

О. В. Трофімов, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри транспортних систем та технологій Академії митної служби України

БАГАТОСІТКОВІ МЕТОДИ У ЗВОРОТНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Запропоновано числовий алгоритм наближеного розв'язання зворотних задач для систем з розподіленими параметрами. Алгоритм ґрунтується на багатосітковому підході.

Ключові слова: зворотні задачі; системи з розподіленими параметрами; багатосіткові методи.

A new method for obtaining the numerical solution for distributed parameters systems' inverse problems is proposed. The method is based on full multigrid algorithm approach.

Key words: inverse problems; distributed parameters systems; multigrid methods.

Постановка проблеми. Зворотні задачі на основі фізичних моделей становлять неабиякий теоретичний і практичний інтерес. До них, зокрема, належать задачі комп'ютерної томографії, сейсмології, геологорозвідки, неруйнівного контролю тощо. Серед зворотних задач досить багато моделей, в яких необхідно визначати характеристики розподілу фізичних полів за їх певними проявами, доступними для спостереження і вимірювання. Такі моделі називають системами з розподіленими параметрами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження подібних задач має приблизно піввікову історію, що починається з відомих праць А. Н. Тихонова [1], який уперше звернув увагу на некоректний характер більшості таких задач і намітив підходи до їх розв'язання. Вони ґрунтуються на названому ним методі регуляризації.

Мета статті – розробка ефективних числових алгоритмів розв'язання зворотних задач для систем з розподіленими параметрами на основі багатосіткового методу [2].

Виклад основного матеріалу. Системами з розподіленими параметрами називають математичні моделі, що описуються диференційними (інтегральними, інтегродиференційними) рівняннями типу

$$\mathbf{A}(\mathbf{m})\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (1)$$

Як правило, рівняння (1) моделює певний фізичний процес, основним параметром якого виступає функція \mathbf{u} , що визначає поле значень деякої фізичної змінної (температури, механічного переміщення, тиску тощо) і має назву *функції стану*. Величина \mathbf{m} описує в цьому випадку фізичні характеристики середовища (теплопровідність, пружність, в'язкість тощо) і називається *розподіленим параметром*. Функція \mathbf{f} – *функція джерела*, визначає розподіл джерел тепла, масової сили, потоку рідини та ін. Вважається, що величини \mathbf{m} , \mathbf{f} та \mathbf{u} належать до функціональних просторів (у загальному випадку нескінченно вимірним) \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{H}_3 . Оператор $\mathbf{A}(\mathbf{m}): \mathbf{H}_3 \rightarrow \mathbf{H}_2$, що залежить від \mathbf{m} як від параметра, є втіленням певних фізичних законів і становить основу математичної моделі, що пов'язує між собою величини \mathbf{m} , \mathbf{f} та \mathbf{u} .

© О. В. Трофімов, 2014

Рівняння (1) характеризує так звану “пряму задачу”: за заданими \mathbf{m}, \mathbf{f} знайти функцію стану \mathbf{u} . У багатьох випадках пряма задача коректна. Це означає, що рівняння (1) визначає однозначний неперервний оператор $\mathfrak{R}: \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}_3$, що ставить у відповідність парі функцій \mathbf{m}, \mathbf{f} певне значення \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \mathfrak{R}(\mathbf{m}, \mathbf{f}). \quad (2)$$

“Зворотна задача” для системи з розподіленими параметрами – оцінка величин \mathbf{m} та \mathbf{f} за певною інформацією про функцію \mathbf{u} :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{g} \in \mathbf{H}_4, \quad (3)$$

де $\mathbf{g}(\cdot): \mathbf{H}_3 \rightarrow \mathbf{H}_4$ – певний функціонал від \mathbf{u} . Таким функціоналом може бути, наприклад, вектор значень функції \mathbf{u} у заданих точках області її визначення (так званий *вектор спостережуваних значень* $\mathbf{u}_{\text{спост}} = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(p)})$) або певна функція від цього вектора. Таким чином, зворотна задача полягає у визначенні пари величин \mathbf{m} та \mathbf{f} , що задовольняють функціональне рівняння:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathfrak{R}(\mathbf{m}, \mathbf{f})) = \mathbf{G}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) = \mathbf{g}. \quad (4)$$

У подальшому вважатимемо величину \mathbf{f} відомою (в іншому випадку її в принципі можна включити до складу параметрів \mathbf{m}), тобто замість (4) маємо рівняння:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}) = \mathbf{g} \quad (5)$$

з шуканою функцією \mathbf{m} , де $\mathbf{G}(\cdot): \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_4$. Характерною особливістю задачі (5) є те, що навіть у випадку лінійності початкового оператора A з рівняння (1) оператор \mathbf{G} , як правило, нелінійний.

Задача (5) буде коректно поставленою, якщо оператор \mathbf{G} є неперервним біективним відображенням з \mathbf{H}_1 у \mathbf{H}_4 . Однак для багатьох практично важливих класів операторів ця умова порушується. Зокрема, певні порушення таких умов ведуть до таких проявів некоректності.

1. *Порушення ін'єктивності оператора \mathbf{G} .* Це означає, що множина значень $\text{Range}(\mathbf{G})$ цього оператора не збігається з усім простором \mathbf{H}_4 , тобто для деяких елементів $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_4$ не існує відповідних через (5) елементів $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_1$. Умова існування розв'язку зворотної задачі (5) порушується.

2. *Порушення сюр'єктивності оператора \mathbf{G} .* Це означає, що декільком різним елементам $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_1$ відповідає той самий елемент $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_4$. Це призводить до порушення єдиності розв'язку зворотної задачі (5).

3. *Порушення неперервності відображення \mathbf{G} .* Це призводить до високої чутливості розв'язку \mathbf{m} задачі до малих збурень $\delta \mathbf{g}$ правої частини рівняння (5).

Завдяки зазначеним особливостям аналіз і розв'язання практичних некоректних задач пов'язані з неабиякими труднощами. З моменту виникнення інтересу до подібних задач для їх дослідження, аналізу та розв'язання використовувалися два основних підходи.

I. Детерміністський підхід почав розвиватися з 50-х рр. XX ст. з класичних праць А. Н. Тихонова і полягає у визначенні \mathbf{m} з умови мінімізації величини нев'язки:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{g}. \quad (6)$$

Конкретніше задача полягає у знаходженні мінімуму функціонала

$$J(\mathbf{m}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{m}) \rightarrow \min. \quad (7)$$

Функціонал I_1 називається *нев'язочним* і відповідає за якомога точнішу підгонку шуканої величини \mathbf{m} до “даних спостережень” \mathbf{g} . Функціонал I_2 виконує роль штрафного, що не дозволяє наближеному розв'язку \mathbf{m} залишати певний клас функцій (у рамках описаного нижче стохастичного підходу цей функціонал називається *апріорним*, тобто характеризує певну апріорну інформацію про шукану функцію \mathbf{m}). Зокрема, такий функціонал може обмежувати кількість високочастотних гармонік у складі наближеного розв'язку \mathbf{m} , не допускаючи сильно осцилюючих розв'язків. Подібне обмеження кількості високочастотних складових розв'язку називається *регуляризацією*, а функціонал I_2 – *регуляризуючим* (або *стабілізуєчим*).

II. Стохастичний (імовірнісний) підхід. Через зазначену особливість розв'язок некоректної задачі може бути не єдиним, тому є сенс говорити про ймовірність появи того чи іншого розв'язку. Основною шуканою інформацією про розв'язок тоді буде щільність імовірності $\sigma_M(\mathbf{m})$ появи тієї чи іншої функції \mathbf{m} як розв'язку, яка називається ще *апостеріорною щільністю ймовірності*. З таким підходом розв'язок зворотної задачі (5) (а саме, функція $\sigma_M(\mathbf{m})$) буде єдиним. Як вхідні дані тут виступає щільність імовірності $\rho_m(\mathbf{m})$, що характеризує певну апріорну інформацію про величину \mathbf{m} , а також щільність імовірності $\rho_D(\mathbf{g})$, що характеризує невизначеності, які виникають під час знаходження вектора \mathbf{g} (у тому числі “шум”, що з'являється під час отримання вектора спостережуваних значень $\mathbf{u}_{\text{спост}}$). У припущенні, що похибка моделізації (відповідності рівняння (1) реальному фізичному процесу) мала порівняно з невизначеностями в отриманні величини \mathbf{g} , а також незалежності апріорної інформації про функцію \mathbf{m} від похибки вимірювань у \mathbf{g} , апостеріорна щільність імовірності $\sigma_M(\mathbf{m})$ визначається за формулою [3]:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = k \rho_m(\mathbf{m}) \rho_D(\mathbf{G}(\mathbf{m})), \quad (8)$$

де k – нормувальний множник.

У випадку, коли простір \mathbf{H}_1 величини \mathbf{m} скінченно вимірний і має невелику розмірність, можна обчислити значення щільності $\sigma_M(\mathbf{m})$ на певній сітці у просторі \mathbf{H}_1 . Таким чином можна виявити структуру апостеріорного розподілу ймовірностей для \mathbf{m} . Для цієї ж мети використовуються методи Монте-Карло [3]. Однак на практиці простір \mathbf{H}_1 часто нескінченно вимірний (у процесі дискретизації задачі він є скінченно вимірним, але має, як правило, велику розмірність). У цьому випадку дослідити повну структуру розподілу $\sigma_M(\mathbf{m})$ неможливо. Визначають, як правило, точку максимуму цього розподілу (так звану *оцінку максимальної правдоподібності*) і ступінь “гостроти” такого максимуму (який на практиці характеризується матрицею коваріацій), а саме розглядається задача знаходження максимуму функції

$$f(\mathbf{m}) = \frac{\sigma_M(\mathbf{m})}{\mu_M(\mathbf{m})},$$

де $\mu_M(\mathbf{m})$ – так звана *однорідна щільність ймовірності* (у випадку лінійного нормованого простору \mathbf{H}_1 $\mu_M(\mathbf{m}) = \text{const}$), або, що еквівалентно, мінімуму функції:

$$S(\mathbf{m}) = -\ln\left(\frac{\sigma_M(\mathbf{m})}{\mu_M(\mathbf{m})}\right) \rightarrow \min. \quad (9)$$

У деяких практично важливих випадках (наприклад, у припущенні, що $\rho_m(\mathbf{m})$ та $\rho_D(\mathbf{g})$ розподілені за законом Гауса, а також лінійності (або слабкої нелінійності) функціонала G) функціонал (9) за своєю структурою збігатиметься з функціоналом (7), що підкреслює генетичний зв'язок між детерміністським і стохастичним підходами. Однак останній має загальніший характер та надійнішу теоретико-методологічну основу, яка підкреслює неоднозначний характер розв'язку зворотної задачі. Згідно з цим підходом ми маємо лише поступово покращувати наші знання про особливості просторового розподілу величини \mathbf{m} шляхом додаткових вимірювань, тобто додавання й оновлення інформації, що міститься у векторі \mathbf{g} .

Для реалізації числових алгоритмів обчислення наближеного розв'язку задачі мінімізації (7) або (9) виконується дискретизація цієї задачі (і, відповідно, пов'язаних з нею задач (1) та (5)). Дискретизація означає заміну величин \mathbf{m} , \mathbf{f} та \mathbf{u} , а також операторів A , G , J їх скінченно вимірними аналогами, тобто замість задач (1), (5), (7) отримуємо такі:

$$A^h(\mathbf{m}^h)\mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h, \quad (10)$$

$$G^h(\mathbf{m}^h) = \mathbf{g}^h, \quad (11)$$

$$J^h(\mathbf{m}^h) \rightarrow \min. \quad (12)$$

Індекс h напроти кожної змінної (оператора) означає, що дискретизація відповідних функцій і операторів проводиться на просторовій (або просторово-часовій) сітці з певним кроком.

Методи визначення мінімуму дискретизованої задачі (12) є основою сучасної теорії зворотних задач з розподіленими параметрами [4]. Саме від розробки ефективних методів мінімізації залежать успіхи у розв'язанні зворотних задач з вектором невідомих \mathbf{m}^h досить високої розмірності. Існують два принципово різних класи методів оптимізації для розв'язання подібних задач: градієнтні методи та методи стохастичного пошуку. Розглянемо перший клас методів. Їх перевага – порівняно висока ефективність за правильного “налагодження” всіх складових числового алгоритму. Недоліком є те, що з їх допомогою неможливо дослідити глобальну структуру функції, яка мінімізується, наявність, кількість і розташування локальних мінімумів тощо.

Загальна схема алгоритмів градієнтного спуску може бути записана в такий спосіб.

Алгоритм **GRADIENT_SEARCH**($h, \mathbf{m}_0^h, n_{\max}$)

// h – параметр дискретизації, \mathbf{m}_0^h – початкове наближення, n_{\max} – кількість ітерацій алгоритму.

Begin

For $n:=0$ to $n_{\max}-1$

Begin

$$\hat{\gamma}_n \leftarrow \left(\frac{\partial J^h}{\partial \mathbf{m}^h} \right)_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_n^h} \quad // \text{Обчислення градієнта функціонала } J^h$$

$$\phi_n \leftarrow \mathbf{F}_n \hat{\gamma}_n \quad // \text{Обчислення напрямку пошуку}$$

$$\mathbf{m}_{n+1}^h \leftarrow \mathbf{m}_n^h - \mu_n \phi_n \quad // \text{Оновлення вектора наближеного розв'язку}$$

End

Повернути $\mathbf{m}_{n_{\max}}^h$.

End

Напрямок пошуку ϕ_n у цьому алгоритмі формується дією на вектор градієнта $\hat{\gamma}_n$ певного оператора \mathbf{F}_n , який також називається *передобумовлювачем*. Цей оператор може залежати і не залежати від значень градієнта (а також вектора напряму пошуку ϕ), отриманого на попередніх ітераціях. Залежно від цього розрізняють багатокрокові (спряжених градієнтів, змінної метрики) та однокрокові (найшвидшого спуску, Ньютона тощо) методи. Параметр μ_n визначає величину кроку градієнтного спуску й обчислюється за умови мінімуму величини $J^h(\mathbf{m}_n^h - \mu_n \phi_n)$ (так званий *лінійний пошук*).

Важливий елемент у подібних алгоритмах – обчислення компонент вектора градієнта $\hat{\gamma}_n$, а в багатьох випадках – також *гессіана*:

$$\hat{\mathbf{H}}_n = \frac{\partial \hat{\gamma}_n}{\partial \mathbf{m}^h}.$$

Звичайно, в переважній більшості випадків не вдається отримати аналітичні формули для компонент $\hat{\gamma}_n$ та $\hat{\mathbf{H}}_n$, тобто для їх обчислення ми маємо використовувати наближені методи, зокрема різницеві апроксимації. Це означає, що для обчислення компонент градієнта через формули (10)–(12) необхідно виконати $O(N_{mh})$ розв'язань початкової “прямої” задачі (10), де через N_{mh} позначено кількість компонент вектора \mathbf{m}^h . Для компонент гессіана $\hat{\mathbf{H}}_n$ подібна оцінка становить $O(N_{mh}^2)$ розв'язків. Очевидно, розв'язання прямих задач для обчислення названих компонент – левова частина всієї обчислювальної роботи, необхідної для визначення наближеного розв'язку \mathbf{m}^h зворотної задачі. Тому, зрозуміло, ефективне розв'язання прямої задачі є важливою умовою формування алгоритмів для наближеного обчислення розв'язку зворотної задачі. Отже, основні вимоги до методів розв'язання задачі (10) можна сформулювати так.

1. Числовий алгоритм має бути ефективним сам по собі, забезпечуючи знаходження наближеного розв'язку задачі (10) “на рівні похибки дискретизації” за якомога меншу кількість арифметичних операцій.

2. Алгоритм має за можливості “постачати” для оптимізації добре початкове наближення \mathbf{m}_0^h , що дозволяло б за невелику кількість ітерацій алгоритму **GRADIENT_SEARCH** досягати заданого рівня точності.

Одним з методів, який відповідає зазначеним вимогам, є багатосітковий метод [2], особливо ефективний для розв'язання граничних задач з оператором A (1) еліптичного типу. Метод ґрунтується на розв'язанні задачі (10) на послідовності просторових сіток з параметрами дискретизації $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_K$. Індекс “0” відповідає найкрупнішій сітці (сітці найвищого рівня), індекс “K” – найдрібнішій (сітці найнижчого рівня). Тобто замість дискретизованих задач (10)–(12) ми маємо послідовність задач:

$$A^k(\mathbf{m}^k)\mathbf{u}^k = \mathbf{f}^k, \quad (13)$$

$$G^k(\mathbf{m}^k) = \mathbf{g}^k, \quad (14)$$

$$J^k(\mathbf{m}^k) \rightarrow \min, k = 0, 1, \dots, K. \quad (15)$$

Основою будь-якого багатосіткового алгоритму є так званий *цикл уточнення наближеного розв'язку* рівняння (13) на *грубих сітках* (Coarse-Grid Correction Cycle, CGC-Cycle), який визначається рекурсивно в такий спосіб (\mathbf{m}^k та \mathbf{f}^k вважаються заданими).

Алгоритм **CGC_CYCLE**($k, \mathbf{u}_k^{(0)}, \gamma$)

// k – рівень сітки, $\mathbf{u}_k^{(0)}$ – початкове наближення, γ – параметр циклу.

Begin

1. Якщо $k = 0$, рівняння (13) розв’язується прямим методом. У результаті розв’язку отримується величина $\mathbf{u}_k^{(1)}$. Перейти до пункту 9.

2. (Пререлаксація). Провести v_1 згладжувальних ітерацій за формулою:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^{(0)} \leftarrow S_k^{v_1} \mathbf{u}_k^{(0)},$$

де S_k – оператор релаксаційної схеми.

3. Обчислення нев’язки за формулою:

$$\mathbf{r}^k \leftarrow A^k(\mathbf{m}^k) \tilde{\mathbf{u}}_k^{(0)} - \mathbf{f}^k.$$

4. Проектування нев’язки на грубу сітку (рівня на одиницю нижче):

$$\mathbf{r}^{k-1} \leftarrow R_k^{k-1} \mathbf{r}^k,$$

де R_k^{k-1} – оператор проектування з дрібної сітки на грубішу.

5. Обчислення та уточнення вектора поправки \mathbf{e}^{k-1} на грубій сітці, тобто наближеного розв’язання рівняння $A^{k-1}(\mathbf{m}^{k-1}) \mathbf{e}^{k-1} = \mathbf{r}^{k-1}$, рекурсивно за допомогою цього ж алгоритму, починаючи з нульового початкового наближення:

$$\tilde{\mathbf{e}}_k^{(0)} \leftarrow \mathbf{0}.$$

For $i \leftarrow 1$ to γ do $\tilde{\mathbf{e}}_{k-1}^{(i)} \leftarrow \mathbf{CGC_CYCLE}(k-1, \tilde{\mathbf{e}}_{k-1}^{(i-1)}, \gamma)$.

6. Інтерполяція отриманої поправки $\tilde{\mathbf{e}}_{k-1}^{(\gamma)}$ на дрібну сітку (рівня на одиницю вище):

$$\mathbf{e}^k \leftarrow P_{k-1}^k \tilde{\mathbf{e}}_{k-1}^{(\gamma)},$$

де P_{k-1}^k – оператор інтерполяції з грубої сітки на дрібнішу.

7. Корекція:

$$\hat{\mathbf{u}}_k^{(1)} \leftarrow \tilde{\mathbf{u}}_k^{(0)} + \mathbf{e}^k.$$

8. (Пострелаксація). Проведення додаткових v_2 згладжувальних ітерацій за формулою:

$$\mathbf{u}_k^{(1)} \leftarrow S_k^{v_2} \hat{\mathbf{u}}_k^{(1)}.$$

9. Повернути результат $\mathbf{u}_k^{(1)}$.

End

Залежно від значення параметра γ в алгоритмі **CGC_CYCLE** розрізняють V-цикл ($\gamma = 1$) та W-цикл ($\gamma = 2$).

Повний багатосітковий алгоритм (Full Multigrid Cycle – FMG-Cycle) розв’язання за-

дачі (13) на послідовності сіток застосовує таку основну ідею: розв'язувати задачу, починаючи з найгрубішої сітки, використовуючи наближений розв'язок на сітці рівня k як початкове наближення для задачі на рівні $k + 1$. При цьому оператор інтерполяції з грубішої сітки \tilde{P}_{k-1}^k необов'язково має збігатися з відповідним оператором P_{k-1}^k в алгоритмі **CGC_CYCLE**.

Алгоритм **FMG_CYCLE**(γ, γ_1)

// γ – параметр циклу корекції розв'язку на грубішій сітці

// γ_1 – кількість циклів корекції на кожному рівні k

Begin

$\tilde{\mathbf{u}}_0 \leftarrow \text{CGC_CYCLE}(0, \mathbf{0}, \gamma)$

For $k \leftarrow 1$ to K

Begin

1. Інтерполяція наближеного розв'язку з грубішої сітки

$\tilde{\mathbf{u}}_k \leftarrow \tilde{P}_{k-1}^k \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}$.

2. Уточнення наближеного розв'язку на рівні k .

For $i \leftarrow 1$ to γ_1

$\tilde{\mathbf{u}}_k \leftarrow \text{CGC_CYCLE}(k, \tilde{\mathbf{u}}_k, \gamma)$.

End

3. Повернути $\tilde{\mathbf{u}}_K$.

End

Для розв'язання задачі мінімізації (15) на послідовності сіток пропонується такий аналог наведеного вище повного багатосіткового алгоритму.

Алгоритм **MG_SEARCH**($\tilde{\mathbf{m}}_0$)

// $\tilde{\mathbf{m}}_0$ – початкове наближення на найгрубішій сітці

Begin

For $k \leftarrow 0$ to K

Begin

1. Якщо $k > 0$, то провести інтерполяцію наближеного розв'язку з грубішої сітки

$\tilde{\mathbf{m}}_k \leftarrow \tilde{P}_{k-1}^k \tilde{\mathbf{m}}_{k-1}$.

2. Провести n_k ітерацій градієнтного пошуку

$\tilde{\mathbf{m}}_k \leftarrow \text{GRADIENT_SEARCH}(\mathbf{h}_k, \tilde{\mathbf{m}}_k, n_k)$.

End

3. Повернути $\tilde{\mathbf{m}}_K$.

End

Для наближеного обчислення компонент градієнтів та гессіанів в алгоритмі градієнтного пошуку використовуються описані алгоритми **CGC_CYCLE** або **FMG_CYCLE**.

Висновки з даного дослідження та перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Головна ідея запропонованого алгоритму **MG_SEARCH** – перенести основну частину роботи з формування досить точного початкового наближення для задачі (15) при $k = K$ на грубі сітки. При цьому для уточнення сформованого наближення знадобиться невелика кількість n_k ітерацій градієнтного пошуку. Зрозуміло, що значення кількості ітерацій n_k на кожному рівні k має бути узгодженим з похибкою дискретизацій задачі (1) на кожному рівні. Для кожної конкретної задачі (1) питання про визначення величин n_k має вирішуватися шляхом додаткового дослідження.

Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
2. Trottenberg U. Multigrid / Trottenberg U., Oosterlee C. W., Schuller A. – New York : Academic Press, 2001. – 644 p.
3. Tarantola A. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation / Tarantola A. – Philadelphia : SIAM, 2005. – 358 p.
4. Vogel C. R. Computational Methods for Inverse Problems / Vogel C. R. – Philadelphia : SIAM, 2002. – 193 p.

Шановні автори!

Просимо враховувати такі вимоги до рукописів статей і порядку їх подання до друку.

1. Приймаються роботи, написані українською, російською, англійською мовами, обсягом 0,5–1 авт. арк.

2. Рукопис статті повинен мати такі елементи:

– на початку статті **англійською мовою**: прізвище ініціали автора, назва статті, адресні дані авторів (назва установи, закладу, відомча належність, адреса організації, місто, країна), розширена англomовна анотація (700–1300 знаків), ключові слова, пристатейні списки використаних джерел у романському алфавіті (латиницею);

– **прізвище та ініціали автора, науковий ступінь, посада (укр. мовою)**;

– **назва статті (українською мовою)**;

– **УДК**;

– **анотація українською мовою** (3–5 рядків);

– **анотація англійською мовою** (4–5 рядків);

– **основний текст статті**;

– **список використаних джерел**.

3. Основний текст статті складається з таких структурних елементів:

Ключові слова (4–5 слів).

Постановка проблеми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Мета статті.

Виклад основного матеріалу.

Висновки з даного дослідження та перспективи подальших розвідок у даному напрямку.

Список використаних джерел оформлюється відповідно до державних стандартів бібліографії.

Зазначені елементи виділяються в рукописі **напівжирним шрифтом**.

4. Стаття має бути набрана в текстовому редакторі Microsoft Word. Поля з усіх сторін – 20 мм. Шрифт – Times New Roman 14 з інтервалом 1,5.

Посилання на літературу здійснюються безпосередньо в тексті. У квадратних дужках зазначається порядковий номер використаного джерела в порядку згадування, а через кому – конкретна сторінка.

5. До редакції подаються:

– **паперовий варіант статті за підписом автора**;

– **електронний варіант статті**;

– **завірена рецензія доктора або кандидата наук відповідного профілю (крім випадків, коли автор сам має науковий ступінь доктора наук)**;

– **довідка про автора українською мовою** (прізвище, ім'я, по батькові повністю, організація, посада, адреса, науковий ступінь, вчене звання, контактні телефони, електронна адреса).

Передрук матеріалів дозволяється лише за письмової згоди редакції.

Матеріали, що публікуються, відображають позицію автора, яка може не збігатися з поглядом редакції. За достовірність фактів, статистичних даних та іншої інформації відповідальність несе автор.

Редакція залишає за собою право наукового та літературного редагування статей без додаткової консультації з автором. Листування з читачами ведеться лише на сторінках журналу.