Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)
Том 12 • № 2 • 2016 С. 142 – 146

УДК 519.62(45)

Побудова наближених розв'язків диференціальних рівнянь із застосуванням фундаментальних функцій

В.П. Денисюк, О.В. Негоденко*

Національний авіаційний університет

Запропоновано метод побудови наближених розв'язків першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами із застосуванням фундаментальних функцій. Наведено приклад; показано, що відносна похибка розв'язку зменшилася при введенні фантомних вузлів.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, Денисюк В.П., Негоденко Е.В. — Предложен метод построения приближенных решений первой краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами с применением фундаментальных функций. Приведен пример; показано, что относительная погрешность решения уменьшилась при введении фантомных узлов.

CONSTRUCTING APPROXIMATE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS USING FUNDAMENTAL FUNCTIONS, by Denysiuk V.P., Negodenko E.V. –– There was suggested a method of constructing approximate solutions of the first boundary problem for ordinary differential equations of the second order with variable coefficients in fundamental functions. An example is given; it is shown that the relative error of the solution has reduced after introduction of phantom nodes.

Ключевые слова: интерполяция; фундаментальные функции; явление Гиббса; фантомные точки.

Key words: interpolation; fundamental function; the Gibbs phenomenon; phantom nodes.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В багатьох задачах науки і техніки для кількісного опису фізичних явищ використовують математичні моделі. Такі моделі часто являють собою системи звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь з частинними похідними, на які накладають певні крайові та початкові умови. Надалі знаходять розв'язки цих систем, які задовольняють цим умовам. Проте тут виникають певні труднощі, оскільки точному розв'язанню підлягає лише невеликий клас диференціальних рівнянь. Тому виникає необхідність знаходити наближені розв'язки поставлених задач.

Наближені методи побудови розв'язків диференціальних рівнянь можна поділити на два класи. До одного з них належать методи, які дозволяють обчислювати значення наближеного розв'язку на деякій множині дискретних точок. До таких методів належать відомі методи Ейлера, Рунге–Кута тощо. Такі методи часто називають чисельними.

До другого класу належать методи побудови наближених частинних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь, що ґрунтуються на достатньо загальному принципі, який полягає у наступному. Частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння може бути апроксимованим деякою функцією, що залежить від певної кількості параметрів. Чисельні значення цих параметрів вибираються виходячи з умов мінімізації деякого функціонала, що характеризує відхилення апроксимуючої функції від шуканого розв'язку. В залежності від того чи іншого представлення мінімізації відхилення апроксимуючої функції від шуканого розв'язку, отримуємо той чи інший конкретний метод побудови наближеного частинного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь. Такі методи називають чисельно-аналітичними [4, 6].

Серед різних типів чисельно-аналітичних методів найчастіше зустрічається випадок, коли яких шуканий розв'язок на відрізку $[0,T]$ можна подати у вигляді

$$u \approx \hat{u} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \psi_j, \qquad (1)$$

де $\{\psi_j; j=1,2,...\}$ — система лінійно незалежних (зокрема, ортогональних) *базисних функцій*, α_j $(j=1,2,...,N)$ — невизначені параметри.

Існують різні способи визначення параметрів α_m, які входять до виразу (1) [3]. У даній роботі ми обмежимось розглядом лише методу колокацій, який полягає в наступному.

* Негоденко Олена Василівна; ✉ negodenkoav@i.ua

Нехай маємо крайову задачу для звичайного лінійного диференціального рівняння

$$L_m u(x) = f(x); \quad m = 1, 2, ... \tag{2}$$

з крайовими умовами

$$u(0) = u_0, \qquad u(T) = u_T. \tag{3}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_N^*(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n(x). \tag{4}$$

Підставляючи $u_N^*(x)$ в (2), отримуємо нев'язку

$$\varepsilon(x, \alpha_1, ..., \alpha_N) = L_m u_N^*(x) - f(x).$$

Задамо на відрізку $[0, T]$ рівномірну сітку $\Delta_N = \{x_j\}_{j-1}^N$, $x_j = \frac{T}{N-1}(j-1)$, $N = 2n+1$, $n = 1, 2, ...$ Як відомо [3], метод колокацій полягає в тому, що невизначені параметри шукають з системи рівнянь

$$\varepsilon(x_j, \alpha_1, ..., \alpha_N) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., N.$$

При застосуванні методу колокацій важливу роль відіграє вибір базисних функцій ψ_j, $j = 1, 2, ..., N$, що входять до (3). В даній роботі ми розглянемо випадок, коли в ролі базисних функцій виступають фундаментальні функції.

Як відомо [5], фундаментальними на сітці Δ_N називають функції, які задовольняють умовам

$$\psi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, ..., N.$$

Застосування фундаментальних функцій в задачах побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь має ряд переваг, головною з яких є те, що в ролі невизначених параметрів в (2) виступають значення наближеного шуканого розв'язку у вузлових точках x_j, $j = 1, ..., N$. Зрозуміло, що постановка задачі у термінах вузлових точок дозволяє асоціювати параметри з обмеженими частинами в загальному випадку просторових областей, що включають ці вузлові точки. Цей факт є дуже корисним, оскільки вивчення нев'язок такого рівняння дозволяє виявити ті підобласті, де збіжність розв'язків є повільною (або навпаки, швидкою) [4].

2. ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Дослідимо питання застосування фундаментальних функцій в задачах побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь детальніше.

Розглянемо крайову задачу для лінійного диференціального рівняння

$$Lu = f(t), \qquad t \in [0, T] \tag{5}$$

та крайовими умовами

$$u(0) = u_0, \qquad u(T) = u_T. \tag{6}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_N^*(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n(x), \tag{7}$$

де ψ_j, $j = 1, 2, ..., N$ — фундаментальні функції.

Підставляючи $u_N^*(x)$ в (5), отримуємо нев'язку

$$\varepsilon(x, \alpha_1, ..., \alpha_N) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j L\psi_j(x) - f(x).$$

Обчислюючи вирази $L\psi_j(x_i)$, $i, j = 1, 2, ..., N$, отримуємо систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j L\psi_j(x_i) - f(x_i) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., N. \tag{8}$$

Враховуючи фундаментальність функцій ψ_1 та ψ_N, можна відразу покласти

$$\psi_1 = u_0, \qquad \psi_N = u_T.$$

Розв'язуючи отриману систему $N-2$ рівнянь, знаходимо значення інших невизначених параметрів α_j, $j = 2, ..., N-1$.

В ролі фундаментальних базисних функцій можна вибирати, наприклад, поліноміальні фундаментальні функції, функції типу $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$, тригонометричні фундаментальні функції, тригонометричні фундаментальні сплайни тощо [5]. Проте застосування кожного із перелічених класів функцій має свої особливості. Враховуючи, що серед відомих чисельно-аналітичних методів практично відсутні методи, при яких шуканий розв'язок наближається тригонометричними многочленами, в даній роботі ми обмежимось розглядом саме тригонометричних фундаментальних функцій, покладаючи при цьому для простоти $T = 2\pi$. Ці функції мають вигляд

$$S_k(t) = \frac{1}{2n+1}\left[1 + 2\sum_{j=1}^{n}\cos j(t-t_k)\right]. \tag{9}$$

З використанням (9) наближений розв'язок будемо шукати у вигляді

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{2n+1}\alpha_k S_k(t), \tag{10}$$

де α_k, $(k = 1, 2, ..., 2n+1)$ — невизначені параметри, які, як вже було сказано, являють собою значення наближеного шуканого розв'язку у вузлових точках t_k, $k = 1, ..., 2n+1$.

Підставляючи $T_n(t)$ в (5), нескладно отримати систему рівнянь типу (8) і для цього випадку.

Проте при цьому слід враховувати такий факт. Однією з особливостей застосування тригонометричних фундаментальних функцій є те, що наближені розв'язки, отримувані з допомогою цих функцій, є періодичними. Із властивостей періодичності випливає, що в нашому випадку буде виконуватися умова $u_N^*(0) = u_N^*(2\pi)$, і, відповідно, $\psi_1 = \psi_N = u_0$. Цю ваду легко подолати, розглядаючи замість сітки Δ_N, $x_j = \frac{2\pi}{N-1}(j-1)$ сітку $\Delta'_N = \{x_j\}_{j=1}^N$, $x_j = \frac{2\pi}{N}(j-1)$. Зрозуміло, що при цьому праву границю відрізку побудови наближеного розв'язку ми ототожнюємо із вузлом сітки x_{N-1}.

Іншою складністю застосування тригонометричних фундаментальних функцій є те, що в загальному випадку при періодичному продовженні неперіодичних функцій на кінцях відрізку наближення виникають розриви шуканої функції; зрозуміло, що в околі цих розривів спостерігається відоме явище Гіббса, що суттєво знижує точність отримуваних розв'язків диференціальних рівнянь.

Одним із методів подолання шкідливого впливу явища Гіббса є методи Λ-підсумовування тригонометричних многочленів, які дозволяють майже повністю усунути вплив явища Гіббса у середній частині відрізку наближення [1, 6]. Проте на кінцях цього відрізку, в безпосередніх околах точок розриву, похибки розв'язку практично не зменшуються.

В роботі [2] було запропоновано метод фантомних вузлів покращення збіжності тригонометричних поліномів. Можна припустити, що застосування цього методу в задачах відшукання наближених розв'язків диференціальних рівнянь дозволить зменшити похибки отримуваних розв'язків. Розглянемо це питання детальніше.

Метод фантомних вузлів полягає в тому, що кількість вузлів сітки Δ'_N збільшується на парну кількість $2m$, $m = 1, 2, ...$ вузлів, які називають фантомними; значення ж у фантомних вузлах задаються, виходячи із міркувань усунення розривів розв'язку та його похідних при його періодичному продовженні. Виявляється, що застосування методу фантомних вузлів дозволяє значно зменшити шкідливий вплив явища Гіббса та зменшити похибку наближеного розв'язку. Для ілюстрації застосування методу фантомних вузлів розглянемо тестовий приклад.

Нехай маємо таку крайову задачу

$$u''(t) = 0; \qquad u(0) = 1; \qquad u(2\pi - \lambda) = 9. \tag{11}$$

Нескладно переконатися, що точним розв'язком цієї задачі буде пряма

$$u(t) = \frac{9}{2\pi}t + 1.$$

Будемо шукати наближений розв'язок задачі (11). Покладемо $N = 9$; відповідно,

$$\lambda = \frac{2\pi}{9}; \qquad t_i = \frac{2\pi}{9}(i-1), \qquad i = 1, ..., 9.$$

Складаючи систему рівнянь типу

$$f_1 = A; \qquad \varepsilon(t_i) = 0, \quad i = 2, 3, ..., 2n, \qquad f_{2n+1} = B, \tag{12}$$

і розв'язуючи її, отримуємо наближений розв'язок $T_4(t)$.

Додамо тепер два фантомних вузли; значення у цих вузлах обчислюємо, використовуючи лінійну інтерполяцію. Тепер

$$\lambda = \frac{2\pi\cdot 3}{11}; \qquad t_i = \frac{2\pi}{11}(i-1), \quad i = 1, ..., 11.$$

Точним розв'язком стає пряма

$$u(t) = \frac{8}{2\pi - \alpha}t + 1 = \frac{11}{2\pi}t + 1, \qquad t \in \left[0, \frac{8}{11}2\pi\right].$$

Складаючи систему рівнянь типу

$$f_1 = A; \qquad \varepsilon(t_i) = 0, \quad i = 2, 3, ..., 2n; \qquad f_{2n+1} = B; \qquad f_{2n+2} = B_1; \qquad f_{2n+3} = B_2; \tag{13}$$

$$t_i = \frac{2\pi}{2n+3}(i-1), \quad i = 1, ..., 2n+3; \qquad \alpha = \frac{2\pi \cdot 3}{2n+3},$$

де

$$f_{2n+2} = 6{,}333, \qquad f_{2n+3} = 3{,}666,$$

отримуємо наближений розв'язок $T_5(t)$.

Додамо тепер чотири фантомних вузли; значення у цих вузлах обчислюємо через лінійну інтерполяцію. Тепер

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot 5}{13}; \qquad t_i = \frac{2\pi}{13}(i-1), \quad i = 1, ..., 13.$$

Точним розв'язком стає пряма

$$u(t) = \frac{8}{2\pi - \alpha}t + 1 = \frac{13}{2\pi}t + 1, \qquad t \in \left[0, \frac{8}{13}2\pi\right].$$

Складаючи систему рівнянь типу

$$\begin{aligned} &f_1 = A; \\ &\varepsilon(t_i) = 0, \qquad i = 2, 3, ..., 2n; \\ &f_{2n+1} = B; \\ &f_{2n+2} = B_1; \\ &f_{2n+3} = B_2; \\ &f_{2n+4} = B_3; \\ &f_{2n+5} = B_4; \end{aligned} \tag{14}$$

$$t_i = \frac{2\pi}{2n+5}(i-1), \quad i = 1, ..., 2n+3, \qquad \alpha = \frac{2\pi \cdot 5}{2n+5},$$

де

$$f_{2n+2} = 7{,}4, \qquad f_{2n+3} = 5{,}8, \qquad f_{2n+4} = 4{,}2, \qquad f_{2n+5} = 2{,}6,$$

отримуємо наближений розв'язок $T_6(t)$.

Зрозуміло, що відносна похибка наближених розв'язків, отриманих таким чином, залежить від кількості фантомних точок та від способу вибору значень у цих фантомних точках. Ми обмежимось розглядом випадку, коли кількість фантомних точок є невеликою (2 та 4 фантомні точки); значення ж у цих фантомних точках ми будемо вибирати виходячи з таких міркувань. У випадку, якщо відсутні відомості про похідні шуканого розв'язку, будемо застосовувати лінійну інтерполяцію. Якщо ж є оцінки першої або першої та другої похідних шуканого розв'язку, то значення у фантомних вузлах будемо вибирати з використанням цих оцінок. Нарешті, інколи вдається підібрати такі значення у фантомних точках, при яких досягаються аномальне зменшення похибки наближеного розв'язку.

Результати обчислень наведеного тестового прикладу (11), наводяться в таблицях 1, 2.

Таблиця 1. Відношення похибок розв'язків диференціального рівняння без фантомних вузлів до похибок розв'язків з двома фантомними вузлами

Кількість вузлових точок	Лінійна інтерполяція	Інтерполяція Ерміта з 1-ю похідною	Інтерполяція Ерміта з 1-ю та 2-ю похідними	Значення підібрані
5	2,5	6,6	11	13,9
9	2,8	6,4	12	12
13	3	6,6	11,5	11

Таблиця 2. Відношення похибок розв'язків диференціального рівняння без фантомних вузлів до похибок розв'язків з чотирма фантомними вузлами

Кількість вузлових точок	Лінійна інтерполяція	Інтерполяція Ерміта з 1-ю похідною	Інтерполяція Ерміта з 1-ю та 2-ю похідними	Значення підібрані
5	3,25	9,6	25,8	47
9	4,2	11	24	153
13	5,1	14,4	32,8	270,6

3. ВИСНОВКИ

Із аналізу даних випливає, що існують набори значень у фантомних точках, при яких похибки наближених розв'язків стають аномально малими. Цей факт виникає внаслідок впливу ефекту аномального зменшення похибки інтерполяції при підібраних значеннях фантомних точок, який розглядався в [5].

Слід відзначити, що властивості системи фундаментальних функцій, які використовуються при побудові наближеного розв'язку, дозволяють позбутися залежності кількості рівнянь алгебраїчних систем, що підлягають розв'язанню, від кількості фантомних вузлів, оскільки крайові умови та значення функції у фантомних вузлах є відомими. Це дозволяє задавати кількість фантомних вузлів, виходячи із міркувань забезпечення необхідної точності отримуваних розв'язків, не ускладнюючи при цьому задачу відшукання невизначених параметрів.

Способи вибору значень у фантомних вузлах відкривають можливості використовувати більший обсяг інформації при відшуканні наближеного розв'язку. Інакше кажучи, через значення у фантомних вузлах непрямим чином накладаються додаткові умови на шуканий розв'язок.

Запропонований метод потребує подальших досліджень і відкриває широкі можливості для побудови швидкодіючих алгоритмів побудови наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [5].

1. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
2. *Денисюк В.П.* О некоторых методах улучшения сходимости тригонометрических рядов Фурье и интерполяционных тригонометрических многочленов // Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science. — 2012. — № 33.
3. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986. — С.40–50.
4. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. — М.: Мир, 1988. — 352 с.
5. *Денисюк В.П.* Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни: Монографія. — К.: ПАТ «Віпол», 2015. — С.289–290.
6. *Хемминг Р.В.* Численные методы. — М., 1968. — 400 с.

Надійшла до редакції 16.11.2016
Прийнята до друку 30.11.2016