиланням на [10] наведені в [2] без виведення рівняння руху частинки по ідеально гладенькій площині не сприймаються користувачем і є непридатними для практичного використання. Тому ця задача й досі є нерозв'язаною.

Мета досліджень — розробити методику виведення, фізичну модель руху частинки та вивести рівняння руху частинки по площині, нахиленій під кутом до вертикальної осі обертання і перевірити правильність отриманих результатів.

Методи досліджень. Через рівняння Лагранжа другого роду отримано загальні рівняння руху частинки по площині, встановленій під кутом до вертикальної осі обертання, застосовано рівняння переходу до рухомої системи координат, яка обертається разом із площиною.

Результати досліджень. На відміну від перпендикулярної до осі обертання плоскої поверхні або конуса, вісь симетрії якого збігається з віссю обертання [7], розташування площини під кутом до вертикальної осі обертання змінює як параметри руху по ній частинки, так і динаміку сил, які діють на неї.

Для уникнення ускладнень під час визначення кутів нахилу векторів відносної та абсолютної швидкостей руху частинки до відповідних осей координат слід вибирати рухому декартову систему координат,

вісь OX якої лежить у цій самій площині і жорстко пов'язана з нею. В ній визначення цих кутів разом з визначенням кутів нахилу нормальної реакції поверхні N і сили тертя fN до осей координат значно спрощується. Для інерційної нерухомої декартової системи координат рівняння Лагранжа другого роду мають вигляд [2]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_{x1};$$

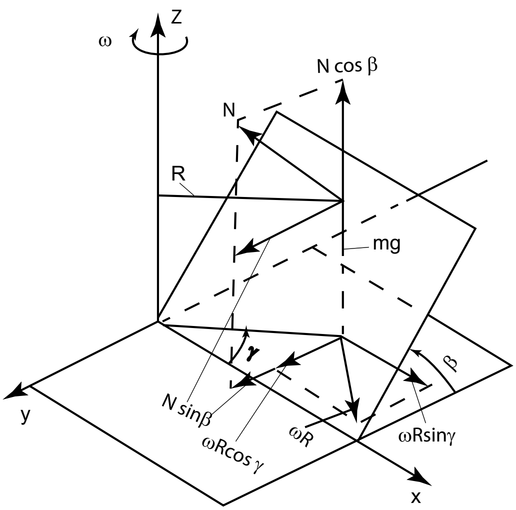
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}-\frac{\partial T}{\partial y_1}=Q_{y1}; \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1}-\frac{\partial T}{\partial z_1}=Q_{z1};\ T=\frac{m}{2}[(\dot{x}_1)^2+(\dot{y}_1)^2+(\dot{z}_1)^2],$$

де Q_{x1}, Q_{y1}, Q_{z1} — живі [2], або узагальнені [3, 5] сили, які діють по осях X_1, Y_1, Z_1. Підстановка похідних в (1) дає систему рівнянь Ньютона:

$$m\ddot{x}=Q_{x1};\ m\ddot{y}_1=Q_{y1};\ m\ddot{z}_1=Q_{z1}, \qquad (2)$$

які відповідають принципу незалежності рухів. Кути нахилу нормальної реакції площини N і сили тертя fN до осей координат, які є тут активними силами, що розганяють частинку, показані на рисунку. Річ у тім, що сама площина під частинкою обертається з кутовою швидкістю ω (1/c). Тому перехід



Виведення рівнянь руху матеріальної частинки по площині, нахиленій під кутом до вертикальної осі свого обертання

до системи координат, яка обертається, тут є і об'єктивно необхідним. Хай вісь OX лежить на лінії перетину взятої площини з горизонтальною площиною, OY — горизонтально перпендикулярно осі OX, а OZ — вертикально по осі обертання площини. Частинка перебуває на площині в точці, радіус якої відносно осі обертання дорівнює $R=\sqrt{x^2+y^2}$. Він лежить під кутом γ до площини XOZ та осі OX (рисунок). Тоді горизонтальна швидкість точки на площині під частинкою, що дорівнює переносній швидкості частинки $V_\varphi=R\omega$, дає по осі OX складову $V_{\varphi X}=R\omega\sin\gamma$, а по OY — $V_{\varphi Y}=R\omega\cos\gamma$. Водночас частинка рухається в нерухомому просторі зі швидкостями, які по осях відповідно дорівнюватимуть V_{AX},V_{AY},V_{Az}. Тоді швидкість частинки відносно площини по цих осях дорівнюватиме: $V_X=-R\omega\sin\gamma+V_{AX}$; $V_Y=-R\omega\cos\gamma+V_{AY}$; $V_Z=V_{AZ}$. Оскільки вона рухається по площині, то $Z=-Y\mathrm{tg}\beta$; $V_Z=-V_Y\mathrm{tg}\beta$; $\dot{V}_Z=-\dot{V}_Y\,\mathrm{tg}\beta$. З рисунка видно, що $\mathrm{tg}\gamma=-y/x$.

Оскільки наша система координат жорстко пов'язана з площиною, що обертається, отримані значення параметрів руху частинки в цих координатах будуть параметрами руху частинки відносно цієї площини. При переході від нерухомої системи в рухому систему координат, що обертається за часовою стрілкою (рисунок), справедливі залежності, які легко виводяться з геометричних міркувань [3]:

$$x_1=x\cos\varphi-y\sin\varphi;\ \ y_1=x\sin\varphi+y\cos\varphi; \qquad (3)$$
$$z_1=z.$$

Аналогічно для динамічних параметрів [3]:

$$Q_{X1}=Q_X\cos\varphi-Q_Y\sin\varphi;$$
$$Q_{Y1}=Q_X\sin\varphi+Q_Y\cos\varphi; \qquad (4)$$
$$Q_{Z1}=Q_Z,$$

де $\varphi=\omega t$ — кут повороту площини в просторі, радіан; ω — кутова швидкість обертання площини в просторі, 1/c; Q_X,Q_Y,Q_Z — значення узагальнених, або живих сил в рухомій системі координат; x, y, z — значення відповідних координат точки в рухомій системі координат.

Двічі диференціюючи вирази (3) для x_1 і y_1 за часом t, отримуємо:

$$\dot{x}_1=\dot{x}\cos\varphi-x\omega\sin\varphi-\dot{y}\sin\varphi-y\omega\cos\varphi;$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\omega\sin\varphi - \dot{x}\omega\sin\varphi -$$
$$- x\omega^2\cos\varphi - \ddot{y}\sin\varphi - \dot{y}\omega\cos\varphi -$$
$$- \dot{y}\omega\cos\varphi + y\omega^2\sin\varphi;$$

$$\dot{y}_1 = \dot{x}\sin\varphi + x\omega\cos\varphi + \dot{y}\cos\varphi - y\omega\sin\varphi;$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{x}\sin\varphi + \dot{x}\omega\cos\varphi + \dot{x}\omega\cos\varphi -$$
$$- x\omega^2\sin\varphi + \ddot{y}\cos\varphi - \dot{y}\omega\sin\varphi -$$
$$- \dot{y}\omega\sin\varphi - y\omega^2\cos\varphi.$$

Зведення виразів перед $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ з урахуванням (4) дає:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 = (\ddot{x} - x\omega^2 - 2\dot{y}\omega)\cos\varphi - \\ &-(\ddot{y} - y\omega^2 + 2\dot{x}\omega)\sin\varphi = \\ &= (1/m)[Q_X\cos\varphi - Q_Y\sin\varphi]; \\ &\ddot{y}_1 = (\ddot{x} - x\omega^2 - 2\dot{y}\omega)\sin\varphi + \\ &+(\ddot{y} - y\omega^2 + 2\dot{x}\omega)\cos\varphi = \\ &= (1/m)[Q_X\sin\varphi + Q_Y\cos\varphi]. \end{aligned} \tag{5}$$

Розв’язуючи (5) відносно $(1/m)Q_X$ і $(1/m)Q_Y$, отримуємо:

$$\begin{aligned} &(1/m)Q_X = \ddot{x} - x\omega^2 - 2\dot{y}\omega; \\ &(1/m)Q_Y = \ddot{y} - y\omega^2 + 2\dot{x}\omega. \end{aligned} \tag{6}$$

Тоді з рисунка запишемо:

$$\begin{aligned} &Q_X = -Nf\frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}; \\ &Q_Y = N\sin\beta - Nf\frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}; \\ &Q_Z = N\cos\beta - mg - Nf\frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Після підстановки (7) у (6) маємо рівняння руху частинки в рухомій системі координат XYZ у вигляді:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - x\omega^2 - 2\dot{y}\omega = -Nf\frac{\dot{x}}{m\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}; \\ &\ddot{y} - y\omega^2 + 2\dot{x}\omega = \frac{1}{m}N\sin\beta - \\ &-Nf\frac{\dot{y}}{m\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}; \\ &\ddot{z} = \frac{1}{m}N\cos\beta - g - \frac{1}{m}Nf\frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}; \\ &\ddot{y}\,\mathrm{tg}\beta = -\ddot{z}. \end{aligned} \tag{8}$$

Отже, у нас є 4 рівняння з 4-ма невідомими, а саме: $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ і N, з яких легко знаходимо:

$$\frac{N}{m} = g\cos\beta + (2\omega\dot{x} - y\omega^2)\sin\beta. \tag{9}$$

Підстановка (9) у (8) дає рівняння руху матеріальної частинки по шорсткій площині, встановленій під кутом до осі обертання:

$$\ddot{x} = x\omega^2 + 2\dot{y}\omega - \frac{[g\cos\beta + (2\omega\dot{x} - y\omega^2)\sin\beta]f\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}};$$

$$\ddot{y} = y\omega^2 - 2\dot{x}\omega + [\sin\beta - \frac{f\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}];$$
$$[g\cos\beta + (2\omega\dot{x} - y\omega^2)\sin\beta];$$

$$\ddot{z} = [\cos\beta - g - \frac{f\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}]\times$$
$$\times[g\cos\beta + (2\omega\dot{x} - y\omega^2)\sin\beta].$$

Слід зауважити, що початковими умовами в одержаній системі рівнянь будуть початкові значення відносних швидкостей руху частинки відносно площини, визначення яких було подано вище. Особливістю (9) є те, що при $\beta = 0$, N=g, а (8) переходить в систему рівнянь, одержану в [7] для горизонтального диска з вертикальною віссю обертання. При $\beta = \pi/2 = 90^0$; $\sin\beta = 1$; $\cos\beta = 0$; y = 0; $N = 2\omega\dot{x}$, а (8) перетворюється в систему рівнянь руху частинки по вертикальній боковій полиці радіальної лопатки з вертикальною віссю обертання, які подані в роботі [6]. При f = 0 отримані рівняння переходять у систему, подану для цього випадку в роботі [2]. Усе це ще раз підтверджує правильність методики виведення рівнянь та їх придатність для відповідних практичних розрахунків.

При зворотному обертанні площини або її розташуванні по інший бік від осі OZ, ніж це показано на рисунку, залежності (3) і (4) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\varphi + y\sin\varphi; \\ Q_{x1} &= Q_x\cos\varphi + Q_y\sin\varphi; \\ y_1 &= y\cos\varphi - x\sin\varphi; \\ Q_{y1} &= Q_y\cos\varphi - Q_x\sin\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

Після двох диференціювань рівнянь x_1 і y_1 за часом t та зведення членів перед sin φ і cod φ з урахуванням (1) і (10), одержимо:

$$(\ddot{x} - x\omega^2 + 2\dot{y}\omega)\cos\varphi + (\ddot{y} - y\omega^2 - 2\dot{x}\omega)\sin\varphi =$$
$$= (1/m)(Q_x\cos\varphi + Q_y\sin\varphi);$$
$$(\ddot{y} - y\omega^2 - 2\dot{x}\omega)\cos\varphi - (\ddot{x} - x\omega^2 + 2\dot{y}\omega)\sin\varphi =$$
$$= (1/m)(Q_y\cos\varphi - Q_x\sin\varphi).$$

Розв'язуючи останні вирази відносно Q_x і Q_y, знаходимо:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - x\omega^2 + 2\dot{y}\omega = (1/m)Q_x; \\ &\ddot{y} - y\omega^2 - 2\dot{x}\omega = (1/m)Q_y;\ \ddot{z} = (1/m)Q_z. \end{aligned} \tag{11}$$

Оскільки з рисунка значення

$$Q_X = -Nf\frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}};$$

$$Q_Y = N\sin\beta - Nf\frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}};$$

$$Q_Z = N\cos\beta - mg - Nf\frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}},$$ після

підстановки цих значень в (11) одержимо:

$$\ddot{x} - x\omega^2 + 2\dot{y}\omega = \frac{1}{m}\left(-Nf\frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}\right);$$

$$\ddot{y} - y\omega^2 - 2\dot{x}\omega =$$
$$= \frac{1}{m}\left(N\sin\beta - Nf\frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}\right); \tag{12}$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}\left(N\cos\beta - mg - Nf\frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}\right);$$

$$\ddot{y}\,tg\beta = -\ddot{z}.$$

Ці рівняння містять 4 невідомих: $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ і N. Помноживши друге рівняння на tg β, з урахуванням 4-го з них, маємо:

$$-\ddot{z} - (y\omega^2 + 2\dot{x}\omega)tg\beta =$$
$$= \frac{1}{m}\left(N\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} + Nf\frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}\right),$$

додаючи до якого ліві і праві частини третього рівняння, одержуємо:

$$-(y\omega^2 + 2\dot{x}\omega)tg\beta = \frac{1}{m}\left(N\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} + N\cos\beta\right) - g,$$

з якого знаходимо:

$$\frac{1}{m}N = g\cos\beta - (y\omega^2 + 2\dot{x}\omega)\sin\beta,$$

яке відрізняється від (9) знаками. Його підстановка в (12) дає розрахункову систему рівнянь для цього випадку. При N = 0; $g = (y\omega^2 + 2\dot{x}\omega)tg\beta$. При цьому частинка не буде опиратися на площину, а вільно падатиме під дією сил гравітації. В цей час площина, тікаючи від частинки, дає їй простір для її вільного руху.

Висновки

Для одержання системи рівнянь руху матеріальної частинки по шорсткій поверхні, встановленій під кутом до осі свого обертання, слід перейти до рухомої декартової системи координат, яка обертається, з урахуванням перетворень (3, 4) та (10). Значення прискорень матеріальної частинки у цьому разі слід визначати через подвійне диференціювання виразів типу (3, 10).

Узагальненими, або живими силами тут виступають нормальна реакція цієї площини і сила тертя по ній взятої частинки. Перехід одержаних рівнянь руху частинки по цій площині в такі самі рівняння для горизонтальної площини, а також для вертикальної площини з вертикальною віссю обертання, що лежить у цій площині, підтверджує правильність методики їх виведення та придатність їх для розрахунків параметрів руху частинки добрив по нижній полиці лопатки відцентрового розкидача туків.

Бібліографія

1. *Адамчук В.В.* Механіко-технологічні і технічні основи підвищення ефективності внесення твердих мінеральних добрив та хіммеліорантів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук. — К., 2006. — 26 с.

2. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. — К.: Изд-во УАСХН, 1960. — 283 с.

3. *Геронимус Я.Л.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1973. — С. 110.

4. *Заїка П.М.* Теорія сільськогосподарських машин/ П.М. Заїка//Машини для приготування і внесення добрив. — Х.: Око, 2002. — Т. 1. — Ч. 3. — 342 с.

5. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. — К.: Техніка, 2004. — 510 с.

6. *Смаглій В.І.* Перевірка розв'язків рівнянь руху матеріальної частинки по лопатці, що обертається// Вісн. аграр. науки. — 2014. — № 3. — С. 50–54.

7. *Смаглій В.І.* Рух матеріальної частинки по шорстких дисках//Наук. вісн. НУБіП України. — Вип. 185. — Ч. 1. — К.: НУБіП, 2013. — С. 117–126.

8. *Смаглій В.І.* Рух матеріальної частинки по лопатці при нахилі осі її обертання//Вісн. аграр. науки. — 2012. — № 7. — С. 50–53.

9. *Хоменко М.С.* Исследование технологического процесса рассева минеральных удобрений центробежными аппаратами: дисс. на соиск. уч. степени канд. техн. наук. — Челябинск, 1960. — 271 с.

10. *Appell Paul.* Traite de mechanigue rationalle. — Париж, 1991. — С. 484, 490.

Надійшла 5.05.2015.