**УДК 531**

**Ю. В. Міхлін,** доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри прикладної математики
Національного технічного університету "ХПІ"
**К. В. Аврамов,** доктор технічних наук, професор,
професор кафедри прикладної математики
Національного технічного університету "ХПІ"
**С. М. Решетнікова,** кандидат фізико-математичних
наук, доцент, доцент кафедри прикладної
математики Національного технічного університету "ХПІ"

# ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З НЕЛІНІЙНИМИ ВІБРОГАСНИКАМИ

*Побудовано нелінійні нормальні форми коливань механічних систем. Визначено сприятливі для віброгасіння локалізовані форми коливань, коли амплітуди коливань гасника значно більші, ніж амплітуди коливань пружної системи. Проведено дослідження стійкості форм коливань.*

*Построены нелинейные нормальные формы колебаний механических систем. Определены благоприятные для виброгашения локализованные формы колебаний, когда амплитуды колебаний гашения значительно больше, чем амплитуды колебаний упругой системы. Проведено исследование устойчивости форм колебаний.*

*The nonlinear normal vibration modes of mechanical systems are built. Favourable to absorbing of vibration local vibration modes are defined, while amplitudes of vibration dampers are much greater than amplitudes of vibrations of elastic system. Firmness of vibration modes is researched as well.*



**Ключові слова.** Нелінійна динаміка систем, віброзахист, нелінійний осцилятор.

**Вступ.** Розв'язання проблеми віброзахисту часто може бути забезпечено використанням динамічних гасників з нелінійними характеристиками [1, 2].

У цій праці розглядається використання суттєво нелінійних елементів з одним степенем свободи для погашення коливань деякої пружної системи, яка апроксимується лінійним пружним осцилятором. Передбачається, що маса гасника суттєво менша, ніж маса основної пружної системи. Розглядаються гасники трьох типів – суттєво нелінійні осцилятори, елементи з декількома степенями свободи і віброударні елементи. Для аналізу коливань отриманих нелінійних систем з двома степенями свободи використовується теорія нелінійних нормальних форм коливань [3, 4]. Нормальні форми коливань – це такі періодичні режими руху, коли всі змінні конфігураційного простору однозначно визначаються однією з цих змінних. У режимі нормальних коливань скінченновимірна система поводиться як консервативна з одним степенем свободи. Найбільш ефективна для віброгасіння локалізована форма коливань, коли амплітуда коливань основної лінійної системи незначна, тоді як віброгасник здійснює великі коливання. Аналіз стійкості отриманих форм коливань дозволяє виділити такі області в просторі параметрів системи, коли зазначена локалізована форма коливань стійка, тоді як несприятлива для гасіння нелокальна форма коливань нестійка.

**Постановка завдання.** Динаміка системи з віброгасником у вигляді нелінійного осцилятора. Розглянемо можливість гасіння коливань деякої лінійної механічної системи, якщо в ролі віброгасника використовується одновимірний осцилятор, сполучений з точкою закріплення нелінійною пружиною. У спрощеному вигляді рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{cases} \varepsilon m\ddot{x} + c x^3 + \gamma(x-y) = 0 \\ M\ddot{y} + \omega^2 y + \gamma(y-x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $x$, $y$ – координати, що описують відповідно динаміку нелінійного гасника та основної лінійної підсистеми, коливання якої слід загасити. Припустимо, що маса гасника істотно менша маси основної підсистеми, тому вводиться малий параметр при старшій похідній у першому рівнянні. У такій системі можливі як локалізовані, так і нелокалізовані форми коливань. Під час аналізу форм цих коливань використовуються методи теорії нелінійних нормальних коливань [3–5]. Методом малого параметра побудовано траєкторії форм коливань у конфігураційному просторі системи. Можна виділити як нелокальну форму коливань, що в нульовому наближенні за малим параметром визначається рівністю $y_0 = x + \frac{c}{\gamma}x^3$, так і сприятливу для гасіння коливань лінійної підсистеми локалізовану форму, яка в нульовому наближенні за малим параметром визначається співвідношенням $y_0 = 0$. Локалізована форма може бути отримана після введення заміни часу: $t = \sqrt{\varepsilon}\tau$.

Стійкість форм коливань досліджується як зведенням до відомого рівняння Матьє, так і з використанням більш точної процедури алгебраїзації за Айнсом [6]. Отже, несприятлива для віброгасіння нелокальна форма коливань у разі збільшення амплітуд виявляється нестійкою. У той же час локалізована форма коливань стійка для майже всіх значень параметрів системи.

На рис. 1 зображено процес повного перекачування енергії з початково збуреної основної лінійної підсистеми в нелінійний гасник ($\varepsilon$ = 0,09268, $c$ = 5,0) за наявності тертя. Пунктиром зображено обвідну нормованої кінетичної енергії лінійної підсистеми в системі без гасника, точками зображено таку ж обвідну для лінійної підсистеми за наявності гасника, а суцільною лінією – ту ж обвідну для нелінійного гасника, який поглинає значну частину енергії коливань за рахунок дисипації.

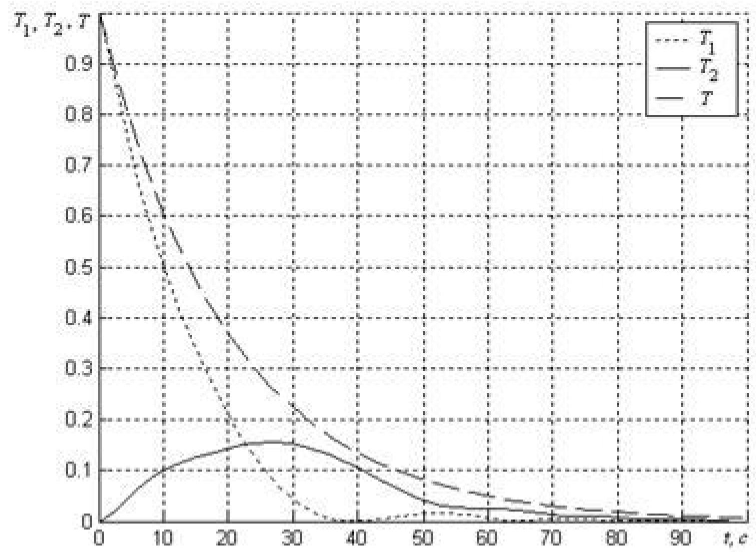


Рис. 1. Графік процесу перекачування енергії

Результати, отримані для системи виду (1), можна узагальнити на випадок системи, що перебуває під дією зовнішнього гармонійного впливу [7].

***Динаміка системи, що містить у функції віброгасника ферму Мізеса.*** Розглянемо конструкцію, яка містить осцилятор, коливання якого гасяться, і ферму Мізеса, яка є поглиначем коливань (рис. 2). Припустімо, що маса і жорсткість гасника значно менші відповідних параметрів основної системи. У припущенні, що ферма Мізеса – полога, і, зберігаючи лише складові не вищі третього степеня за переміщеннями *U,W*, запишемо рівняння руху в безрозмірних змінних у такому вигляді:

$$\ddot{u}_1 + (1+\varepsilon\gamma)u_1 - \frac{\varepsilon\gamma}{\rho^3}u_1 w^2 - \frac{\varepsilon\gamma}{2\rho^2}w^2 = 0; \tag{2}$$

$$\mu\ddot{w} - \gamma\alpha^2 w - \frac{\gamma}{\rho^2}w u_1 + \frac{\gamma\beta^2}{2}w^3 = 0, \tag{3}$$

де введені нові безрозмірні параметри й координати:

$$\gamma = \frac{c}{c_1};\ \mu = \frac{m}{M};\ \rho = \frac{\gamma + c}{1+\gamma};\ \alpha^2 = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{c} - 2;\ \beta^2 = \frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{c^3};$$

$$u = \frac{U}{L};\quad w = \frac{W}{L}\ u_1 = u + \frac{\gamma(1-c)}{1+\gamma}\ t = \sqrt{\frac{M}{c_1}}\tau;$$ $\varepsilon$ – малий параметр.

Для аналізу нормальних форм коливань у системі, яка містить ферму Мізеса, використовуються рівняння для визначення траєкторій у конфігураційному просторі системи [7]. Наприклад, рівняння, що описують залежність змінних конфігураційного простору, мають такий вигляд:

$$\frac{2(h-\Pi)}{u_1'^2 + \varepsilon\mu}u_1'' - \frac{\Pi'_w}{\varepsilon\mu}u_1' = -\Pi'_{u_1}; \tag{4}$$

де штрих означає диференціювання за $w_1$;

$\Pi$ – потенціальна енергія;

$h$ – повна енергія системи.

До рівняння (4) додаються крайові умови, які забезпечують аналітичне продовження траєкторії на максимальну еквіпотенціальну поверхню [3, 4].

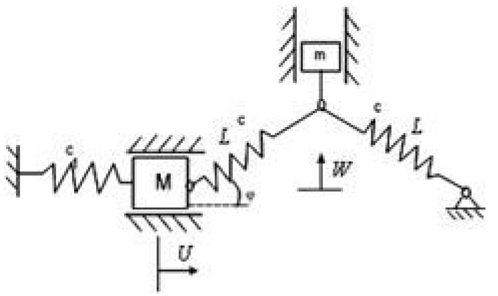


Рис. 2. Механічна система з фермою Мізеса

Локалізовані періодичні рухи подаються так:

$$u_1 = \varepsilon u_1(w) \equiv \varepsilon(b_0 + b_1 w_1 + b_2 w_1^2 + \dots). \qquad (5)$$

Підставляючи цей ряд у рівняння (4), з урахуванням крайових умов визначаємо його коефіцієнти із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. З інтеграла енергії визначається амплітуда коливань $W_*^{(\max)}$. Ця форма зображена на рис. 3 для деяких параметрів системи, при цьому перевірні числові розрахунки демонструють високу точність аналітичного розв'язку. Нелокальна форма коливань подається так: $u_1 = gw + \varepsilon u_2(w)$, а розв'язок також розшукується у вигляді ряду.

Якщо нелокальна форма нестійка, то енергія переходить у локалізовану форму коливань з великими амплітудами коливань гасника і маленькими амплітудами основної системи, причому в цьому русі система проскакує всі положення статичної рівноваги. Ця форма коливань сприятлива для віброгасіння.

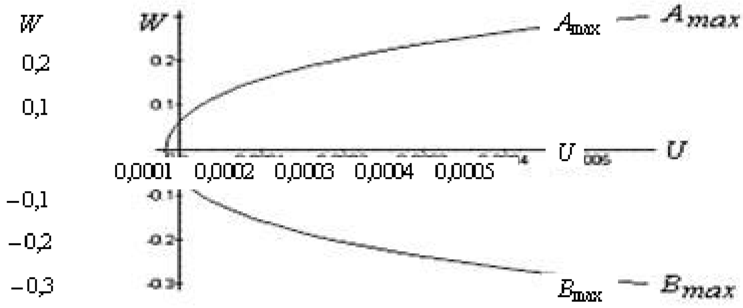


Рис. 3. Локалізована форма коливань

Під час аналізу стійкості періодичних рухів використовується мала кривизна траєкторій нормальних коливань у конфігураційному просторі, а також прямолінійна апроксимація траєкторії. Варіація в ортогональному напрямку визначає орбітальну стійкість нормальної форми коливань.

Карту стійкості локалізованої форми з великими амплітудами подано на рис. 4, де на горизонтальній осі відкладено параметр c = 1 – cos$\varphi$. Криві $OA_i$ відповідають нульовому наближенню за малим параметром. Межі областей стійкості/нестійкості якісно зображено у вигляді ліній $B_i$ $C_i$ $D_i$. Відзначимо, що області нестійкості мають порядок $\varepsilon$, більше того, для достатньо малих значень кутів $\varphi$ локалізована форма коливань завжди стійка.

$W_{max}$ $B_1$ $A_1$ s = 3 $D_1$ $B_2$ $A_2$ s = 2 $D_2$ $C_1$ $C_2$ $C_3$ $B_3$ $A_3$ s = 1 $D_3$

0 $\overline{C_1}$ $\overline{C_2}$ $\overline{C_3}$ 1 c

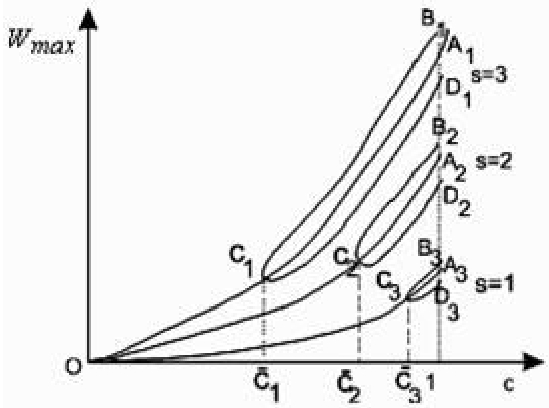


Рис. 4. Стійкість локалізованої форми з великими амплітудами

Вимушені коливання системи, що містить ферму Мізеса, також можуть бути досліджені на основі концепції нормальних коливань [8]. У цьому випадку використовується узагальнення методу Раушера, а також метод багатьох масштабів.

**Результати дослідження.** Гасіння пружних коливань з використанням віброударних осциляторів. Розглянемо використання віброударного інерційного елемента з одним степенем свободи в полі динамічного гасника коливань деякої лінійної підсистеми. Рівняння руху такої системи мають вигляд:

$$\begin{cases} \varepsilon m \ddot{x} + \gamma(x-y) + P(x) = 0 \\ M\ddot{y} + \omega^2 y + \gamma(y-x) = 0 \end{cases}, \qquad (6)$$

де *x, y* – координати відповідно віброгасника і лінійного осцилятора.

Покладається, що маса гасника суттєво менша, ніж маса лінійної системи, тому вводиться *формальний малий параметр ε* при старшій похідній у першому рівнянні. Функція *P(x)* описує ударну взаємодію віброгасника з обмежувачем. Характеристика ударної взаємодії, яка насправді є розривною, апроксимується степеневою функцією з досить великим показником. Обмежуючись тільки ударною взаємодією, можна уявити собі рух гасника у потенціальній ямі з потенціалом виду $\Pi = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, причому ця яма стає прямокутною при $n \to \infty$

У такій системі можливі як нелокальні форми коливань (амплітуди коливань лінійного та нелінійного осциляторів однієї величини), так і локалізовані форми коливань
(у цьому випадку основна частина енергії коливань зосереджена в гасниках, а амплітуди коливань основної лінійної системи малі). Для визначення форм коливань, як і раніше, використовуються методи теорії нормальних коливань нелінійних скінченновимірних систем. У нульовому наближенні за ε = 0 отримуємо нелокальну форму коливань виду $y_0 = x + \frac{x^n}{\gamma}$ і локалізовану форму коливань виду $y_0 = 0$, яка може бути отримана після введення заміни: $t = \sqrt{\varepsilon}\tau$. Траєкторії нелокальної та локалізованої форм коливань можуть бути визначені в декількох наближеннях методу малого параметра. Відповідно до теорії негладких перетворень [9], періодичний розв'язок матиме вигляд:

$$x = A_x + X(\tau), \quad \tau = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\omega_0 t\right)\right) = \tau(\omega_0 t), \qquad (7)$$

де функція *X(τ)* підлягає визначенню, а параметри *A* і $\omega_0$ зв'язані амплітудно-частотною характеристикою:

$$M\omega_0^2 = \frac{\omega^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}A^{n-1}\right)^2 + \frac{A^{2(n-1)}}{2\gamma} + \frac{A^{n-1}}{n+1}. \qquad (8)$$

Для дослідження стійкості форм коливань використовується процедура алгебраїзації рівнянь у варіаціях за Айнсом.

**Висновки.** Аналіз нормальних форм коливань систем, що містять нелінійні віброгасники різних типів, показав, що в широкому діапазоні зміни параметрів системи існує стійка локалізована форма коливань, яка забезпечує режим коливань, сприятливий для віброгасіння.

Література


1. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем [Текст] / М. З. Коловский. – М. : Наука, 1966. – 317 с.

2. Вибрации в технике [Текст] / под ред. К. В. Фролова. – М. : Машиностроение, 1995. – 461 с.

3. Vakakis A. F. Normal modes and localization in nonlinear systems [Text] / A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Yu. V. Mikhlin et al. – New York : Wiley, 1996. – 552 p.

4. Mikhlin Yu. V. Normal vibrations of a general class of conservative oscillators [Text] / Yu. V. Mikhlin // Nonl. Dynamics. – 1996. – № 11(1). – P. 1–16.

5. Mikhlin Yu. V. Dynamical interaction of an elastic system and essentially nonlinear absorber [Text] / Yu. V. Mikhlin, S. N. Reshetnikova // J. of Sound and Vibr. – 2005. – № 283. – P. 91–120.

6. Mikhlin Yu. An application of the Ince algebraization to the stability of nonlinear normal vibration modes [Text] / Yu. Mikhlin, A. Zhupiev // Int. J. of Nonl. Mech. – 1997. – № 32(1). – P. 493–509.

7. Avramov K. V. Snap-through truss as a vibration absorber [Text] / K. V. Avramov, Yu. V. Mikhlin // J. of Vibration and Control. – 2004. – № 10. – P. 291–308.

8. Avramov K. V. Snap-through truss as absorber of forced oscillations [Text] / K. V. Avramov, Yu. V. Mikhlin // J. of Sound and Vibr. – 2006. – № 290. – P. 705–722.

9. Pilipchuk V. N. Analytical study of vibrating systems with strong non-linearity by employing saw-tooth time transformations [Text] / V. N. Pilipchuk // J. of Sound and Vibr. – 1996. – № 192(1). – P. 43–64.