УДК 519.6:533.6

А. В. Сохацький, доктор технічних наук, завідувач кафедри транспортних систем та технологій Академії митної служби України

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ НА ОСНОВІ МАКРОСКОПІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Проведено огляд сучасних математичних моделей динаміки транспортних потоків на основі макроскопічних підходів. Запропоновано нову математичну модель динаміки транспортних потоків. У математичній моделі враховано неодновимірність транспортного потоку та ряд особливостей руху.

Проведен обзор современных математических моделей динамики транспортных потоков на основе макроскопических подходов. Предложена новая математическая модель динамики транспортных потоков. В математической модели учтена неодномерность транспортного потока и ряд особенностей движения.

The review of modern mathematical models of dynamics of transport streams is conducted on the basis of macroscopic approaches. The new mathematical model of dynamics of transport streams is offered. Not the unidimensionalness of a transport stream and row of features of motion is taken into account in a mathematical model.

Ключові слова. Моделювання, динаміка транспортних потоків, макроскопічні моделі, транспортні мережі.

Вступ. Сучасні транспортні мережі потребують оптимального управління транспортними потоками, яке враховувало б усі закономірності зовнішнього та внутрішнього впливу на динамічні характеристики такої складної системи. Тому особливо важливими в наш час стають системи штучного інтелекту, які можуть забезпечити оптимальне планування, організацію руху, оптимізацію маршрутів та виконання цілого ряду інших завдань [1–29]. Їх виконати неможливо без використання математичного моделювання транспортних потоків. Потреба такого підходу диктується запитами практики і визначається складністю фізичних процесів, що відбуваються в транспортних мережах. Застосування штучного інтелекту перш за все передбачає проведення обчислювальних експериментів. Отже потрібні відповідні математичні моделі для прогнозування транспортних потоків.

Постановка завдання. Математичне моделювання транспортного потоку надзвичайно важливе та корисне, оскільки дозволяє розрахувати ефективність уведення нових елементів на стадії планування, а також оптимізувати використання наявних елементів транспортної структури з урахуванням прикордонного та митного контролю. До завдань, які часто виникають належить і оптимальне планування транспортної прикордонної мережі, збільшення пропускної спроможності магістралі, оптимізація маршрутів перетину кордону. Існуючі моделі транспортних потоків оперують одновимірними потоками та не враховують усіх особливостей руху [1–28, 30–32]. Аналіз наукових досліджень показує, що потрібна розробка нових, більш досконалих моделей транспортних потоків.

Дослідження особливостей моделювання транспортних потоків. Моделювання транспортних потоків історично стало розвиватися за двома напрямками: детерміністичним та стохастичним.

В основі детермінованих моделей лежить функціональна залежність між окремими параметрами руху (швидкість, дистанція, густина потоку транспортних засобів) [3, 10, 11, 18]. У стохастичних моделях транспортний потік розглядається як ймовірнісний процес [7, 18].

Нині існують різноманітні підходи до аналізу транспортних потоків у математичних моделях. Їх відмінність полягає у використовуваному математичному апараті, вихідних даних, об'єктах руху.

Для класифікації фаз руху транспортних засобів застосовується залежність $q = V(\rho)\rho$ де $V(\rho)$ – швидкість потоку транспортних засобів, ρ – густина потоку транспортних засобів. У праці [8] запропоновано таку класифікацію фаз руху транспортних засобів (рис. 1):

1. Вільний потік. Дорога не завантажена. Водії дотримуються дозволених та рекомендованих швидкостей руху. Транспортні засоби порівнюються з потоком вільних частинок.

2. Синхронізований потік. Дорога стає переповненою. Водії втрачають можливість вільно маневрувати і вимушені узгоджувати свою швидкість зі швидкістю потоку.

3. Затори, що широко переміщуються. Транспортні засоби подібні до шматочків льоду, що рухаються в потоці рідини.

Згідно з працею [9] моделі транспортних потоків поділяються на три класи.

1. Моделі-аналоги. У моделях-аналогах рух транспортних засобів розглядається як певний фізичний процес (гідро- та газодинамічні моделі). Такі моделі називаються макроскопічними моделями [10, 12, 13, 18, 30].

2. Моделі прямування за лідером У моделях прямування за лідером приймається припущення про наявність зв'язку поміж переміщенням веденого та головного автомобіля. З розвитком цих моделей стали досліджувати час реакції водія, рух на багатосмугових дорогах, стійкість руху. Цей клас моделей називають мікроскопічними моделями [3, 10, 17, 18].

3. Ймовірнісні моделі. У стохастичних моделях транспортний потік розглядається як результат взаємодії транспортних засобів на елементах транспортної мережі. Закономірності зростання кількості транспортних засобів, обмеження параметрів руху, масовість характеру транспортного потоку мають істотно стохастичний характер [19–21].

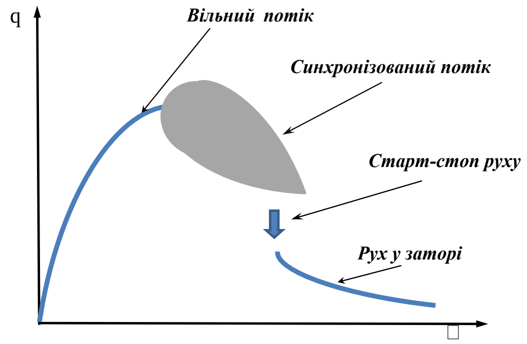

Рис. 1. Фазові стани транспортного потоку

$q = Q(\rho) = V(\rho)\rho$ – кількість транспортних засобів, що проходять через деякий переріз дороги за одиницю часу;

ρ – густина потоку транспортних засобів.

Складність транспортних потоків, стійкі та нестійкі режими руху, нелінійність зворотних зв’язків, велика кількість змінних для опису руху потребує використання методів та алгоритмів нелінійної динаміки. Складність процесів, що відбуваються в транспортному потоці, та вплив на швидкість кожного транспортного засобу великого числа чинників не дозволяють точно описати режими руху потоку простими математичними аналітичними залежностями. Тому численні гіпотези теорії руху транспортних потоків виходять з розгляду спрощених схем. Їх можна поділити на дві основні групи [9].

1. Теорії, що грунтуються на динамічних моделях потоків автомобілів. Вони досліджують відстані при різних швидкостях між автомобілями, що рухаються один за одним, без обгону по одній смузі проїжджої частини і поширюють встановлені закономірності на весь транспортний потік. Ця схема краще всього відповідає високим інтенсивностям руху, коли випередження транспортних засобів один одним практично неможливе або пов’язане з дуже великим ризиком [10–13, 18, 30].

2. Теорії, що грунтуються на ймовірнісних моделях. Вони аналізують рух двох зустрічних потоків автомобілів у цілому, враховуючи можливість обгонів із заїздом на смугу зустрічного руху [15, 19–21].

Зараз найбільшого розповсюдження отримали два типи моделей динаміки транспортного потоку: макроскопічні та мікроскопічні [3].

Макроскопічні моделі. Макроскопічні моделі грунтуються на теорії гідродинамічної подібності. У макроскопічних підходах модель потоку транспортних засобів будується відповідно до гідродинамічної аналогії [13]. Він уподібнюється стисливій рідині з урахуванням залежності швидкості потоку від його густини, тому потрібно розв’язувати початкову задачу Коші для закону збереження. Розриви в узагальненому розв’язку інтерпретуються як межі заторів.

У макромоделях рух окремих транспортних засобів окремо не описується. Фундаментальні характеристики, якими оперують моделі цього класу такі: густина – кількість транспортних засобів на одиницю довжини дороги; потік – кількість транспортних засобів, що проходить через деякий переріз дороги за одиницю часу; середня швидкість транспортного засобу в потоці

Розрізнюють такі класи макромоделей транспортного потоку [10, 18]:

1. Моделі гідродинамічної аналогії (кінематичні моделі) (Lighthill – Whitham – Richards) [12, 13, 30].

2. Моделі другого порядку (Kerner–Konheuser) [8, 34].

3. Моделі, що базуються на кінетичних рівняннях (Prigogine, Helbing) [19, 21].

Однією з перших у 50-х рр. XX ст. було запропоновано одновимірну гідродинамічну модель транспортного потоку, яку пізніше назвали моделлю Лайтхілла – Візема – Річардса (Lighthill – Whitham – Richards – LWR) [12, 13].

Модель LWR базується на рівнянні для густини автомобільного потоку в поєднанні з гіпотезою, що середня швидкість транспортного засобу на ділянці дороги є детермінованою функцією густини транспортних засобів на цій ділянці

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$V(x,t) = V_c(\rho(x,t)), \tag{2}$$

де $\rho(x,t)$ – густина потоку,

$V(x,t)$ – швидкість потоку транспортних засобів у даний момент часу в точці простору.

У моделі LWR припускається, що:

– існує однозначна залежність поміж швидкістю руху $V(t, x)$ та густиною $\rho(t, x)$ потоку;

– виконується закон збереження кількості транспортних засобів.

Просторові масштаби, в яких транспортний потік описується макроскопічними моделями, значно перевищує характерні розміри транспортних засобів. Шукані величини $V(t, x)$ і $\rho(t, x)$ інтерпретуються не як усереднені величини, а як значення функцій, що отримуються при переході від мікроскопічного до макроскопічного опису. Тобто транспортний потік є складовою деякої макроскопічної моделі, в якій детально описується поведінка транспортного засобу залежно від дорожніх умов перед ним.

Необхідність розгляду макроскопічних моделей обґрунтовується більш простою технікою їх дослідження. Дана модель не враховує опір потоку транспортних засобів і таким чином неадекватно описує рух у місцях, де транспортні засоби вимушені зменшувати швидкість руху або зупинятися.

У моделі LWR щодо функції $V(\rho)$ приймаються такі припущення:

$$V'(\rho) < 0. \tag{3}$$

Позначимо інтенсивність потоку $Q(\rho) = \rho V(\rho)$.

Залежність $Q(\rho)$ називають фундаментальною діаграмою (рис. 2), хоча і залежність $V(\rho)$ також інколи називають фундаментальною діаграмою [10].

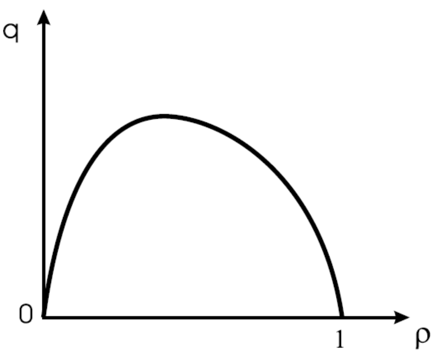

Рис. 2. Фундаментальна діаграма транспортного потоку

Для односмугового руху прийнято [30]

$$Q''(\rho) < 0. \tag{4}$$

Значення цього запису розуміють як те, що рух по двох однакових та незалежних смугах з різною густиною потоку менш ефективний, ніж рух по цих смугах з однаковою густиною. Коли агрегувати кілька смуг в одну, то спостереження за реальними транспортними потоками показують, що від опуклості функції $Q(\rho)$ взагалі доведеться відмовитися.

Дослідження показали, що є діапазон значень ρ, за яких немає чіткої залежності величини потоку від густини. Одному значенню густини відповідає цілий проміжок можливих значень потоку $V(\rho)$.

Є цілий ряд модифікацій моделей LWR.

Моделлю Танака називають LWR – модель в якій розглядається односмуговий потік транспортних засобів та враховуються дорожні умови. Припускається, що швидкість транспортного засобу не може перевищувати $V_{\max}$. Густина потоку визначається виразом

$$\rho(V) = \frac{1}{d(V)}, \tag{5}$$

де $d(V) = L + c_1 V + c_2 V^2$ – середня безпечна відстань поміж транспортними засобами при заданій швидкості потоку.

L – середня довжина транспортного засобу,

c_1 – час, що характеризує реакцію водія,

c_2 – коефіцієнт пропорційності гальмівного шляху.

Залежно від дорожніх умов коефіцієнти визначають згідно з рекомендаціями, поданими у праці [2].

Модель Візема [30] дозволяє враховувати перешкоди, що можуть з'являтися, і описується рівнянням

$$V(t,x) = V(\rho(t,x)) - \frac{D(\rho(t,x))}{\rho(t,x)} \frac{\partial \rho(t,x)}{\partial x}, D(\rho) > 0. \tag{6}$$

Гідродинамічні моделі другого порядку-1. З урахуванням закону збереження кількості транспортних засобів

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V)}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

отримуємо рівняння типу Бюргерса [33]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \tag{8}$$

Виконуючи лінійну заміну змінних та невідомої функції: $t \to \tilde{t}, x \to \tilde{x}, \rho \to \tilde{\rho}$, отримаємо модельне рівняння

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}} = \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}^2}, \quad \varepsilon > 0. \tag{9}$$

Недоліком моделей LWR є припущення про рівноважне значення швидкості V_e. Це припущення не дозволяє адекватно описувати фізичний процес у разі неоднорідності доріг.

Гідродинамічні моделі другого порядку-2. У зв'язку з цим було запропоновано замість детермінованого рівняння $V(x,t) = V_e(\rho(x,t))$ використовувати диференціальне рівняння для моделювання динаміки середньої швидкості [14]

$$v_t + v v_x = -\frac{c^2(\rho)}{\rho} \rho_x + \frac{1}{\tau}(V_e(\rho) - \rho), \tag{10}$$

де $c(\rho) = -\frac{1}{2\tau} \frac{dV_e}{d\rho}$.

Відповідно до гідродинамічної аналогії складову vv_x називають конвективною складовою [33]. Ця складова описує зміну швидкості в даному місці дороги за рахунок кінематичного перенесення транспортного засобу.

Перша складова правої частини описує тенденцію до зменшення швидкості при зростанні густини. Другий член правої частини рівняння (10) описує тенденцію наближення середньої швидкості v до рівноважної за даної густини значення $V_e(\rho)$ і називається релаксаційним. Час τ – характерний час релаксації.

Дослідження показують, що при високих значеннях густини ламінарний рух стає нестійким і малі збурення призводять до виникнення стоп-хвиль. Це вносить суттєві обмеження до використання моделі. Стандартна модель цього класу записується у вигляді [15]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau}\left(V(\rho) - v\right) - c_0^2 \frac{\partial L(\rho)}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} . \qquad (11)$$

Перший член правої частини призводить до зниження середньої швидкості $V(\rho)$ при заданій густині потоку до деякої величини. Другий член – фактор уповільнення руху, тобто зниження швидкості потоку, якщо спереду потік має більш високу густину. Безрозмірна функція $L(\rho)$ при цьому повинна монотонно зростати. Дифузійний член відображає тенденцію до узгодження швидкості зі швидкістю оточуючих транспортних засобів.

У макроскопічних моделях транспортний потік прийнято розглядати аналогічно до потоку рідини або газу. Тому поняття "фазового переходу" в транспортному потоці введене за аналогією з фазовими переходами в рідинах та газах. Дослідження транспортних потоків показало, що перехід від вільного потоку до синхронізованого може траплятися майже спонтанно [25–29]. Це відбувається тоді, коли кількість транспортних засобів вибухоподібно зростає.

Іншими словами, фазові переходи – це якісні стрибкоподібні зміни швидкості та густини ТП в потоці. Ці зміни виникають локально і поширюються хвилеподібно по потоку. У результаті потік перетворюється на "желе". Такий стан може зберігатися достатньо довго.

У гідродинаміці фазові переходи спостерігаються при зміні енергії зв'язків між атомами. За умови відбирання або підведення енергії, що перевищує енергію зв'язків, відбувається зміна фаз. Визначальним параметром фази речовини при цьому виступає температура. У транспортних потоках "причина раптового переходу від режиму вільного руху до режиму "stop-and-go" залишається однією з таємниць нашого часу" [25]. Таким чином, повного розуміння природи автомобільних заторів на сьогодні не досягнуто. Для ТП характерний опір зворотному фазовому переходу – від затору до вільного руху. Перехід між вільним і заторним рухом є гістерезисним за природою, тобто зворотний перехід повинен відбуватися на меншій густині та більш високій середній швидкості [27–29]. Як перейти від затору до вільного руху? Цьому процесові повинні сприяти певні фактори, що утворюються в самому транспортному потоці. Слід очікувати, що вивчення та застосування детермінованого хаосу [31] сприятиме виконанню поставлених завдань.

Макроскопічні моделі дозволяють визначати параметри руху кожного з транспортних засобів транспортного потоку з певними припущеннями. У мікромоделях рух кожної одиниці транспортних засобів описується окремо.

Результати досліджень. Більшість відомих математичних моделей одновимірні й не розглядають розподіл параметрів руху в площині дорожньої структури [1–33]. Багатосмуговий рух транспортних засобів має розглядатися як мінімум двовимірними моделями з урахуванням реальної геометрії дороги.

Математична модель для розрахунку параметрів транспортного потоку повинна будуватися на законах збереження маси, кількості руху та залежностях для інших характеристик транспортного потоку з урахуванням цілого ряду істотних факторів (рис. 3). Для задання положення транспортних засобів існує два підходи. Перший, пов'язаний з іменем Лагранжа, полягає в заданні поточних значень координат *x*, *y*, *z* транспортного засобу, як функції часу. Другий, пов'язаний з іменем Ейлера, полягає в аналітичному або векторному заданні поля швидкостей потоку транспортних засобів з проекціями *u*, *v*, *w*.

Структуру процесу математичного моделювання динаміки транспортного потоку показано на рис. 4.

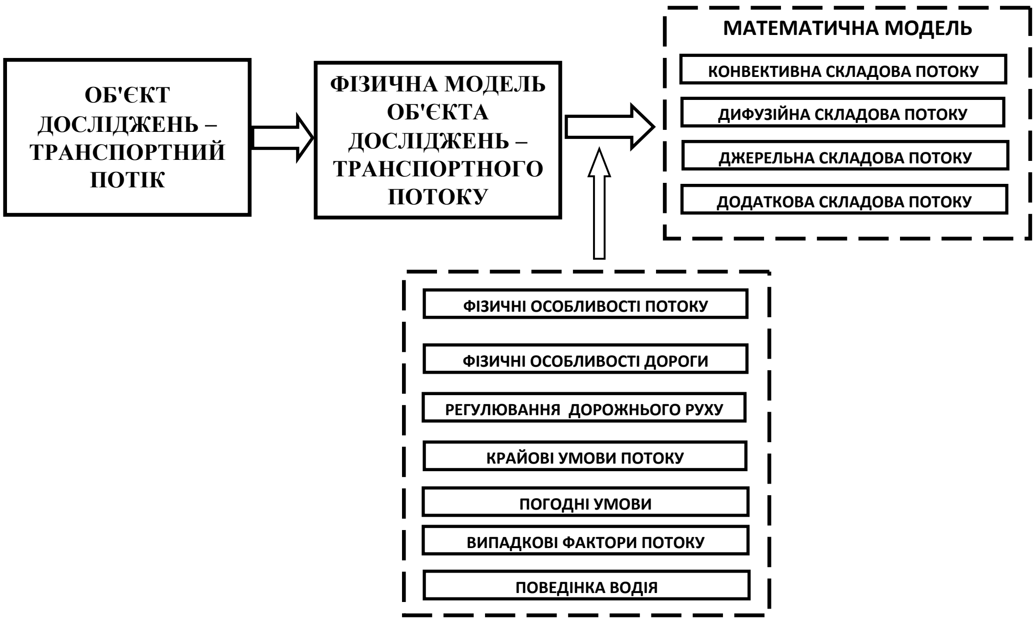

Рис. 3. Складові математичної моделі транспортного потоку

Пропонується математична модель для розрахунку транспортного потоку з ейлеровими змінними на основі виконання законів збереження маси потоку, кількості руху потоку (рис. 3). У випадку двовимірної системи координат система диференціальних рівнянь матиме вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - k\frac{\partial L}{\partial x} + S_x, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)-k\frac{\partial L}{\partial y}+S_y, \tag{14}$$

$$F(\mu)=\mu(\rho,x,y,t), \tag{15}$$

$$L(\rho)=F_L(\rho,x,y,t). \tag{16}$$

де *x, y* – складові декартової системи координат; *u, v* – проекції вектора швидкості на осі декартової системи координат; ρ – густина потоку; μ, *k* – деякі функціональні залежності.

Рівняння (12) описує закон збереження маси транспортного потоку. Диференціальні рівняння (13, 14) описують збереження кількості руху потоку. Конвективні складові рівнянь (13, 14) описують зміну швидкості в даному місці дороги за рахунок кінематичного перенесення транспортного засобу. Дифузійні члени рівнянь (13, 14) відображають тенденцію до узгодження швидкості з швидкістю оточуючих транспортних засобів. Другий член правої частини рівнянь (13, 14) – фактор зміни кількості руху потоку, що відбувається за наявності градієнта густини потоку. Співвідношення (15, 16) необхідні для визначення характеристик потоку, що спричиняють розгін або гальмування потоку транспортних засобів. Причому параметри *μ* та *L* можуть бути неявними функціями від часу, координат точки потоку та густини потоку. Змінні S_x, S_y – джерельні члени.

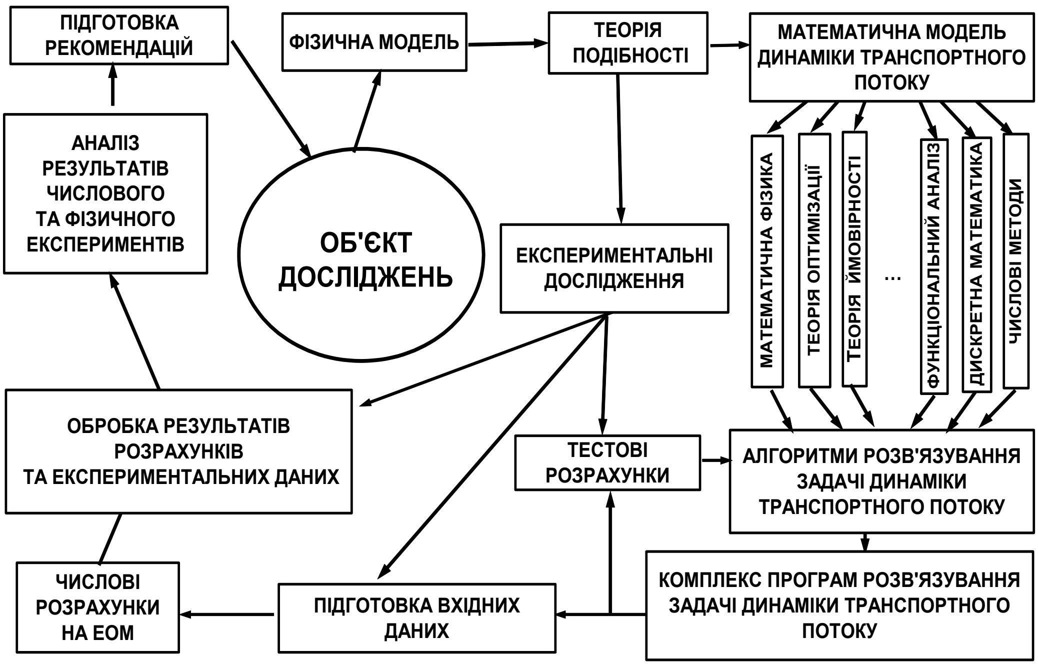

Рис. 4. Структура математичного моделювання динаміки транспортного потоку

Висновки. Вибір тієї чи іншої моделі транспортного потоку слід проводити відповідно до фізичної постановки завдання. Для розв'язування складної задачі треба побудувати ієрархію спрощених моделей. При цьому необхідно встановити, який рівень потрібно використати в тому чи іншому випадку.

Вибір моделі транспортного потоку повинен узгоджуватися з необхідною точністю розрахунку та витратами на її створення. Високорівневі моделі потребують значних часових затрат на їх розробку та відповідних ресурсів електронно-обчислювальних машин.

Запропоновано математичну модель динаміки транспортного потоку, де враховується цілий ряд факторів, двовимірність транспортного потоку, опір руху, перешкоди руху тощо.

Література

1. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков / Хейт Ф. – М. : Мир, 1966.

2. Иносэ Х. Управление дорожным движением / Х. Иносэ, Т. Хамада. – М. : Транспорт, 1983.

3. Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учеб. пособие / [Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. и др. ; *Приложения*: Бланк М. Л., Гасникова Е. В., Замятин А. А. и Малышев В. А., Колесников А. В., Райгородский А. М.] ; под ред. А. В. Гасникова. – М. : МФТИ, 2010. – 362 с.

4. Traffic flow theory: A state-of-the-art report / Editors Gartner N. H., Messer C. J., Rathi A. K. – Washington DC: Transportation Research Board, 2001.

5. Jost D. Probabilistic Traffic flow breakdown in stochastic car following models / D. Jost, K. Nagel. – Traffic and Granular Flow. – 2005. – V. 03. – Part 2. – P. 87–103.

6. Lotito P. A min-plus derivation of the fundamental car-traffic law / Lotito P., Mancinelli E., Quadrat J.-P. // Automatic Control IEEE Transactions. – May 2005. – V. 50. – № 5. – P. 699–705.

7. Вероятностные и имитационные подходы к оптимизации автодорожного движения / [Буслаев А. П., Новиков А. В., Приходько В. М., Таташев А. Г., Яшина М. В.]. – М. : Мир, 2003.

8. Kerner B. S. Three-Phase Traffic Theory and Higway Capacity.

9. Брайловский Н. О. Моделирование транспортных систем / Н. О. Брайловский, Б. И. Грановский. – М. : Транспорт, 1978. – 125 с.

10. Семенов В. В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса / Семенов В. В. / Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. – М., 2004. – 45 с. (препринт № 34).

11. Gray L. The Ergodic Theory of Traffic Jams / L. Gray, D. Griffeath // Journal of Statistical Physics. – 2001. – Vol. 105. – Nos. 3/4. – November.

12. Lighthill M. J. On kinematic waves: II. Theory of traffic flow on long crowded roads / M. J., Lighthill, G.B. Whitham. – Proc. R. Soc. London. – Ser. A. – 1955. – V. 229. – P. 281–345.

13. Richards P. I. Shock Waves on the Highway / Richards P. I. // Oper. Res. – 1956. – V. 4. – P. 42–51.

14. Payne H. J. Models of freeway tra-c and control / Payne H. J. – Mathematical models of Public Systems. – Ed. Bekey G. A. – V. 1. – La Jolla, CA: Simulation Council, 1971. – P. 51–61.

15. Nagel K. Still flowing: Approaches to traffic flow and traffic jam modeling / Nagel K., Wagner R., Woesler R. – January 2, 2003.

16. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков / Швецов В. И. // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 3–46.

17. Nagel K. A Celluar automation model for freeway traffic / Nagel K., Schreckenberd M. // J. Phys. I France. –1992. – Vol. 2. – P. 2221–2229.

18. Семенов В. В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков / Семенов В. В. / Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. – М., 2003. – 24 с. (препринт).

19. Prigogine I. A Boltsman-like approach for traffic flow / Prigogine I., Andrews F. C. // Operations Research. – 1960. – Vol. 8. – P. 789–797.

20. Prigogine I. Rinetic theory vichicullar traffic / Prigogine I., Herman R. – N.Y. : Elsevier, 1971.

21. Prigogine I. A. A Boltsman-like approach to the statistical theory of traffic flow / Prigogine I. A. – Theory of Traffic Flow. Ed. Herman R. Amsterdam. Elsevier. – 1961.

22. Küehne R. D. Proceeding of 12th International Simposium on the Theory of traffic Flow and Transportation / Küehne R. D., Beckshulte R. – Edited by C. F. Daganzo (Elsevier Amsterdam, 1993). – P. 367.

23. Rödiger M. Master's thesis / Rödiger M. University of Munste, 1990 (unpu lished).

24. Sick B. Master's thesis / Sick B. – University of Ulm., 1989 (unpu,lished).

25. Studying the ebb and flow of stop-and-go; Los Alamos Lab using cold war tools to scrutinize traffic patterns Alan Sipress Washington Post staff Writer, Thursday, August 5, 1999, Last updated 1/31/00 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.kottke.org/plus/misc/traffic.html.

26. Payne H. Discontinuity in equilibrium traffic flow / Payne H. // Transp. Res. Rec. – 1984. – Vol. 971. – P. 140–146.

27. Treiterer J. The hysteresis phenomenon in traffic flow, in Proceeding of the 6th International Symposium on Transportation and Traffic Flow Theory / Treiterer J., Myers J. A. – Edited by D. Buckley (Reed, London), 1974. – P. 13–38.

28. Kerner B. S. Experimental properties of phase transitions in traffic flow / Kerner B. S., Rehborn H. // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79. – P. 4030–4033.

29. Kerner B. S. Experimental properties of complexity in traffic flow / Kerner B. S., Rehborn H. // Phys. Rev.– 1996. – Vol. E 53. – P.R4275–R4278.

30. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Уизем Дж. – М. : Мир, 1977.

31. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение / Шустер Г. – М. : Мир, 1988. – 248 с.

32. Лоскутов А. Ю. Проблемы нелинейной динамики. II. Подавление хаоса и управление динамическими системами / А. Ю. Лоскутов // Вестник МГУ. Сер. Физ.-астр. – 2001. – № 3. – С. 3–21

33. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.; пер. с англ. С. В. Сенина, Е. Ю. Шальмана, под ред. Г. Л. Подвидза. – М. : Мир, 1990. – Т. 1. – 392 с. – Т. 2. – 336 с.

34. Kerner B. S. Phys. Rev. E. / Kerner B. S., Konheuser P. – 1993. – Vol. 48. – P. R2335; 1994. – Vol. 50.