

УДК 629.439:4.027.3:621.313.282:538.945

О. Н. Молотков, кандидат технічних наук,
доцент кафедри інформаційних систем
та технологій Академії митної служби України

РОЗРАХУНОК СИЛОВИХ ВЗАЄМОДІЙ ВУЗЛА ЛЕВІТАЦІЇ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ З ДИСКРЕТНОЮ СТРУКТУРОЮ КОЛІЇ

У статті розглянуто завдання розрахунку силових взаємодій вузла левітації транспортного засобу з дискретною структурою колії. Отримано співвідношення для розрахунку коефіцієнта взаємоіндукції контурів колії та поїзда і його похідні за просторовими координатами, що дозволяють суттєво скоротити час розрахунків під час моделювання динаміки транспортного засобу.

В работе рассматривается задача расчёта силовых взаимодействий в узле левитации транспортного средства с дискретной путевой структурой. Получены выражения для расчёта коэффициента взаимоиנדукции прямоугольных поездных и путевых контуров и его производных по пространственным координатам, позволяющие существенно сократить время расчёта при моделировании динамики транспортного средства.

In article consider the problem of calculating forces in the magnetic levitating transport vehicle. Are obtained expressions for calculating of mutual induction coefficient for rectangular coils and its derivatives by space coordinates. It can significantly reduce the computation time in modeling the dynamics of the vehicle.

Ключові слова. Транспортний засіб, левітація, силові взаємодії, коефіцієнт взаємоіндукції, похідні.

Вступ. Одним з головних напрямків розвитку наземного транспорту нині є створення високошвидкісних транспортних засобів з магнітним вузлом левітації [1–6]. Проектування вузла левітації тісно пов'язано з розрахунками силових взаємодій, що виникають у вузлі левітації під час руху засобу [1, 2]. Основою для виконання розрахунків служить математична модель силових взаємодій. Її слід побудувати таким чином, щоб, з одного боку, забезпечити необхідну точність дослідження впливу геометричних та електромагнітних параметрів засобу на величину силових впливів, а з іншого – мінімізувати витрати часу на обчислення впливів на ПЕОМ. Суперечність означених вимог суттєво загострюється, коли в процесі проектування вузла левітації порівнюються різні варіанти його конструкції [2, 3]. У зв'язку із цим побудова математичної моделі для розрахунку силових взаємодій вузла левітації транспортного засобу – актуальне завдання, така модель корисна в розробці перспективних високошвидкісних транспортних систем. Виконанню сформульованого завдання для однієї з можливих конструктивних схем вузла левітації – вузла з дискретною структурою колії – присвячено цю статтю.

© О. Н. Молотков, 2010

Розробку моделі силових взаємодій високошвидкісного транспортного засобу з дискретною структурою колії висвітлено в багатьох публікаціях [1–5].

У більшості праць миттєве значення сили левітації f_L визначається зі співвідношення [1]

$$f_L = I_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} i_k \frac{\partial M_{sk}}{\partial y}, \quad (1)$$

де I_s – струм в s -му надпровідному контурі поїзда, i_k – струм наведений у k -му контурі колії, M_{sk} – коефіцієнт взаємоіндукції s -го поїздног контуру та k -го контуру колії. Уповільнювальна сила f_D та бокова зіштовхувальна сила f_z визначаються зі співвідношень

$$f_D = I_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} i_k \frac{\partial M_{sk}}{\partial x}, \quad f_z = I_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} i_k \frac{\partial M_{sk}}{\partial z} \quad (2)$$

відповідно. Оскільки I_s – задана величина, розрахунок миттєвих значень силових взаємодій зводиться до визначення струмів i_k у контурах колії та залежності коефіцієнта взаємоіндукції та його похідних від просторових координат x, y і z .

Визначення наведеного в контурах колії струму i_k має ряд модифікацій, обумовлених двома обставинами [2–5].

Перша пов'язана з різноманітними формами електричної рушійної сили, що наводиться в контурах колії. Так, у працях [2, 3] за вхідний при обчисленнях береться прямокутний характер розподілу в просторі магнітної рушійної сили надпровідних обмоток. Потім складають рівняння для знаходження струму i_k k -го контуру колії у вигляді

$$R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3)$$

де Φ – магнітний потік у зоні розміщення обмоток колії, R_k та L_k – відповідно омичний опір та індуктивність k -го контуру.

У працях [4, 5] для запису правої частини рівняння (3) використовується коефіцієнт взаємоіндукції M_{sk} . Тоді вираз (3) набуває вигляду

$$R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} = - I_s \frac{dM_{sk}}{dt}, \quad (4)$$

або з урахуванням, що

$$\frac{dM_{*k}}{dt} = \frac{\partial M_{*k}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial M_{*k}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial M_{*k}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial M_{*k}}{\partial x} V_x + \frac{\partial M_{*k}}{\partial y} V_y + \frac{\partial M_{*k}}{\partial z} V_z, \quad (5)$$

де V_x , V_y і V_z – швидкості руху засобу по осях x , y і z відповідно, виглядатиме:

$$R_{*k}^i + L_k \frac{di_k}{dt} = -I_* \left(\frac{\partial M_{*k}}{\partial x} V_x + \frac{\partial M_{*k}}{\partial y} V_y + \frac{\partial M_{*k}}{\partial z} V_z \right), \quad (6)$$

і задача цілком зводиться до визначення коефіцієнта взаємодуції M_{*k} та його похідних.

Друга обставина пов'язана з вибором засобів розв'язання диференціальних рівнянь (3, 4): застосуванням перетворень Фур'є [5, 6] або Лапласа [7], зведенням системи диференціальних рівнянь до системи лінійних алгебраїчних рівнянь [8].

Друга обставина врешті зводиться до задачі, що може вважатися розв'язаною задовільно. Перша, на жаль, призводить до таких громіздких виразів, що явно суперечить вимогам до моделі. У зв'язку із цим завдання можемо сформулювати так.

Постановка завдання. Отримати ефективні співвідношення для розрахунку коефіцієнта взаємодуції M_{*k} та його похідних за просторовими координатами. Задачі будемо розв'язувати на основі побудови співвідношень для розрахунку коефіцієнта взаємодуції двох контурів та його подальшого диференціювання. При цьому вважатимемо такими, що виконуються, деякі припущення.

1. Контури транспортного засобу та колії – “ниткоподібні” та мають прямокутну форму.
2. Площини розташування, а також відповідні боки контурів взаємно паралельні.
3. Контури колії не впливають один на одного.

Геометричні параметри контурів та параметри їх розташування у просторі зображено на рис. 1.

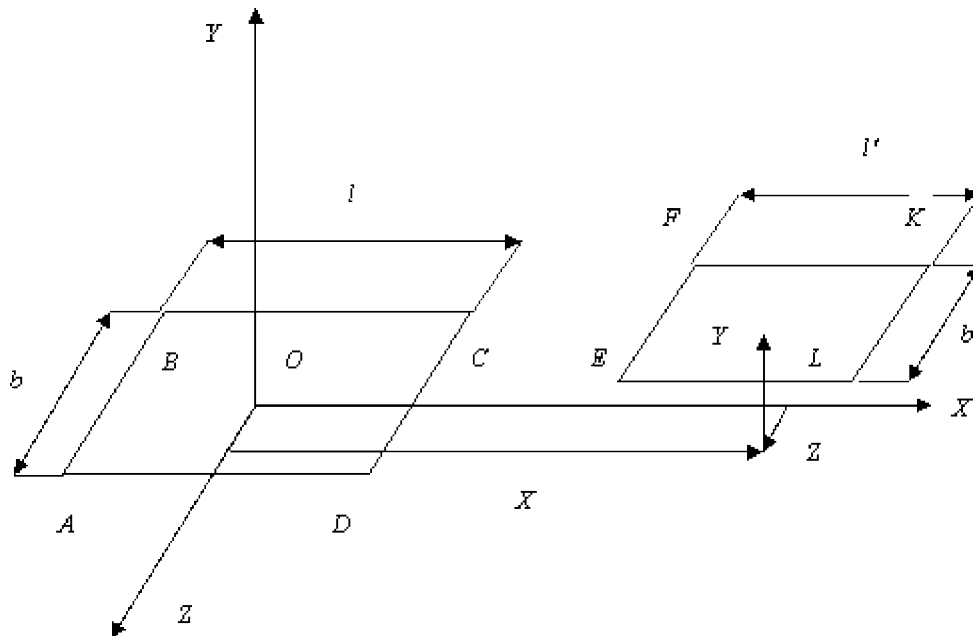


Рис. 1

Коефіцієнт взаємодуції. Як відомо [1], коефіцієнт взаємодуції двох контурів \mathcal{L}_a і \mathcal{L}_b довільної форми може бути обчислений як подвійний контурний інтеграл

$$M_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}_a} \int_{\mathcal{L}_b} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r}, \quad (7)$$

де μ_0 – магнітна проникність вакууму.

Отримаємо залежність M_{ab} від координат x , y і z . За прийнятих припущень інтеграл (7) може мати вигляд

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_a} \int_{\mathcal{L}_b} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r} &= \int_{AE}^{BF} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r} - \int_{AK}^{BL} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r} + \int_{BF}^{CK} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r} - \int_{BL}^{CE} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r} + \\ &+ \int_{EK}^{EL} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r} - \int_{CE}^{DF} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r} + \int_{DL}^{AE} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r} - \int_{DF}^{AK} \frac{d\vec{\ell}_a \cdot d\vec{\ell}_b}{r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Обчислюючи визначені інтеграли і позначаючи

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= x + \frac{\ell + \ell'}{2}, & D_1 &= \sqrt{\Delta_1^2 + y^2}, & C_1 &= z + \frac{b + b'}{2}, \\
\Delta_2 &= x + \frac{\ell - \ell'}{2}, & D_2 &= \sqrt{\Delta_2^2 + y^2}, & C_2 &= z + \frac{b - b'}{2}, \\
\Delta_3 &= x - \frac{\ell + \ell'}{2}, & D_3 &= \sqrt{\Delta_3^2 + y^2}, & C_3 &= z - \frac{b + b'}{2}, \\
\Delta_4 &= x - \frac{\ell - \ell'}{2}, & D_4 &= \sqrt{\Delta_4^2 + y^2}, & C_4 &= z - \frac{b - b'}{2}, \\
B_y &= \sqrt{C_i^2 + D_j^2}, & A_y &= \sqrt{D_i^2 + C_j^2}, & i &= \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, 4},
\end{aligned} \tag{9}$$

отримуємо вираз для обчислення коефіцієнта взаємодукції у вигляді

$$\begin{aligned}
M_{\omega\omega} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+j} A_y + \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+j} B_y + \right. \\
&+ z \ln \left(\frac{(C_2 + B_{21})(C_4 + B_{41})(C_1 + B_{12})(C_3 + B_{32})(C_2 + B_{21})(C_4 + B_{41})(C_1 + B_{13})(C_3 + B_{34})}{(C_1 + B_{11})(C_3 + B_{31})(C_2 + B_{22})(C_4 + B_{42})(C_1 + B_{11})(C_3 + B_{31})(C_2 + B_{23})(C_4 + B_{44})} \right) + \\
&+ \frac{b}{2} \ln \left(\frac{(C_2 + B_{21})(C_1 + B_{11})(C_3 + B_{32})(C_4 + B_{42})(C_2 + B_{21})(C_3 + B_{31})(C_1 + B_{13})(C_4 + B_{44})}{(C_1 + B_{11})(C_3 + B_{31})(C_2 + B_{22})(C_4 + B_{42})(C_1 + B_{11})(C_3 + B_{31})(C_2 + B_{23})(C_4 + B_{44})} \right) + \\
&+ \frac{b'}{2} \ln \left(\frac{(C_2 + B_{21})(C_4 + B_{41})(C_1 + B_{12})(C_3 + B_{32})(C_2 + B_{21})(C_4 + B_{41})(C_1 + B_{13})(C_3 + B_{34})}{(C_1 + B_{11})(C_3 + B_{31})(C_2 + B_{22})(C_4 + B_{42})(C_1 + B_{11})(C_3 + B_{31})(C_2 + B_{23})(C_4 + B_{44})} \right) + \\
&+ x \ln \left(\frac{(\Delta_2 + A_{21})(\Delta_4 + A_{41})(\Delta_1 + A_{12})(\Delta_3 + A_{32})(\Delta_2 + A_{21})(\Delta_4 + A_{41})(\Delta_1 + A_{13})(\Delta_3 + A_{34})}{(\Delta_1 + A_{11})(\Delta_3 + A_{31})(\Delta_2 + A_{22})(\Delta_4 + A_{42})(\Delta_1 + A_{11})(\Delta_3 + A_{31})(\Delta_2 + A_{23})(\Delta_4 + A_{44})} \right) + \\
&+ \frac{\ell}{2} \ln \left(\frac{(\Delta_2 + A_{21})(\Delta_1 + A_{11})(\Delta_3 + A_{32})(\Delta_4 + A_{42})(\Delta_2 + A_{21})(\Delta_3 + A_{31})(\Delta_1 + A_{13})(\Delta_4 + A_{44})}{(\Delta_1 + A_{11})(\Delta_3 + A_{31})(\Delta_2 + A_{22})(\Delta_4 + A_{42})(\Delta_1 + A_{11})(\Delta_3 + A_{31})(\Delta_2 + A_{23})(\Delta_4 + A_{44})} \right) + \\
&+ \frac{\ell'}{2} \ln \left(\frac{(\Delta_2 + A_{21})(\Delta_4 + A_{41})(\Delta_1 + A_{12})(\Delta_3 + A_{32})(\Delta_2 + A_{21})(\Delta_4 + A_{41})(\Delta_1 + A_{13})(\Delta_3 + A_{34})}{(\Delta_1 + A_{11})(\Delta_3 + A_{31})(\Delta_2 + A_{22})(\Delta_4 + A_{42})(\Delta_1 + A_{11})(\Delta_3 + A_{31})(\Delta_2 + A_{23})(\Delta_4 + A_{44})} \right) \left. \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Запишемо отриманий вираз у векторній формі

$$\begin{aligned}
M_{\omega\omega} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{\varepsilon}^T (R + R^T) \vec{\varepsilon} - z \vec{\varepsilon}^T P \vec{\varepsilon} - x \vec{\varepsilon}^T Q \vec{\varepsilon} - \frac{b}{2} \vec{\varepsilon}^T E P \vec{\varepsilon} - \frac{b'}{2} \vec{\varepsilon}^T E' P \vec{\varepsilon} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\ell}{2} \vec{\varepsilon}^T E Q \vec{\varepsilon} - \frac{\ell'}{2} \vec{\varepsilon}^T E' Q \vec{\varepsilon} \right),
\end{aligned} \tag{11}$$

де \vec{a} , \vec{b} і $\vec{\varepsilon}$ – вектори-стовпці

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x + (\ell + \ell')/2 \\ x + (\ell - \ell')/2 \\ x - (\ell + \ell')/2 \\ x - (\ell - \ell')/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} z + (b + b')/2 \\ z + (b - b')/2 \\ z - (b + b')/2 \\ z - (b - b')/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$\vec{\varepsilon}$ – вектор-стовпець з компонентами

$$c_i = \sqrt{a_i^2 + y^2}, \quad i = \overline{1, 4}, \tag{13}$$

R , P і Q – квадратні матриці з елементами

$$R_y = \sqrt{b_i^2 + c_j^2}, \quad F_y = \ln(b_i + A_y), \quad Q_y = \ln(a_i + A_y), \quad i = \overline{1, 4}, \tag{14}$$

E і E' – діагональні матриці

$$E = \text{diag}\{1 \ 1 \ -1 \ -1\}, \quad E' = \text{diag}\{1 \ -1 \ -1 \ 1\}, \tag{15}$$

τ – символ операції транспонування матриць і векторів.

Після зведення подібних M_{ab} можна зобразити у вигляді

$$M_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}^T \left\{ R + R^T - \left[x \cdot S + \frac{1}{2} (\ell E + \ell' E') \right] \cdot Q - \left[z \cdot S + \frac{1}{2} (b E + b' E') \right] \cdot P \right\} \vec{e}, \quad (16)$$

де S – одинична матриця розміру 4×4 . Нескладно обчислити, що

$$x \cdot S + \frac{1}{2} (\ell E + \ell' E') = \text{diag}\{\vec{a}\}, \quad z \cdot S + \frac{1}{2} (b E + b' E') = \text{diag}\{\vec{b}\}. \quad (17)$$

Це дозволяє записати вираз (16) для M_{ab} у вигляді

$$M_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}^T \left[R + R^T - \text{diag}\{\vec{a}\} \cdot Q - \text{diag}\{\vec{b}\} \cdot P \right] \vec{e}. \quad (18)$$

Похідні коефіцієнта взаємоіндукції. Диференціюючи (18) за просторовими координатами, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ab}}{\partial x} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}^T \left[\frac{\partial R}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^T - Q - \text{diag}\{\vec{a}\} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - \text{diag}\{\vec{b}\} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right] \vec{e}, \\ \frac{\partial M_{ab}}{\partial y} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}^T \left[\frac{\partial R}{\partial y} + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^T - \text{diag}\{\vec{a}\} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - \text{diag}\{\vec{b}\} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \right] \vec{e}, \\ \frac{\partial M_{ab}}{\partial z} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}^T \left[\frac{\partial R}{\partial z} + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^T - P - \text{diag}\{\vec{a}\} \cdot \frac{\partial Q}{\partial z} - \text{diag}\{\vec{b}\} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right] \vec{e}. \end{aligned} \quad (19)$$

Обчислюючи похідні від матриць R , P і Q за координатами x , y і z , маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x} &= \frac{a_j}{R_{ij}}, \quad \frac{\partial R_{ij}}{\partial y} = \frac{y}{R_{ij}}, \quad \frac{\partial R_{ij}}{\partial z} = \frac{b_j}{R_{ij}}, \quad i, j = \overline{1, 4}, \\ \frac{\partial P_{ij}}{\partial x} &= \frac{a_j}{(b_j + R_{ij}) R_{ij}}, \quad \frac{\partial P_{ij}}{\partial y} = \frac{y}{(b_j + R_{ij}) R_{ij}}, \quad \frac{\partial P_{ij}}{\partial z} = \frac{1}{R_{ij}}, \quad i, j = \overline{1, 4}, \\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial x} &= \frac{1}{R_{ij}}, \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial y} = \frac{y}{(a_i + R_{ij}) R_{ij}}, \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial z} = \frac{b_j}{(a_i + R_{ij}) R_{ij}}, \quad i, j = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (20)$$

Підстановка (20) у (19) остаточно дає

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ab}}{\partial x} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (-1)^{i+j} \left(\frac{a_j}{b_j + R_{ij}} - Q_{ij} \right), \\ \frac{\partial M_{ab}}{\partial y} &= \frac{\mu_0}{4\pi} y \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (-1)^{i+j} \left(\frac{1}{b_j + R_{ij}} + \frac{1}{a_i + R_{ij}} \right), \\ \frac{\partial M_{ab}}{\partial z} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (-1)^{i+j} \left(\frac{b_j}{a_i + R_{ij}} - P_{ij} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Порівняємо складність співвідношень (21) для обчислення похідних коефіцієнта взаємоіндукції зі співвідношеннями, які можуть бути отримані прямим диференціюванням (10). Кожна з похідних (21) налічує лише 16 складових, диференціювання співвідношення (10) за відповідною координатою утворює 16 членів похідних подвійних сум та 1536 членів похідних виразів під знаком логарифма. Ураховуючи лише операції множення, отримуємо скорочення кількості операцій більше ніж у 100 разів.

Оцінимо ефективність застосування співвідношень (21) порівняно з використанням похідних, що отримані диференціюванням (10), при моделюванні динаміки транспортного засобу. При цьому вважатимемо, що транспортний засіб рухається на висоті 0,15 м уздовж осі x зі швидкістю 60 м/сек і має такі параметри вузла левітації: довжина контурів засобу 1 м, колії – 0,3 м, відстань між центрами контурів колії 0,33 м, ширина контурів поїзда та колії 0,3 м, $I_s = 10^5$ А, радіус перетину дроту контурів колії 0,015 м, матеріал дроту контурів колії – алюміній з питомою провідністю $3,7 \times 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. Числове інтегрування співвідношень (6) із застосуванням співвідношень (21) при переміщенні засобу на довжину одного контуру колії потребує у 8,3 раза менше часу, ніж з використанням похідних, що отримані диференціюванням (10). Середнє значення підйомної сили становить $2,1 \times 10^5$ н, а відповідна розбіжність значень підйомної сили, обчислених за обома методами не перевищує 10^{-3} н.

Висновки. Отримано співвідношення для розрахунків похідних коефіцієнта взаємоіндукції двох прямокутних контурів за просторовими координатами, які дозволяють суттєво скоротити кількість арифметичних операцій для їх обчислення. Застосування отриманих співвідношень для розрахунку коефіцієнта взаємоіндукції та його похідних за просторовими координатами дозволяє скоротити необхідний час для моделювання динаміки високошвидкісних транспортних засобів магнітної левітації з дискретною структурою колії, може бути корисним у розв'язанні задач забезпечення з потрібними показниками якості сталості руху

таких транспортних засобів.

Література

1. Дзензерский В. А. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / Дзензерский В. А. и др. – К. : Наукова думка, 2001. – 479 с.
2. Takahashi T. Suspension characteristics of magnetically suspended high-speed trains / T. Takahashi, K. Okuyama // Hitachi Review. – 1972. – Vol. 21. – № 8. – P. 300–308.
3. Нонака С. Краевые эффекты в системе магнитной подвески с отталкиванием сверхпроводников от U-образного полотна / С. Нонака, Т. Сакамото // Кюсю дайгаку когаку суюхо. – 1984. – Vol. 57. – № 3. – P. 201–208.
4. Takano I. Characteristics of magnetic levitation for high-speed trains / Takano I., Saito Y., Ogiwara H. – Proc. 4th Int. Cryog. Eng. Conf. – Eindhoven, 1972. – P. 188–190.
5. Hoppi L. Electromagnetic lift and drag forces on a superconducting magnet propelled along a guideway composed of metallic loop / Hoppi L., Chilton F., Coffey H. – Proc. of Appl. Supercond. Conf. – Annapolis, 1972. – P. 113–119.
6. Кочетков В. М. Теория электродинамической левитации. Основные результаты и дальнейшие задачи / В. М. Кочетков, К. И. Ким, И. И. Трещев // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1981. – № 1. – С. 72–91.
7. Бахвалов Ю. А. Расчет силовых взаимодействий в системе электродинамического подвеса и направления с дискретной путевой структурой / Ю. А. Бахвалов, В. А. Бурцев // Изв. вузов. Электромеханика. – 1979. – № 11. – С. 999–1003.
8. Омеляненко В. И. Метод расчета сил подъема и торможения электродинамического подвеса с дискретной путевой структурой / В. И. Омеляненко, В. И. Бочаров, Б. Г. Набока и др. // Изв. вузов. Электромеханика. – 1977. – № 8. – С. 865–870.