Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)

Том 13 • № 2 • 2017 С. 116 – 122

Методична стаття

УДК 528.48

Ймовірнісно-статистичний послідовний аналіз результатів геодезичних вимірів

В.М. Гладілін[1]*, Н.С. Шудра[2], А.О. Дубкова[1]

[1]Національний авіаційний університет, 03058, м. Київ, пр. Космонавта Комарова, 1
[2]Київський національний університет будівництва і архітектури, 03037, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31

Визначення точності контрольно-геодезичних вимірювань за бракувальними числами та їх кількості при зйомці та складанні топографічних планів.

Ключові слова: контрольно-геодезичні вимірювання; бракувальні числа.

При виконанні топографічної зйомки, при виконанні планувальних і будівельно-монтажних робіт та ін. необхідно виконувати контрольні геодезичні вимірювання з визначенням їх якості. В таких випадках до теперішнього часу кількість контрольних вимірювань встановлювалася з різних міркувань, що не мали цілком конкретного наукового підходу.

Найбільш правильним буде виконання контрольних вимірів по методу ймовірнісно-статистичного послідовного аналізу, основи якого були розроблені Вальдом [1]. Для оптимального припинення кутових вимірювань в тріангуляції послідовний аналіз вже використовувався [4]. Але тут відразу ж необхідно відмітити, що розрахункове число вимірювань в тріангуляції заздалегідь відоме, воно дається в інструкції.

При виконанні контрольно-геодезичних вимірювань, число їх заздалегідь невідомо. Тому для цього випадку зробимо доопрацювання теорії послідовного аналізу з використанням марковських випадкових процесів [7].

Розглянемо стисло сутність послідовного аналізу. Для кожного числа вимірів заздалегідь обчислюються приймальні та бракувальні числа по формулах [1]:

$$a_\nu = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\left(2\ln\frac{\beta}{1-\alpha} + \nu \ln\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right), \qquad r_\nu = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\left(2\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + \nu \ln\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right), \tag{1}$$

де σ_1, σ_2 — стандартні середні квадратичні відхилення вимірів, при сприятливих та несприятливих умовах, які в подальшому будемо називати граничними стандартами; α — забракувати роботи, що контролюємо, коли в дійсності вони доброякісні; β — прийняти роботи доброякісними, коли в дійсності вони підлягають браку; ν — число степенів вільності. Якщо відоме дійсне значення величини, що контролюється (вимірюваної), то $\nu = n$, де n — число вимірів, а якщо дійсне значення невідомо, то $\nu = n-1$.

Після кожного виміру обчислюється накопичена сума квадратів відхилень $[\delta^2]$ контрольних вимірів x_i від їх дійсного значення $M(x)$ або від середнього арифметичного значення $x_{\text{ср}}$, після чого ця сума порівнюється з приймальним та бракувальним числом при відповідному числі вимірів.

Якщо $[\delta^2]_\nu \leqslant a_\nu$, то виміри завершують і вважають виконані роботи доброякісними. У випадку, коли $a_\nu < [\delta^2] < r_\nu$, контрольні роботи продовжують, і якщо виявиться, що $[\delta^2]_\nu \geqslant r_\nu$, то виконані роботи бракують.

Відхилення δ_i при невідомому дійсному значенні вимірюваної величини та відхилення при відомому дійсному значенні, яке позначимо Δ_i, знаходяться із співвідношення

$$\delta_i = x_i - \overline{x}, \qquad \Delta_i = x_i - M(x), \qquad i = 1, ..., n. \tag{2}$$

В формулах (1) вважається, що величини σ_1 та σ_2 є не стандартними, так як стандарти при відповідних умовах є величини постійні, які знаходяться із генеральної сукупності. Тому не може бути двох стандартів. Правильніше за все ці величини потрібно називати емпіричними стандартами або середніми квадратичними помилками, однак простіше ми їх будемо називати граничними стандартами.

Вальд пропонує заздалегідь задаватися величинами σ_1 та σ_2 одними й тими ж для всіх вимірів. В цьому випадку рівняння (1) будуть мати лінійний вигляд. Однак, як буде показано далі, рівняння приймальних і бракувальних чисел мають нелінійний вид, що більше відповідатиме практичним і теоретичним вимогам. Відмінність між приймальними та бракувальними числами, обчисленими за формулами

* Гладілін Валерій Миколайович; vgladilin.55@gmail.com

(1), для будь-якої кількості вимірювань буде величиною постійною. В дійсності таке явище не погоджується ні з теорією ні з практикою. Відомо, що із збільшенням кількості спостережень, збільшується і їх розмах, що підтверджується на практиці. Тому логічно припустити, що і різниця між приймальними та бракувальними числами при збільшенні числа спостережень повинна також збільшуватись.

Таким чином, для використання послідовного аналізу при геодезичному контролі якості виконаних робіт необхідно доповнити теоретичні розробки цього аналізу.

Нами пропонується знаходити граничні стандарти шляхом побудови довірчих інтервалів для стандарту при кожному числі вимірів або числі ступенів вільності. В інструкціях, як правило, вказується не стандарт, а граничне значення, від якого можна легко перейти до стандарту.

Довірчий інтервал для стандарту будується у вигляді нерівності [2]

$$Z_1 m(x) < \sigma(x) < Z_2 m(x), \tag{3}$$

де Z_1 та Z_2 — коефіцієнти, що визначаються по формулам

$$Z_1 = \frac{\sqrt{\nu}}{x_{2,\nu}}, \qquad Z_2 = \frac{\sqrt{\nu}}{x_{1,\nu}}, \tag{4}$$

$x_{1,\nu}$, $x_{2,\nu}$ — величини, які вибираються з таблиці χ^2-розподілу в залежності від довірчої ймовірності p та числа ступенів вільності ν; $m(x)$ — середня квадратична помилка вимірювань; $\sigma(x)$ — стандартне середнє квадратичне відхилення (стандарт).

Величина $m(x)$ нам невідома, але при більшій кількості вимірів вона наближається до стандарту, тому ми маємо право вважати, що $m(x) \approx \sigma(x)$. Тоді довірчий інтервал буде мати вид:

$$Z_1 \sigma(x) < \sigma(x) < Z_2 \sigma(x). \tag{5}$$

Так як ліва частина рівняння (5) найменша, а права — найбільша, що буде відповідати гарним та несприятливим умовам спостережень, то ці крайні частини рівнянь і будуть рівні граничним стандартам, тобто

$$\sigma_{1,\nu} = Z_1 \sigma(x), \qquad \sigma_{2,\nu} = Z_2 \sigma(x). \tag{6}$$

Величиною стандарту $\sigma(x)$ задаються або ж розраховують по граничному допуску, заданому інструкцією.

Підставивши (4) в вираз (6) та піднісши до квадрату граничні стандарти, будемо мати

$$\sigma_{1,\nu}^2 = \frac{\nu \cdot \sigma^2(x)}{x_{2,\nu}^2}, \qquad \sigma_{2,\nu}^2 = \frac{\nu \cdot \sigma^2(x)}{x_{1,\nu}^2}. \tag{7}$$

З врахуванням (7) рівняння приймальних та бракувальних чисел (1) остаточно приймуть вигляд [3]:

$$a_\nu = \frac{\nu \cdot \sigma^2}{x_{2,\nu}^2 - x_{1,\nu}^2} \left(2 \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \nu \ln \frac{x_{2,\nu}^2}{x_{1,\nu}^2} \right), \qquad r_\nu = \frac{\nu \cdot \sigma^2}{x_{2,\nu}^2 - x_{1,\nu}^2} \left(2 \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \nu \ln \frac{x_{2,\nu}^2}{x_{1,\nu}^2} \right). \tag{8}$$

Тепер рівняння (8) будуть рівняннями не прямих, а рівняннями кривих (нелінійними рівняннями).

Задаючи величини $\sigma(x)$, α, β та довірчу ймовірність p для знаходження величин $x_{1,\nu}^2$ та $x_{2,\nu}^2$, ми можемо обчислити приймальні та бракувальні числа для будь-якої кількості контрольних вимірювань. Величини $x_{1,\nu}^2$ та $x_{2,\nu}^2$ вибираємо з таблиці χ^2-розподілу відповідно по довірчим ймовірностям $p_1 = 1 - 0{,}5(1-p)$, $p_2 = 0{,}5(1-p)$ та в залежності від числа ступенів вільності ν.

Для обчислення приймальних та бракувальних чисел по формулам (3.8) число значущих цифр величин $x_{1,\nu}^2$ та $x_{2,\nu}^2$ повинно бути не менше п'яти. Проте навіть в точних таблицях [6] число значущих цифр дорівнює трьом-чотирьом, що нас не задовольняє. Тому зупинимось на обчисленні більш точних значень величин $x_{1,\nu}^2$ та $x_{2,\nu}^2$. Крім того, більш точні значення нам знадобляться при визначенні числа ступенів вільності або числа вимірів, при якому процес послідовного аналізу закінчиться практично з ймовірністю рівною одиниці, що дуже важливо при плануванні процесу контрольних вимірювань.

Для значень $x_{i,1}^2 < 1$ і числа ступенів вільності $\nu = 1$ ймовірність обчислюється по формулі [3]

$$P(x_{i,1}^2) = 2\left[1 - \Phi\left(\sqrt{x_{i,1}^2}\right)\right], \qquad i = 1, 2, \tag{9}$$

де $\Phi\left(\sqrt{x_{i,1}^2}\right)$ — функція Лапласа випадкової величини $\sqrt{x_{i,1}^2}$, точні значення якої знаходяться в [6].

З формули (9) знаходимо, що

$$\Phi\left(\sqrt{x_{i,1}^2}\right) = 1 - 0{,}5P(x_{i,1}^2). \tag{10}$$

Наприклад, для довірчої ймовірності $p = 0{,}95$ ймовірність $p_1 = 0{,}975$, за якою знаходимо значення $x_{1,1}^2$. Тоді $\Phi\left(\sqrt{x_{1,1}^2}\right) = 0{,}5125$. Шляхом оберненого лінійного інтерполювання по значення функції 0,5125 знаходимо аргумент $\sqrt{x_{1,1}^2} = 0{,}03133835$ і величину $x_{1,1}^2 = 0{,}000982092$.

Для знаходження більш точного значення $x_{2,1}^2$ та наступних значень нами запропонована наступна методика. Якщо необхідно визначити ймовірність по заданому значенню x^2, то її можна визначити по таблиці інтеграла ймовірності x^2 [6], користуючись при цьому формулою Бесселя для квадратичної інтерполяції

$$P(x_\nu^2)=P(x_{0,\nu}^2)+U\cdot\Delta P(x_{0,\nu}^2)-\frac{U(1-U)}{2}\cdot\frac{\Delta P(x_{+1,\nu}^2)-\Delta P(x_{-1,\nu}^2)}{2}, \tag{11}$$

де $x_{-1,\nu}^2, x_{0,\nu}^2, x_{+1,\nu}^2$ — рівновіддалені табличні значення аргументу, причому $x_{-1,\nu}^2 \leqslant x_\nu^2 < x_{+1,\nu}^2$,

$$U=\frac{x_\nu^2-x_{0,\nu}^2}{x_{+1,\nu}^2-x_{0,\nu}^2}, \tag{12}$$

$$\Delta P(x_{j,\nu}^2)=P(x_{j+1,\nu}^2)-P(x_{j-1,\nu}^2), \qquad j=-1;0;+1. \tag{13}$$

Значення перших різниць $\Delta P(x_{j,\nu}^2)$ вказані в таблиці [3] поруч з відповідними значеннями функції $P(x_{j,\nu}^2)$. Такі різниці завжди будуть від'ємними.

Однак необхідно знайти не ймовірність, а за даним значенням ймовірності необхідно визначити більш точне значення величини x^2. Для цього спочатку виписуємо з таблиці [6] менш точне значення x^2 для відповідних p_i та ν. Після чого по таблиці інтеграла ймовірності і по формулі (11) знаходимо значення ймовірності $P(x_{i,\nu}^2)$ з точністю, що забезпечить сім значущих цифр. Далі визначаємо більш точне значення x^2 по запропонованій формулі

$$x_{i,\nu}^2=x_{0,\nu}^2+\left(\frac{P_i-P(x_{i,\nu}^2)}{\Delta P(x_{0,\nu}^2)}+U\right)\cdot\left(x_{+1,\nu}^2-x_{0,\nu}^2\right), \qquad i=1,2. \tag{14}$$

Для контролю знаходження величини $x_{i,\nu}^2$ потрібно знову обчислити ймовірність $P(x_{i,\nu}^2)$ по більш точному значенню $x_{i,\nu}^2$. Якщо уточнені значення x^2 обчислені до шостої значимої цифри, то розбіжність між обчисленими та теоретичними значеннями ймовірності не перевищить величини $1\cdot10^{-6}$.

Нами вирахувані величини $x_{1,\nu}^2$ та $x_{2,\nu}^2$ з шістьма значимими цифрами при $p=0{,}95$ для $\nu=1\div20$, які поміщені в табл. 2. Розбіжність між імовірністю при контрольних підрахунках не перевищує величини $1\cdot10^{-6}$. Це свідчить про те, що запропонована формула (14) дає можливість з досить високою степінню точності визначати значення x^2, користуючись при цьому таблицею інтегралів ймовірності.

Розглянемо приклад. Необхідно визначити уточнене значення $x_{1,3}^2$ для довірчої ймовірності $p=0{,}95$. Для $p_1=0{,}975$ і $\nu=3$ з таблиці [6] знаходимо, що $x_{1,3}^2=0{,}216$. Користуючись таблицею інтегралів ймовірності [6], виписуємо всі необхідні дані в табл. 1.

Таблиця 1

x^2	$\nu=3$	
	P	Δ
0,15	0,98523	$-764\cdot10^{-5}$
0,20	0,97759	$-845\cdot10^{-5}$
0,25	0,96914	$-911\cdot10^{-5}$

Тоді $P(x_{0,3}^2)=0{,}97759$; $x_3^2=0{,}216$, $x_{0,3}^2=0{,}2$, $x_{+1,3}^2=0{,}25$. По даним величинам обчислюємо значення $U=0{,}32$ по формулі (12). Виписуємо різниці $\Delta P(x_{0,3}^2)=-845\cdot10^{-5}$, $\Delta P(x_{+1,3}^2)=-911\cdot10^{-5}$, $\Delta P(x_{+1,3}^2)=-764\cdot10^{-5}$. Знаходимо добуток $U(1-U)=0{,}2176$. Тоді ймовірність за формулою Бесселя (11) буде дорівнювати $P(x_{1,3}^2)=0{,}9749659$. По формулі (14) обчислюємо уточнені значення: $x_{1,3}^2=0{,}215798$.

Для контролю знову обчислюємо ймовірність по формулі (11) для отриманого уточненого значення $x_{1,3}^2$, маємо: $U=0{,}2161293$, $U(1-U)=0{,}2161293$, $P(x_{1,3}^2)=0{,}9749996$. Розбіжність між ймовірностями складає $-0{,}5\cdot10^{-6}$, що досить незначна.

Тут же необхідно помітити наступне. Таблиці [6] значень x^2 для ймовірностей p_1 та p_2 відтворюються без змін із таблиць, складених Хальдом та Синкбаеком. Однак, як виявилося, ці таблиці мають в деяких місцях неточності в останньому знаку. Так, наприклад, для $p=0{,}975$ (див. табл. 2) розбіжності мають місце для x_2^2 при $\nu=2,3,8,9,11,12,13,15,16,17$.

Тому вважаємо, що значення x^2, отримані нами, навіть із точністю до третього знака після коми є більш точними. Це пояснюється тим, що ми користувалися таблицею інтеграла ймовірності, значення якого отримані з похибкою заокруглення, яка не перевищує $5\cdot10^{-6}$. Похибка інтерполювання не перевищує 10^{-7}.

Для знаходження значень x^2 при будь-якій ймовірності p, якої немає в таблиці, спочатку необхідно приблизно обчислити значення x^2 між сусідніми значеннями ймовірності p_1, p_2 та $x_{1,\nu}^2$, $x_{2,\nu}^2$, які дано в таблиці за формулою логарифмічного інтерполювання:

$$x_{i,\nu}^2=x_{\text{м},\nu}^2+\frac{\ln p_i-\ln p_\text{б}}{\ln p_\text{м}-\ln p_\text{б}}\left(x_{\text{б},\nu}^2-x_{\text{м},\nu}^2\right), \qquad i=1,2, \tag{15}$$

де $p_\text{м}$ та $p_\text{б}$ — менше та більше сусіднє значення ймовірності; $x_{\text{м},\nu}^2$, $x_{\text{б},\nu}^2$ — менше та більше сусідні

Таблиця 2

ν	Значення x^2			
	По Хальду		Уточнені по таблиці інтеграла ймовірності x^2 за формулою (14)	
	$x^2_{1,\nu}$, $p_1 = 0{,}975$	$x^2_{2,\nu}$, $p_2 = 0{,}025$	$x^2_{1,\nu}$, $p_1 = 0{,}975$	$x^2_{2,\nu}$, $p_2 = 0{,}025$
1	0,000982	5,024	0,000982092	5,02410
2	0,0506	7,378	0,0506364	7,37746
3	0,216	9,348	0,215798	9,34852
4	0,484	11,143	0,484404	11,1430
5	0,831	12,832	0,831140	12,8323
6	1,237	14,449	1,23742	14,4490
7	1,690	16,013	1,68989	16,0132
8	2,180	17,535	2,17976	17,5342
9	2,700	19,023	2,70030	19,0224
10	3,247	20,483	3,24709	20,4828
11	3,816	21,920	3,81590	21,9211
12	4,404	23,336	4,40379	23,3369
13	5,009	24,736	5,00863	24,7353
14	5,629	26,119	5,62874	26,1192
15	6,262	27,488	6,26221	27,4887
16	6,908	28,845	6,90775	28,8460
17	7,564	30,191	7,56418	30,1919
18	8,231	31,526	8,23087	31,5266
19	8,907	32,852	8,90667	32,8517
20	9,591	34,170	9,59082	34,1705

значення x^2, яке відповідає $p_\text{м}$ та $p_\text{б}$.

Далі робимо аналогічно попередньому випадку, тобто по наближеному значенню x^2 знаходимо точні значення ймовірності та x^2 по формулах (11), (14) і виконуємо контроль.

Розглянемо приклад. Необхідно обчислити $x^2_{1,3}$ при $p = 0{,}995$, тоді ймовірності $p_1 = 0{,}9975$ та $p_2 = 0{,}0025$. Спочатку знаходимо наближене значення $x^2_{1,3} = 0{,}04205$ при $p_1 = 0{,}9975$, використовуючи для цього таблицю χ^2-розподілу і формулу (15).

Обчислюємо допоміжну величину по (12): $U = 0{,}205$, $U(1-U) = 0{,}162975$.

Тоді ймовірність, знайдена по формулі (11), складе $P(x^2_{1,3}) = 0{,}9977372$. Уточнене значення по формулі (14): $x^2_{1,3} = 0{,}0449066$.

Для контролю обчислюємо ще раз ймовірність за формулою (11), отримаємо: $P(x^2_{1,3}) = 0{,}997504$. Різниця між ймовірністю складає $4 \cdot 10^{-6}$.

У підсумку зазначимо, що користуючись формулами (8) і табл. 2, можна легко обчислити приймальні та бракувальні числа з необхідною точністю.

Розглянемо деякі типові приклади контролю якості топографо-геодезичних робіт.

Спочатку обчислимо по формулам (8) значення приймальних і бракувальних чисел при різних α і β для довірчої ймовірності $p = 0{,}95$ і одиничного стандарту $\sigma(x) = 1$, які помістимо в табл. 3.

Такою таблицею буде дуже зручно користуватися при розрахунку приймальних та бракувальних чисел для різноманітних стандартів. При цьому достатньо табличні значення помножити на величину квадрату стандарту. Крім того, табл. 3 буде використана для обчислення перехідних ймовірностей при знаходженні максимального числа контрольних вимірювань по методу марковського випадкового процесу.

Приклад 1. Виконуються контрольні заміри в натурі і порівнюються з відстанями, визначеними на плані. У відповідності з [5] розбіжність не повинна перевищувати 1 мм між точками об'єктів місцевості або контурів ситуації і найближчими точками знімальної основи. При зйомці в М1:500 1 мм буде відповідати 0,5 м на місцевості.

Для виконання контрольних вимірювань і їх послідовного аналізу необхідно заздалегідь скласти таблицю приймальних та бракувальних чисел. Приймальні та бракувальні числа обчислимо, використовуючи числа табл. 3 шляхом множення їх на квадрат стандарту.

Величину стандарту будемо находити по граничному значенню $\Delta = 1$ мм на плані або $\Delta = 50$ см на місцевості. Для довірчої ймовірності $p = 0{,}9545$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta}{2} \tag{16}$$

або стандарт вимірювань $\sigma(x) = 25$ см.

Таблиця 3

ν	$p=0{,}95$; $\alpha=0{,}05$; $\beta=0{,}05$		$p=0{,}95$; $\alpha=0{,}10$; $\beta=0{,}05$		$P=0{,}95$; $\alpha=0{,}10$; $\beta=0{,}10$	
	a_ν	r_ν	a_ν	r_ν	a_ν	r_ν
1	0,52780	2,87251	0,54933	2,59653	0,82531	2,57500
2	1,11212	4,32709	1,14164	3,94867	1,52005	3,91915
3	1,77943	5,64827	1,81495	5,19289	2,27033	5,15737
4	2,49702	6,91703	2,53760	6,39677	3,05786	6,35619
5	3,24790	8,15483	3,29296	7,57726	3,87052	7,53221
6	4,02224	9,37107	4,07135	8,74149	4,70093	8,69238
7	4,81498	10,57093	4,86783	9,89344	5,54533	9,84059
8	5,62214	11,75860	5,67848	11,03632	6,40077	10,97997
9	6,44112	12,93537	6,50075	12,17096	7,26515	12,11134
10	7,26942	14,10276	7,33216	13,29845	8,13647	13,23571
11	8,10614	15,26183	8,17184	14,41957	9,01409	14,35387
12	8,95065	16,41551	9,01919	15,53686	9,89783	15,46833
13	9,80141	17,56302	9,87267	16,64944	10,78624	16,57818
14	10,65732	18,70441	10,73121	17,75724	11,67838	17,68335
15	11,51844	19,84136	11,59485	18,86171	12,57450	18,78530
16	12,38409	20,97385	12,46296	19,96279	13,47401	19,88393
17	13,25402	22,10254	13,33526	21,06103	14,37677	20,97979
18	14,12762	23,22799	14,21118	22,15684	15,28233	22,07328
19	15,00474	24,35020	15,09054	23,25020	16,19054	23,16440
20	15,88484	25,46817	15,97283	24,34017	17,10083	24,25218

Задамося довірчою ймовірністю $p=0{,}95$ та величинами $\alpha=\beta=0{,}05$. Обчислюємо приймальні та бракувальні числа, користуючись при цьому першими двома колонками чисел табл. 3, які множимо на $\sigma^2(x)=625$. Отримуємо приймальні та бракувальні числа, які знаходяться в табл. 4.

Таблиця 4

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_ν	330	695	1112	1561	2030	2514	3009	3514	4026	4543	5066	5594
r_ν	1795	2704	3530	4323	5097	5857	6607	7349	8085	8814	9539	10260

В даному прикладі контрольні виміри будемо вважати істинними, тому число вимірів n буде рівне числу степенів вільності ν.

Виконуємо перший контрольний вимір до предметів місцевості. Різниця між відстанню, виміряною рулеткою, і відстанню, отриманою на плані, у відповідності з масштабом складає 40 см. Підносимо її до квадрату і порівнюємо з приймальним та бракувальним числами для $\nu=1$ табл. 4. Бачимо, що квадрат різниці $\delta_1^2=1600$ знаходиться в інтервалі між приймальним та бракувальним числами, тобто $a_1=330<\delta_1^2=1600<r_1=1795$. Робимо висновок, що вимірювання слід продовжити.

Виконаємо друге контрольне вимірювання, при якому різниця рівна 25 см, квадрат якої $\delta_2^2=625$. Далі складаємо квадрати відхилень або різниць першого та другого контрольних вимірів. Отримуємо суму $[\delta^2]_2=1600+625=2225$. В подальшому сума квадратів відхилень буде збільшуватись, тому ми і називаємо її накопиченою.

Результати отриманих різниць, їх квадратів та накопичених сум записуємо в табл. 5.

Таблиця 5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ	40	25	15	10	157	30	15	0	5
δ^2	1600	625	225	100	225	900	225	0	25
$\sum\delta^2$	1600	2225	2500	2600	2825	3725	3950	3950	3975

Після другого вимірювання порівнюємо вже суму квадратів відхилень з приймальним та бракувальним числами для $\nu=2$ табл. 4, в результаті отримуємо нерівність $a_2=625<[\delta^2]_2=2225<r_2=2704$. Знову приходимо до висновку, що вимірювання необхідно продовжити.

Аналогічно при третьому контрольному вимірюванні отримуємо різницю 15 см та накопичену суму $[\delta^2]_3=\delta_3^2+[\delta^2]_2=225+2225=2500$ і також порівнюємо її з приймальним та бракувальним числами для $\nu=3$ і т.д.

Нарешті, після дев'ятого вимірювання знаходимо, що накопичена сума квадратів відхилень менша, ніж приймальне число для $\nu=9$, тобто $[\delta^2]_9=\delta_9^2+[\delta^2]_8=25+3950=3975<a_9=4026$, внаслідок чого контрольні вимірювання зупиняємо і вважаємо виконану зйомку доброякісною. В інструкції [5] вказано, що кількість граничних розбіжностей не повинна бути більшою 10% загального числа контрольних вимірів.

В розглянутому прикладі виконано дев'ять контрольних вимірювань, але в жодному з них різниця не доходила до граничного значення 50 см. Якби нам довелося виконати десяте вимірювання, при якому різниця була б рівна граничній і припустимо, що на восьмому вимірюванні різниця також рівна 50 см, тоді виконану роботу прийшлося б забракувати, тобто $[\delta^2]_{10} = [\delta^2]_7 + \delta_8^2 + \delta_9^2 + \delta_{10}^2 = 8975 > r_{10} = 8814$.

В даному прикладі ми допустили дві граничні різниці і прийшли до висновку, що роботу потрібно забракувати. Таким чином, на перший погляд здається, що все погоджується з вимогами інструкції, тобто на десять вимірювань одне граничне значення допускається, тоді робота, яка наведена у прикладі, не буде забракована, а просто контроль потрібно продовжити.

Якщо уважно подивимось на різниці в прикладі, то помітимо, що вони досить гарні, тобто здебільшого далекі від граничного значення, а на практиці таке зустрічається рідко. Зазвичай, при виконанні зйомки різниці будуть мати тенденцію прямувати до граничних значень. Тому стандарт, обчислений по (16) не буде нас задовольняти. Його величина дещо занижена, тобто по точності завищена.

Нами запропонована наступна методика визначення стандарту по граничному значенню. У відповідності з вимогами інструкції число граничних різниць не повинно перевищувати 10%, тобто допускається одна така різниця на 10 контрольних замірів. Отже, потрібно підібрати таку довірчу ймовірність p і відповідно їй коефіцієнт t_p, щоб добуток цього коефіцієнта на стандарт $\sigma(x)$ був рівний значенню дещо меншому за граничне. Математично це можна представити так:

$$t_p \cdot \sigma(x) = \Delta - \omega, \tag{17}$$

де ω — невеликий інтервал похибок вимірів або різниць, число яких не повинно перевищувати 10% загальної кількості. Виразу (17) будуть задовольняти наступні значення невідомих параметрів:

$$t_p = 1{,}5, \qquad \sigma(x) = 30 \text{ см}, \qquad \omega = 5 \text{ см}.$$

Значенню $t_p = 1{,}5$ нормального розподілу відповідає довірча ймовірність $p = 0{,}8664$ або рівень значимості $q = 0{,}1336$. Так як $t_p \cdot \sigma(x) = 45$ см, то при даному рівні похибки або різниці, що перевищують 45 см, а також похибки в 50 см і більше будуть складати 13,36%. Самі ж граничні похибки не будуть перевищувати 10%, що відповідає вимогам інструкції.

Тут ми не розглядаємо похибок величиною більше 46 см, так як точність визначення відстаней знятих з плану по масштабній лінійці складає 5 см.

З даного прикладу видно, що питання контролю відстаней, отриманих з плану і виміряних у натурі, заслуговує особливої уваги. Таким чином, для даного випадку контролю якості слід зупинитися на стандарті $\sigma(x) = 30$ см.

Приклад 2. Для контролю зйомки рельєфу з висотою перетину 0,5 м і нахилом місцевості до 2° необхідно визначити стандарт вимірювань з наступним обчисленням по ньому приймальних та бракувальних чисел. Допустимі розходження між контрольними пікетами і відмітками плану, знайденими шляхом інтерполювання, у відповідності з [5] не повинні перевищувати 25 см.

Як і в попередньому прикладі, число різниць, що досягають граничних значень, повинно бути менше або рівне 10% загальної кількості контрольних пікетів.

Виходячи з цієї умови, як і в першому прикладі, і використовуючи вираз (3.17) знаходимо, що

$$t_p \cdot \sigma(x) = 24.$$

Величина ω рівна 1 см, так як відмітки визначаються в даному прикладі з точністю до одного сантиметра. Тоді для $t_p = 1{,}5$ стандарт $\sigma(x) = 16$ см. Число похибок, які перевищують 24 см, буде складати, як і в першому прикладі, 13,36% загальної кількості контрольних вимірювань. Приймальні та бракувальні числа обчислюються аналогічно першому прикладу.

В тих випадках, коли немає додаткових обмежень, як це показано в прикладах, а лише вказано граничне значення різниць, для визначення стандарту необхідно користуватися формулою

$$\sigma(x) = \frac{\Delta}{t_p}, \tag{18}$$

де t_p — аргумент функції нормального розподілу, який вибирається з таблиць цього розподілу по довірчій ймовірності p.

ВИСНОВКИ

Послідовний аналіз контрольних вимірювань дає перевагу в тому, що ми повністю використовуємо всю отриману інформацію про якість для прийняття рішень, а не лише її частину, як це вказано в інструкції — судження про якість складається лише по максимальним різницям.

Послідовний аналіз дає можливість за рахунок переважного числа малих різниць збільшити відсоткове число великих та граничних різниць і навпаки. При значному числі великих різниць різко зменшується кількість граничних різниць для прийняття позитивних рішень.

Таким чином, цей аналіз в деякій мірі регулює інструктивні допуски, тобто можна більш гнучко підходити до питання кінцевого рішення при контролі якості топографічної зйомки.

Слід також відмітити, що запропонована методика контролю якості шляхом послідовного аналізу контрольних вимірювань може бути використана при контролі будь-якої промислової чи іншої продукції, якість якої визначається стандартом вимірювань. Для цього необхідно вірно вибрати в кожному окремому випадку значення стандарту $\sigma(x)$, величину довірчої ймовірності p та задатися ймовірностями α та β.

1. *Вальд А.* Последовательный анализ. — М.: Физматгиз, 1960. — 328 с.
2. *Войтенко С.П.* Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навчальний посібник. — К.: КНУБА, 2003. — 216 с.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: Выща школа, 1988. — 439 с.
4. *Гладілін В.М., Гончаренко О.С., Шудра Н.С.* Моделювання імовірності розподілу кутових нев'язок в мережі тріангуляції // Вісник Астрономічної школи. — 2014. — Т. 10, № 1. — С.79–84.
5. Інструкція з топографічного знімання у масштабах 1 : 5000, 1 : 2000, 1 : 1000 та 1 : 500. ГКНТА–2.04–02–98. — К.: Укргеодезкартографія, 1999. — 156 с.
6. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
7. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. — М.: Советское радио, 1977. — 488 с.

Вероятностно-статистический последовательный анализ результатов геодезических измерений

Гладилин В.Н.[1], *Шудра Н.С.*[2], *Дубкова А.О.*[1]

[1]Национальный авиационный университет, 03058, г. Киев, пр. Космонавта Комарова, 1

[2]Киевский национальный университет строительства и архитектуры, 03037, г. Киев, Воздухофлотский проспект, 31

Определение точности контрольно-геодезических измерений по браковочным числам и их количества при съемке и составлении топографических планов.

Ключевые слова: контрольно-геодезические измерения; браковочные числа.

Probabilistic-statistical sequential analysis of the results of geodetic measurements

Gladilin V.N.[1], *Shudra N.S.*[2], *Dubkova A.O.*[1]

[1]National Aviation University, Kosmonavta Komarova Avenue 1, 03058 Kyiv, Ukraine

[2]Kyiv National University of Construction and Architecture, Povitroflotsky Avenue 31, 03037 Kyiv, Ukraine

Determination of accuracy of control and geodetic measurements from defective numbers and their number when surveying and drawing up topographic plans. A sequential analysis of control and geodetic measurements makes it possible to fully use the information obtained on the quality of measurements, also it is possible due to the largest number of small differences to increase the percentage of large and allowable differences and per revolution. Thus this analysis to some extent regulates the tolerances of instruction and can be more conditionally related to the final solution for controlling the quality of topographic survey. It should also be noted that the proposed quality control technique by means of a sequential analysis of control and geodetic measurements can be used to control any industry whose quality is determined by measurement standards. In topographic surveys, it is necessary to carry out control and geodetic measurements to determine the quality of the survey, the number of which is not known in advance. In a sequential analysis for each number of measurements, the acceptance and rejection numbers for corresponding measurements are calculated in advance. After each measurement, the sum of the squares of the deviations of the control measurements from their actual value or from the average of the arithmetic mean is calculated, after which this amount is compared with the receiving and reject numbers at the corresponding number of measurements. If the sum squares of the deviation is less than the smallest defect number, then the control and geodetic measurements are completed and the performed works are considered to be benign, if the sum of the squares is greater than the largest defect number then the control and geodetic measurement continue. If, however, the sum of squares is greater than the largest defect number, then the work done on topographic survey must be reject.

Keywords: control and geodetic measurement; defective numbers.

Надійшла до редакції	/ Received	21.11.2017
Виправлена авторами	/ Revised	20.12.2017
Прийнята до друку	/ Accepted	20.12.2017