УДК 629.78

В. Н. Спиридонов, кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики
и компьютерных технологий Днепропетровской
государственной финансовой академии

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННОЙ СТРУКТУРОЙ

У статті розглядається постановка задачі моделювання і математична модель одного з класів складних систем – дискретних динамічних систем з постійною структурою. Формалізація постановки задачі моделювання – це перший етап і основа для успішної розробки математичної моделі та побудови моделюючого алгоритму об'єкта чи системи.

В статье рассматривается постановка задачи моделирования и математическая модель одного из классов сложных систем – дискретных динамических систем с постоянной структурой. Формализация постановки задачи моделирования является первым этапом и основой для успешной разработки математической модели и построения моделирующего алгоритма объекта или системы.

In article statement of modeling definition problem and mathematical model of one of classes of complex systems – discrete dynamic systems with constant structure is considered. Formalization of modeling definition problem is the first stage and a basis for successful working out of mathematical model and construction of modeling algorithm of object or system.

Ключевые слова. Задача прогноза состояния, моделирование сложных систем, математическая модель системы с постоянной структурой.

Введение. Эффективное исследование сложных систем (объектов) возможно лишь в том случае, если мы располагаем математическим описанием (математической моделью) процесса функционирования системы. "Сложность реальных систем не позволяет для них построить "абсолютно" адекватные математические модели. Математическая модель описывает некоторый упрощенный процесс, в котором представлены лишь основные явления, входящие в реальный процесс, и лишь основные факторы, действующие на реальную систему, причем все они имитируются соответствующими формальными схемами, удобными с аналитической точки зрения и в вычислительном отношении" [1]. Какие явления считать основными – существенно зависит от назначения модели. В данной статье рассматривается постановка задачи моделирования одного из классов сложных систем – дискретных динамических систем с постоянной структурой. Математическая модель должна описывать процесс управления системой в пространстве состояний.

При моделировании сложных систем и объектов возникает проблема размерности модели. Использование известных методов моделирования, базирующихся на описании переходов системы в пространстве из одного состояния в другое, является неэффективным или вообще неприменимым при моделировании сложных систем, когда пространство состояний может достигать астрономических величин. К этим методам можно отнести описание модели ориентированным графом [2], сетью Петри [3, 4] или конечным автоматом [5].

Теория систем предлагает целостный подход к рассмотрению процесса функционирования широкого класса систем, наиболее удачно сформулированных в работе [6]:

1) система функционирует во времени, в каждый момент времени система находится в одном из возможных состояний;

2) на вход системы могут поступать входные сигналы;

3) система способна выдавать выходные сигналы;

4) состояние системы в данный момент времени определяется предыдущим состоянием и входными сигналами, поступившими в данный момент времени и ранее;

5) выходной сигнал в данный момент времени определяется состояниями системы и входными сигналами, относящимися к данному и предшествующему моментам времени.

“Первое из перечисленных предположений отражает динамический характер процесса функционирования системы в пространстве и времени, подчеркивает, что процесс функционирования системы протекает как последовательная смена состояний системы под действием внешних и внутренних причин. Второе и третье – описывает взаимодействие с внешней средой. Четвертое и пятое предполагает два важных аспекта, связанных с определением реакции систем на внутренние факторы и воздействия внешней среды. С одной стороны, здесь учитывается то обстоятельство, что многим явлениям и процессам свойственно последействие, вследствие которого тенденции, определяющие поведение системы в будущем, зависят не только от того, в каком состоянии находится система в настоящий момент времени. С другой стороны, отражается принцип физической реализуемости: система не реагирует в данный момент времени на “будущие” факторы и воздействия внешней среды” [6].

Постановка задачи. Приведенные положения являются общими при рассмотрении процесса функционирования любой сложной системы. Теория систем предлагает и метод описания переходов системы в пространстве состояний с помощью переходной функции. Однако, как правило, такая постановка делается лишь в общем виде, как, например, в работе [7], в которой предлагалось описать спутниковую систему переходной функцией состояния. Вопрос о том, что же представляет собой переходная функция такой системы при разнообразии входящих в нее систем и элементов, в работе не рассматривался.

При рассмотрении конкретной системы или технического объекта необходимо, прежде всего, выполнить формализацию, то есть определить их особенности как объекта моделирования. В статье рассматривается задача построения математической модели технического объекта со следующими особенностями моделирования.

1. Технический объект является сложной системой, то есть состоит из приборов, узлов, блоков, выполняющих различные функции, функционирующих в различных режимах работы и выполненных с использованием различных физических принципов. Далее будем использовать термины теории систем “элемент” и “подсистема”, соответствующие тому, что в формализованной схеме системы элемент выступает как объект, не подлежащий при данном рассмотрении системы дальнейшему разбиению на части, а подсистема выступает как совокупность элементов. Абстрагируясь от физической природы элементов, их можно рассматривать как “черные ящики”. Такое представление отражает тот факт, что оператору при управлении данным техническим объектом необязательно знать конструкцию его элементов, их электрическую схему и т. п. Оператору достаточно знать исходное состояние элементов, состояния, в которые они могут перейти, команды управления элементами и связь между состояниями и командами. В данном представлении под элементом понимается управляемое командами функциональное устройство или конструктивный блок аппаратуры.

2. Технический объект по классификации теории систем отнесен к системам с постоянной структурой.

3. Объект допускает резервирование различными методами, как на уровне элементов, так и подсистем.

4. Объект рассматривается как дискретный. Это обусловлено дискретностью выдачи команд применяемых средств управления объектом. Поэтому, хотя в составе объекта могут быть непрерывно функционирующие подсистемы и элементы, управление ими выполняется дискретно. Если же представить процесс управления объектом как процесс управления исполнительными элементами в его подсистемах и элементах, то, пренебрегая временем срабатывания исполнительных элементов, можно перейти к рассмотрению дискретной системы, состояния которой определены в любой момент времени.

5. Система рассматривается как детерминированная. Детерминированность управления данным объектом означает, что процесс управления его функционированием представляет собой процесс планируемого перевода подсистем и элементов из одного состояния в другое под действием команд управления. Адаптивные системы не рассматриваются.

6. Объект подвержен воздействию случайных факторов внешней среды, приводящих к отказам элементов и подсистем. Отказы могут быть определены средствами диагностирования объекта. Это обстоятельство определяет стохастический характер объекта. Однако обнаруженный отказ может рассматриваться при формировании программ управления объектом как детерминированный. Для этого модель системы должны предусматривать возможность введения отказов элементов и подсистем по мере их возникновения (коррекция модели).

В качестве задачи моделирования рассматривается одна из классических задач теории систем – задача прогноза состояния, базирующаяся на описании функционирования системы в пространстве состояний переходной функцией состояния:

$$F = \{f : X \times T \times U \times T \rightarrow X\}, \tag{1}$$

где F – переходная функция;

X – множество состояний системы $x(t)$;

U – множество значений входных воздействий $U(t)$;

T – множество моментов времени, причем T есть некоторое упорядоченное подмножество множества вещественных чисел R, то есть $T \subseteq R$.

Функция f устанавливает отображение четверок t_1, t_0, $x(t_0)$, u на множество X, содержащее элементы x. Считают, что переходная функция состояния f определена для всех $t \geq t_0$, а при $t = t_0$ для всех $t \in T$, $x \in X$ и $u \in U$ имеет место равенство:

$$f[t_0, t_0, x(t_0), u] = x(t_0). \tag{2}$$

Согласно теории систем считают, что знание состояния системы $x(t_0)$ в момент времени $t = t_0$ и входного воздействия u на отрезке времени $[t_0, t_1]$ является необходимым и достаточным условием, позволяющим определить состояние рассматриваемой системы $x(t_1)$ в момент времени $t = t_1$:

$$x(t1) = f\,[t_1, t_0, x(t_0), u(t_0, t_1)]. \tag{3}$$

Выходные величины системы $y(t)$ могут быть определены, если заданы входные воздействия и известна переходная функция состояния системы. Так как состояние системы $x(t)$ уже включает в себя эффект входного воздействия, считают:

$$y(t) = \sigma\,[t, x(t)]. \tag{4}$$

При сделанных предположениях рассматриваемую систему считают динамической.

Задачу прогноза состояния дискретной динамической системы в терминах теории множеств представляют в виде отображения:

$$F : X_0 \times T_0 \times U \times T \rightarrow X \times T, \qquad (5)$$

где F – переходная функция системы;

X_0 – множество начальных состояний системы;

T_0 – множество начальных моментов времени;

U – множество значений входных воздействий;

T – множество моментов времени выдачи входных воздействий;

X – множество состояний системы на выданные входные воздействия.

Задача формулируется следующим образом: задано состояние системы в начальный момент времени и множество управляющих воздействий, выдаваемых во времени. Требуется определить состояние системы на выданные управляющие воздействия.

Результаты исследования. Приведенная характеристика объекта моделирования и принятые в работе допущения отражены в постановке задачи моделирования и математической модели. Постановка задачи прогноза состояния дискретной динамической системы с постоянной структурой выполнена в терминах теории множеств.

1. Система состоит из конечного множества элементов, задаваемых их именами:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\},\ i = \overline{1,n}, \qquad (6)$$

где i – порядковый номер элемента;

n – количество элементов в системе.

2. Пространство состояний элемента является конечным:

$$X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iq}, \ldots, x_{iQ}\},\ q = \overline{1,Q}, \qquad (7)$$

где x_{iq} – одно из возможных состояний элемента a_i;

Q – размерность пространства состояний элемента.

3. Система может состоять из конечного множества подсистем:

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots, c_M\},\ \ m = \overline{1,M}, \qquad (8)$$

$$c_1 \cap c_2 \cap \ldots \cap c_m \cap \ldots \cap c_M\},\ \ \mathrm{c_m} \neq 0 \qquad (9)$$

$$A = \bigcup_{1}^{M} Cm,\ \ m = \overline{1,M}\ \ \ m \leq n, \qquad (10)$$

где m – индекс подсистемы;

M – максимальное количество подсистем, обладающих описанными свойствами, в составе системы.

4. Подсистема может состоять из конечного множества элементов:

$$c_m = \{a_1^{\ m}, a_2^{\ m}, \ldots, a_g^{\ m}, \ldots, a_G^{\ m}\},\ \ g = \overline{1,G},\ G \leq n, \qquad (11)$$

где G – максимальное количество элементов в подсистеме c_m.

5. При данных допущениях пространство состояний системы является конечным:

$$X = \{X_1 \times X_2 \ldots \times X_i \ldots \times X_n\},\ i = \overline{1,n}. \qquad (12)$$

6. Множество входных сигналов – команд управления является конечным:

$$U = \{u_1 \times u_2 \ldots \times u_j \ldots \times u_J\},\ j = \overline{1,J}, \qquad (13)$$

где j – порядковый номер команды;

J – максимальное количество команд, используемых при управлении системой;

u_J – имя (номер) команды управления.

7. Система управляется множеством временных программ управления, формируемых оператором:

$$E = \{e_1 \times e_2 \ldots \times e_v \ldots \times e_V\},\ v = \overline{1, V}, \tag{14}$$

где v – порядковый номер программы управления;

V – максимальное количество программ управления, используемых при управлении системой.

8. Программу управления представим в виде упорядоченной во времени последовательности команд управления с временами их выдачи:

$$e_v = (u_1^v(t_1) \times u_2^v(t_2),\ \ldots,\ \times u_h^v(t_h^v), \ldots, \times u_H^v(t_H^v)),\ h = \overline{1, H}, \tag{15}$$

где u_h^v – имя (номер) команды из множества команд управления системой U, выдаваемой в v-й программе управления;

h – порядковый номер команды в v-й программе управления;

t_h^v – время выдачи h-й команды;

H – максимальное количество команд в v-й программе управления.

9. Система описывается конечным множеством переходных функций:

$$D = \{d_1, d_2, \ldots, d_l, \ldots, d_L\},\ \ l = \overline{1, L}, \tag{16}$$

где l – индекс переходной функции;

L – максимальное количество переходных функций, используемых при описании системы.

10. Состояние системы в любой момент времени представляет собой кортеж состояний ее элементов:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_i(t), \ldots, x_n(t)),\ \ i = \overline{1, n}. \tag{17}$$

где $x(t)$ – состояние системы в момент времени t;

$x_i(t)$ – состояние элемента a_i в момент времени t.

Задача моделирования в терминах теории множеств сформулирована следующим образом: задано исходное состояние элементов системы:

$$x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_i(t_0), \ldots, x_n(t_0)),\ \ i = \tag{18}$$

в некоторый начальный момент времени t_0 и программа управления e_v (11). Требуется определить состояния элементов системы на заданные команды управления:

$$X_1^0 \times X_2^0 \ldots \times X_n^0 \times T^0 \times E = X_1 \times X_2 \ldots \times X_n \times T. \tag{19}$$

Математическая модель системы получена в виде следующих соотношений. Первое (20) описывает переход системы из одного состояния в другое при выдаче команды управления, действующей на один из элементов системы:

$$x(t{+}1) = (\mathrm{d}_l\{x_i(t), u_j(t + 1)\}, x_{A\backslash i}(t)), \tag{20}$$

где $x_i(t)$ – состояния элемента a_i в момент времени t;

$x_{A\backslash i}(t)$ – состояния остальных элементов системы, которые по команде $u_j(t + 1)$ в момент времени $(t + 1)$ не изменились;

d_l – переходная функция элемента.

Второе соотношение (21) описывает переход системы из одного состояния в другое при выдаче команды управления u_j, действующей на одну из подсистем системы c_m:

$$x(t + 1) = (d^{\overline{l}}\ \{x_{c_m}(t), u_j(t{+}1)\}, x_{A\backslash c_m}(t)), \tag{21}$$

где $x_{c_m}(t)$ – состояния подсистемы в момент времени t;

$x_{A \backslash c_m}(t)$ – состояния остальных элементов системы, которые по команде $u_j(t+1)$ в момент времени $(t+1)$ не изменились;

d_j^m – переходная функция подсистемы.

Третье соотношение (22) описывает переход системы из одного состояния в другое для общего случая, когда команда управления u_j действует на одну из подсистем системы c_m, причем характер воздействия команды на элементы подсистемы не одинаков:

$$x(t+1) = (d_1^m \{x_{a_1^m}(t), u_j(t+1)\}, \ldots, d_R^m \{x_{a_G^m}(t)\ u_j(t+1)\}, x_{A \backslash c_m}(t)), \tag{22}$$

а переходную функцию подсистемы представим в виде упорядоченного множества переходных функций элементов подсистемы c_m:

$$d_j^m = (d_1^m, d_2^m, \ldots, d_r^m, \ldots, d_R^m), \quad r = \overline{1,R}. \tag{23}$$

Если характер воздействия команды u_j на все элементы подсистемы одинаков, переход системы из одного состояния в другое при выдаче команды управления u_j, действующей на одну из подсистем системы c_m, представим в виде четвертого соотношения:

$$x(t+1) = (d_j \{x\quad (t), x_{a_1^m}(t), \ldots, x_{a_G^m}(t)\ u_j(t+1)\}, x_{A \backslash c_m}(t)). \tag{24}$$

Выражения (22) и (24), являющиеся математической моделью управления системы с постоянной структурой в пространстве состояний, удобно задавать таблицами, получившими название полной и списочной таблиц переходных функций. В ячейках полной таблицы (представлен весь список элементов системы в строке таблицы) для каждой команды управления записываются соответствующие имена переходных функций, если данная команда воздействует на элемент, и 0 – в противном случае (табл. 1). Размерность модели в этом случае может быть определена размерностью табл. 1. Для полной таблицы она равна произведению количества команд управления на количество элементов системы $N = J \times n$.

Если все переходы системы в пространстве состояний могут быть описаны выражениями вида (24), то можно использовать списочную таблицу переходных функций (табл. 2). В этой таблице имя функции вынесено в отдельный столбец, а в ячейках строки таблицы помещается список имен элементов подсистемы, на которые воздействует данная команда. Так как подсистемы имеют разное количество элементов, то список элементов подсистем, имеющих меньшее количество элементов, дополняется нулями (пробелами). Размерность модели в этом случае равна $N = J \times (G+1)$, где G – количество элементов подсистемы, имеющей максимальное количество элементов. Этим достигается уменьшение размерности модели в $\frac{n}{G+1}$ раз. Представление математической модели в виде компактных таблиц перспективно как в вычислительном отношении (построение моделирующего алгоритма), так и создания таблиц в системе автоматизированного проектирования сложного технического объекта.

Таблица 1

Перечень элементов системы

	a_1	a_2	…	a_i	…	a_n
u_1	d_2	d_3	…	*0*	…	*0*
u_2	d_3	d_2	…	d_2	…	*0*
…	…	…	…	…	…	…

u_j	*0*	*0*	**…**	d_l	**…**	*0*
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
u_J	d_1	d_2	**…**	d_r	**…**	d_R

Таблица 2

Перечень элементов подсистемы

U	d_f^m	a_1^m	a_2^m	…	a_g^m	…	a_G^m
u_1	d_2	a_7	a_8	…	*0*	…	*0*
u_2	d_l	a_1	a_2	…	*0*	…	*0*
…	…	…	…	…	…	…	…
u_j	d_f^m	a_1^m	a_2^m	…	a_g^m	…	a_G^m
…	…	…	…	…	…	…	…
u_J	d_f^M	a_1^M	a_2^M	…	a_g^M	…	a_G^M

Выводы. Разработана формализованная постановка задачи моделирования и математическая модель одного из классов сложных систем – дискретных динамических систем с постоянной структурой. Формализация постановки задачи моделирования и разработка математической модели является основой для следующих этапов исследования – построения моделирующего алгоритма и моделирования объекта или системы.

Литература

1. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем [Текст] / Н. П. Бусленко. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

2. Шеховцов А. Н. Построение математической модели распределенных систем [Текст] / А. Н. Шеховцов, В. Н. Козел // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 2003. – № 1(23). – С. 87–91.

3. Михаль О. Ф. Моделирование на сетях Петри виртуального вычислительного устройства для исследования эффективности локально-параллельных алгоритмов [Текст] / О. Ф. Михаль, О. Г. Руденко // Управляющие системы и машины. – 2003. – № 3. – С. 18–28.

4. Михаль О. Ф. Моделирование системы нечеткого регулирования средствами нечетких сетей Петри [Текст] / О. Ф. Михаль, О. Г. Руденко, З. Халайбех // Управляющие системы и машины. – 2005. – № 4. – С. 3–7.

5. Дудинкин В. И. Способ отработки программы управления объекта путем имитации объекта моделью конечного автомата [Текст] / В. И. Дудинкин, В. Д. Романов // Управляющие системы и машины. – 1982. – № 4. – С. 19–22.

7. Беляев М. Ю. Научные эксперименты на космических кораблях и орбитальных станциях [Текст] / М. Ю. Беляев. – М. : Машиностроение, 1984. – 264 с.

6. Бусленко Н. П. Лекции по теории сложных систем [Текст] / Н. П. Бусленко, И. Н. Коваленко, В. В. Калашников. – М. : Советское радио, 1973. – 440 с.