Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)

Том 12 • № 1 • 2016 С. 62 – 66

УДК 519.61(045)

Тригонометричні сплайни та їх застосування для розв'язання деяких задач небесної механіки

В.П. Денисюк, О.В. Негоденко*

Національний авіаційний університет

Розглянуто чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь руху небесних тіл. Запропоновано метод побудови наближених розв'язків першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами у вигляді тригонометричних сплайнів з використанням методу фантомних вузлів. Невизначені параметри визначаються методом колокацій.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ НЕБЕСНОЙ МЕХАНIКИ, Денисюк В.П., Негоденко Е.В. — Рассмотрены численные методы решения дифференциальных уравнений движения небесных тел. Предложен метод построения приближенных решений первой краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в виде тригонометрических сплайнов с использованием метода фантомных узлов. Неопределенные параметры определяются методом коллокации.

TRIGONOMETRIC SPLINES AND THEIR APPLICATIONS TO SOLVE SOME PROBLEMS OF CELESTIAL MECHANICS, by Denysiuk V.P., Negodenko E.V. — There was suggested a method of constructing approximate solutions of the first boundary problem for ordinary differential equations of the second order with variable coefficients in trigonometric polynomials using the phantom nodes method. Unknown parameters are determined by collocation. An example is given; it is shown that the relative error of the solution has reduced times with the introduction of phantom nodes.

Ключевые слова: небесні тіла; диференціальні рівняння; фантомні вузли; сплайни.

Key words: celestial bodies; differential equations; phantom nodes; splines.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Для прогнозування руху небесних тіл звичайно використовують чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь руху цих тіл.

В багатьох наукових виданнях [6–9] можна знайти виведення диференціальних рівнянь руху небесних тіл і детальний опис їх властивостей. Там же розглянуто деякі види диференціальних рівнянь, для знаходження розв'язку яких використовують чисельні методи.

Задача про рух небесних тіл є задачею Коші

$$y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

де $y = \{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_s(t)\}$, а y_0 — задано. Якщо функція $f(t, y)$ задовольняє умову Ліпшица

$$\|f(t, y_1 - f(t, y_2)\| \leqslant L\|y_1 - y_2\| \tag{2}$$

для всіх $t \in [t_0, T]$ і для всіх s компонентів векторів y_1 і y_2, то при цих припущеннях можна довести існування єдиного розв'язку задачі (1), якщо він існує [1].

Для розв'язку задачі Коші застосовують різні чисельні методи, які умовно можна поділити на дві групи — суто чисельні та чисельно-аналітичні. Чисельні методи не передбачають аналітичний вигляд розв'язку і дозволяють знаходити лише значення шуканого розв'язку при певних значеннях аргументу.

Чисельно-аналітичні розв'язки отримують у припущенні, що шуканий розв'язок має заданий аналітичний вигляд, що залежить від певної кількості невизначених параметрів; знаходження такого розв'язку полягає у визначенні значень цих параметрів.

Переваги чисельних методів у порівнянні з чисельно-аналітичними полягають у відносній простоті їх реалізації. До переваг же чисельно-аналітичних методів слід віднести можливість врахування деяких аналітичних властивостей шуканого розв'язку, які часто бувають відомі апріорі.

До чисельних методів, що найчастіше використовуються в небесній механіці, слід віднести однокрокові методи типу Рунге–Кути, Батчера, Еверхарта тощо, та багатокрокові методи Адамса-Мультона-Коуелла тощо.

* Негоденко Олена Василівна; ✉ negodenkoav@i.ua

У цих методів є спільні риси (елементи апроксимації поліномами, оцінка точності обчислень, крок чисельного інтегрування, інтервал надійності розрахунку) і суттєві відмінності (застосування поділених різниць, використання похідних, кількість кроків, наявність невідомих величин в правій частині нелінійних рівнянь).

Суттєво інший спосіб побудови неявних однокрокових алгоритмів типу Рунге–Кути запропонував Е.Еверхарт [10], який використав ряд за степенями незалежної змінної.

В небесній механіці диференціальні рівняння умовно можна поділити на три класи. Рівняння першого класу має вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t), \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

де $x_i(t)$ — шукані функції, а функції $f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ задають таким чином, щоб їх можна було знайти при довільних заданих значеннях аргументів.

До другого класу відносяться рівняння другого порядку виду

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i\left(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt}, t\right), \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{4}$$

Третій клас рівнянь найчастіше зустрічається в небесній механіці і має вигляд

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t), \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

В методі Еверхарта використовуються спеціальні апроксимуючі поліноми за степенями кроку інтегрування. Степінь цих поліномів вибирають із досліджених: 7, 11, 15, 19, 23, 27. В процесі розрахунків можна взяти одне із цих значень, але при невисокій заданій точності інтегрування нераціонально задавати високу степінь поліномів.

Виявилося, що алгоритм обчислень, не вимагаючи інформації про положення об'єкта в попередні моменти часу, об'єднує всі переваги багатокрокових методів (кінцеві різниці високого порядку в чисельному вигляді) і неявних методів (прогноз і корекція) [2].

До чисельно-аналітичних методів слід віднести методи типу Бубнова–Гальоркіна; зрозуміло, що певною модифікацією цього методу є і метод рядів.

Серед різноманітних чисельно-аналітичних методів практично відсутні методи, при яких шуканий розв'язок наближається тригонометричними многочленами.

Така ситуація пояснюється тим, що при застосуванні тригонометричних многочленів в задачах відшукання наближених розв'язків диференціальних рівнянь в загальному випадку на кінцях відрізку наближення виникають розриви шуканої функції; зрозуміло, що в околі цих розривів спостерігається відоме явище Гіббса, що суттєво знижує точність отримуваних розв'язків диференціальних рівнянь.

Одним із методів подолання шкідливого впливу явища Гіббса є методи Λ-підсумовування тригонометричних многочленів, які дозволяють майже повністю усунути вплив явища Гіббса у середній частині відрізку наближення [4, 5]. Проте на кінцях цього відрізку, в безпосередніх околах точок розриву, похибки розв'язку практично не зменшуються.

Останнім часом в теорії наближень привертають увагу поліноміальні сплайни. Проте составна природа цих сплайнів значною мірою ускладнює їх застосування в задачах знаходження наближенипх розв'язків диференціальних рівнянь.

В роботі [3] впроваджено тригонометричні сплайни, які є періодичними. Такі сплайни зручно застосовувати для відшукання періодичних розв'язків. Але періодичність є і недоліком для тригонометричних сплайнів. Оскільки більшість функцій, що зустрічаються на практиці, не є періодичними, то постає питання про їх періодичне продовження.

Спосіб періодичного продовження функції на всю числову вісь досліджував А.С.Малієв для покращення збіжності ряду Фур'є. При відшуканні ж неперіодичних розв'язків вплив періодичності можна значно послабити, застосовуючи запропонований в роботі метод фантомних вузлів, що є узагальненням методу Малієва.

2. ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ВИГЛЯДІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СПЛАЙНІВ

Мета роботи полягає в розробці методики знаходження наближеного розв'язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого класу (4) із використанням методу фантомних вузлів; дослідження похибки наближеного розв'язку на типовому прикладі.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = f(t), \qquad t \in [0,\ 2\pi - \alpha] \tag{6}$$

та крайовими умовами

$$u(0) = A, \qquad u(2\pi - \alpha) = B, \tag{7}$$

де α, $0 < \alpha < 2\pi$ — параметр стискання, значення якого ми виберемо пізніше.

Наближений розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді тригонометричного сплайна

$$S_{t_r}(f,\Delta_N,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(r,N)\left[a_k^*\Phi_k^c(r,N,t)+b_k^*\Psi_k^s(r,N,t)\right],$$

де

$$\Phi_k^c(r,N,t)=\frac{\cos kt}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{\cos(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right),$$

$$\Psi_k^s(r,N,t)=\frac{\sin kt}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}-\frac{\sin(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right),$$

$$[\alpha_k(r,N)]^{-1}=\frac{1}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{1}{(mN-k)^{r+1}}\right),$$

$$a_0=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i),\quad a_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i)\cos kt_i,\quad b_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i)\sin kt_i,\quad k=1,2,...,n.$$

Зрозуміло, що цей розв'язок містить $2n+1$ невизначених параметрів $a_0,a_1,...,a_n,\ b_1,...,b_n$.

Підставляючи тригонометричний сплайн в (6), (7), отримуємо

$$S_k''+p(t)S_k'(t)+q(t)S_k(t)=f(t), \tag{8}$$

з крайовими умовами

$$S_k(0)=A,\qquad S_k(2\pi-\alpha)=B. \tag{9}$$

Нев'язка $\varepsilon(t)$ рівняння (8) має вигляд

$$\varepsilon(t)=S_k''+p(t)S_k'(t)+q(t)S_k(t)-f(t).$$

Для визначення параметрів $a_0,a_1,...,a_n,\ b_1,...,b_n$ задамо на відрізку $[0,2\pi]$ $2n+1$ точок t_i, $(i=1,...,2n+1)$ з урахуванням того факту, що тригонометричний сплайн $S_k(t)$ в силу періодичності приймає однакові значення у точках 0 і 2π. Враховуючи це, задамо точки t_i, $(i=1,...,2n+1)$, таким чином,

$$t_i=\frac{2\pi}{2n+1}(i-1),\qquad i=1,...,2n+1.$$

Тоді для визначення параметрів $a_0,a_1,...,a_n,\ b_1,...,b_n$ маємо таку систему рівнянь

$$S_k(t_1)=A;\qquad \varepsilon(t_i)=0,\quad i=2,3,...,2n;\qquad S_k(t_{2n+1})=B. \tag{10}$$

Зрозуміло, що в даному випадку ми покладаємо $\alpha=\frac{2\pi}{2n+1}$.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо значення невизначених параметрів $a_0,a_1,...,a_n,\ b_1,...,b_n$.

В багатьох випадках зручнішим є застосування іншої форми тригонометричного сплайна. Ця форма має вигляд

$$S_k(t)=\sum_{k=1}^{2n+1}f_kS(k,t), \tag{11}$$

де

$$S(k,t)=\frac{1}{N}\left(1+2\sum_{j=1}^{(N-1)/2}c(j,t)\cos(j\cdot x_k)+2\sum_{j=1}^{(N-1)/2}s(j,t)\sin(j\cdot x_k)\right) \tag{12}$$

$$c(k,t)=\frac{\dfrac{\cos(k,t)}{k^{r+1}}+\sum\limits_{m=1}^{p}\dfrac{\cos[(mN+k)\cdot t]}{(mN+k)^{r+1}}+\sum\limits_{m=1}^{p}\dfrac{\cos[(mN-k)\cdot t]}{(mN-k)^{r+1}}}{\dfrac{1}{k^{r+1}}+\sum\limits_{m=1}^{p}\dfrac{1}{(mN+k)^{r+1}}+\sum\limits_{m=1}^{p}\dfrac{1}{(mN-k)^{r+1}}},$$

$$s(k,t)=\frac{\dfrac{\sin(k,t)}{k^{r+1}}+\sum\limits_{m=1}^{p}\dfrac{\sin[(mN+k)\cdot t]}{(mN+k)^{r+1}}+\sum\limits_{m=1}^{p}\dfrac{\sin[(mN-k)\cdot t]}{(mN-k)^{r+1}}}{\dfrac{1}{k^{r+1}}+\sum\limits_{m=1}^{p}\dfrac{1}{(mN+k)^{r+1}}+\sum\limits_{m=1}^{p}\dfrac{1}{(mN-k)^{r+1}}},$$

а f_k, $(k=1,2,...,2n+1)$ — невизначені параметри.

Оскільки

$$S(k,t_j)=\begin{cases}1, & k=j;\\ 0, & k\neq j,\end{cases} \tag{13}$$

то зрозуміло, що невизначені параметри f_k, $(k=1,2,...,2n+1)$ являють собою значення наближеного шуканого розв'язку у вузлових точках t_k, $(k=1,2,...,2n+1)$.

Підставляючи вирази (11), (12) в рівняння (6) з урахуванням крайових умов (7) та виразу (13), отримуємо таку систему рівнянь

$$f_1 = A; \qquad \varepsilon(t_i) = 0, \quad i = 2,3,...,2n; \qquad f_{2n+1} = B. \tag{14}$$

Як ми вже казали раніше, при такому підході у точках 0 і 2π спостерігається явище Гіббса. Для послаблення впливу цього явища застосуємо метод фантомних вузлів покращення збіжності тригонометричних многочленів. Для цього збільшимо кількість точок на парне число; значення у цих точках, які ми позначимо $B_1, B_2, ..., B_{2m}$, $(m = 1,2,...)$, можна вибрати, наприклад, обчислюючи у відповідних точках значення прямої, що з'єднує точки B та A. Тоді система рівнянь (14) для двох фантомних вузлів набуває вигляду

$$f_1 = A; \qquad \varepsilon(t_i) = 0, \quad i = 2,3,...,2n; \quad f_{2n+1} = B; \quad f_{2n+2} = B_1; \quad f_{2n+3} = B_2, \tag{15}$$

де

$$t_i = \frac{2\pi}{2n+3}(i-1), \quad i = 1,...,2n+3; \qquad \alpha = \frac{2\pi \cdot 3}{2n+3}.$$

Для чотирьох фантомних вузлів система рівнянь набуває вигляду

$$f_1 = A; \qquad \varepsilon(t_i) = 0, \quad i = 2,3,...,2n; \quad f_{2n+1} = B; \quad f_{2n+2} = B_1; \quad f_{2n+3} = B_2; \quad f_{2n+4} = B_3; \quad f_{2n+5} = B_4; \tag{16}$$

де

$$t_i = \frac{2\pi}{2n+5}(i-1), \quad i = 1,...,2n+5; \qquad \alpha = \frac{2\pi \cdot 5}{2n+5}.$$

Зрозуміло, що відносна похибка наближених розв'язків, отриманих таким чином, залежить від кількості фантомних точок та від способу вибору значень у цих фантомних точках. Ми обмежились розглядом випадку, коли кількість фантомних точок є невеликою (2 та 4 фантомні точки); значення ж у цих фантомних точках вибиралися, використовуючи різні способи. Для тестування даного методу розглядалась крайова задача

$$u''(t) = 0, \qquad u(0) = 1, \qquad u(2\pi - \alpha) = 9,$$

для якої шукали наближений розв'язок. Результати обчислень наводяться в табл. 1.

Таблиця 1. Відношення відносних похибок розв'язків диференціального рівняння без фантомних вузлів до відносної похибки з фантомними вузлами

Кількість вузлових точок	Кількість фантомних вузлів	Лінійна інтерполяція	З урахування I похідної	З урахування I та II похідних	Значення підібрані
5	2	2,5	2,8	4,2	5,2
	4	3,2	6,4	12,3	25,7
9	2	2,95	4,79	8,52	8
	4	4,12	8,85	17,69	250

Способи вибору значень у фантомних вузлах відкривають можливість використовувати більший обсяг інформації при відшуканні наближеного розв'язку; інакше кажучи, через значення у фантомних вузлах непрямим чином використовуються додаткові відомості про шуканий розв'язок.

3. ВИСНОВКИ

Проведено аналіз чисельних методів для розв'язання задач небесної механіки; досліджено метод знаходження наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь виду (4) для випадків, коли цей розв'язок наближується тригонометричними сплайнами.

Запропоновано метод фантомних вузлів, що є методом періодичного продовження неперіодичних функцій, застосування якого дозволяє враховувати диференціальні властивості отримуваних періодичних функцій з диференціальними властивостями вихідної неперіодичної функції та дозволяє значно зменшити похибки наближення функції.

Цей метод заснований на тому, що розв'язок шукається у вигляді тригонометричних сплайнів, які залежать від невизначених параметрів, для знаходження яких складається система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Характерною особливістю даного методу є те, що в ролі невизначених параметрів виступають значення шуканого розв'язку. Це дозволяє виділяти області розбіжності, оскільки тригонометричні сплайни мають фундаментальну форму подання і дозволяють змінювати диференціальні властивості шуканих розв'язків. Застосування тригонометричних сплайнів через фундаментальні функції дозволяє отримати розв'язки в масштабі реального часу. Тому даний метод є цікавим для розв'язання теоретичних задач небесної механіки.

1. *Баканас Е.С., Барабанов С.И., Болгова Г.Т., Микиша А.М., Рыхлова Л.В., Смирнов М.А.* Астрономический аспект проблемы космической защиты Земли // Труды конференции «Околоземная астрономия». — 2003. — том 1. — С.16–37.
2. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. — М.: Наука, 1984. — 136 с.

3. *Денисюк В.П.* Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни: Монографія. — К: ПАТ «Віпол», 2015. – 296 с.
4. *Дзядык В.К.* Введение в теорію равномерного приближения функцій полиномами. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
5. *Хэмминг Р.* Численные методы. — М.: Наука, 1972. — 400 с.
6. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1968. — 800 с.
7. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. — М.: Наука, 1968. — 800 с.
8. *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли. — М.: Наука, 1977. — 360 с.
9. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. — М.: Наука, 1975. — 304 с.
10. *Everhart E.* Implicit single-sequence methods for integrating orbits // Cel. Mech. Dyn. Astr. — 1974. — **10**. — P.35–55.

Надійшла до редакції 22.08.2016
Прийнята до друку 14.09.2016