Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)
Том 13 • № 1 • 2017 С. 1 – 4

УДК 521.82

Дослідження структури коефіцієнтів представлення потенціалу всюди збіжними рядами

М.М. Фис*, А.М. Бридун, А.Р. Согор

Національний університет «Львівська політехніка», 79013, м. Львів, вул. Карпінського, 6

Розглянуто представлення потенціалу планети за допомогою неперервних функцій. Досліджена структура елементів розкладу та можливість їх визначення. Гармонічність коефіцієнтів ряду забезпечує їхнє представлення через параметри гравітаційного поля та навпаки. Це дозволяє знаходити значення потенціалу як неперервної функції у всьому просторі.

Ключові слова: потенціал; неперервна функція; всюди збіжний ряд; гравітаційне поле Землі.

Раніше був отриманий розклад потенціалу притягання планети неперервними функціями [2, 3], котрий відрізняється від запропонованого в роботі [1]

$$V(P)=\frac{GM}{\sqrt{1+R^2}}\int\limits_{\tau}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\rho^2-2\rho R\cos\psi-1}{1+R^2}\right)^n\right)\delta\,d\tau, \tag{1}$$

де $\rho R\cos\psi=\xi x_1+\eta x_2+\zeta x_3$.

Перетворення рівності (1) дає співвідношення

$$V(P)=\frac{GM}{\sqrt{1+R^2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+R^2)^n}\sum_{t=0}^{n}\frac{(-1)^t2^t}{(n-t)!}\sum_{t_1+t_2+t_3=t}\frac{D^{n-t}_{t_1t_2t_3}W^t_{t_1t_2t_3}(x_1,x_2,x_3)}{t_1!\,t_2!\,t_3!}\right). \tag{2}$$

В цій формулі введені наступні позначення:

$$D^{n-t}_{t_1t_2t_3}=\frac{1}{M}\int\limits_{\tau}\delta(\rho^2-1)^{n-t}\xi^{t_1}\eta^{t_2}\zeta^{t_3}\,d\tau, \tag{3}$$

$$W^t_{t_1t_2t_3}(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1^{t_1}x_2^{t_2}x_3^{t_3}}{(1+R^2)^t}=\frac{R^t}{(1+R^2)^t}\sin^{t_1+t_2}\theta\cdot\cos^{t_3}\theta\cdot\sin^{t_2}\lambda\cdot\cos^{t_1}\lambda. \tag{4}$$

Функції $W^t_{t_1t_2t_3}(x_1,x_2,x_3)$ не є гармонічними поза тілом τ, проте є регулярними, тобто

$$\lim_{R\to\infty}W^t_{t_1t_2t_3}(x_1,x_2,x_3)=0. \tag{5}$$

$D^{n-t}_{t_1t_2t_3}$ — це величини, що залежать від внутрішньої будови та фігури планети, в зв'язку з чим виникає потреба у вивченні характеру їх представлення, оскільки вони можуть бути додатковою інформацією при вивченні будови планетарних тіл. Значення $D^{n-t}_{t_1t_2t_3}$ можна шукати різними способами, наприклад, заданням значень в деяких точках і визначенням коефіцієнтів з системи рівнянь, тобто

$$\begin{cases} V(P_1)=\dfrac{GM}{\sqrt{1+R_1^2}}\left(1+\displaystyle\sum_{n=1}^{T_N}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+R_1^2)^n}\sum_{t=0}^{n}\frac{(-1)^t2^t}{(n-t)!}\sum_{t_1+t_2+t_3=t}\frac{D^{n-t}_{t_1t_2t_3}W^t_{t_1t_2t_3}(P_1)}{t_1!\,t_2!\,t_3!}\right), \\ \ldots\ldots\ldots \\ V(P_{T_N})=\dfrac{GM}{\sqrt{1+R_{T_N}^2}}\left(1+\displaystyle\sum_{n=1}^{T_N}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+R_{T_N}^2)^n}\sum_{l=0}^{t}\frac{(-1)^t2^t}{(n-t)!}\sum_{t_1+t_2+t_3=t}\frac{D^{n-t}_{t_1t_2t_3}W^t_{t_1t_2t_3}(P_{T_N})}{t_1!\,t_2!\,t_3!}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) особлива, бо її детермінант дорівнює нулю. Для отримання однозначного розв'язку розкладемо функцію $\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho R\cos\psi+R^2}}$ за степенями $\frac{1}{(1+R^2)^n}$, $\frac{R}{(1+R^2)^n}$.

Для цього вираз в (1) перетворимо наступним чином:

$$\left(\frac{\rho^2-2\rho R\cos\psi-1}{1+R^2}\right)^n=\sum_{t=0}^{[n/2]}\frac{C_n^{2t}(\rho^2-1)^{n-2t}(-2)^{2t}R^{2t}\cos^{2t}\varphi}{(1+R^2)^n}+R\sum_{t=0}^{n-[n/2]-1}\frac{C_n^{2t+1}(\rho^2-1)^{n-2t+1}(-2)^{2t+1}\cos^{2t+1}\varphi}{(1+R^2)^n}, \tag{7}$$

* Фис Михайло Михайлович; ✉ fysmikhail@gmail.com

де $\cos\varphi=\xi z_1+\eta z_2+\zeta z_3=\sin\theta(\xi\cos\lambda+\eta\cos\lambda)+\zeta\cos\theta$.

Заміна $\frac{1}{1+R^2}=\frac{1}{y}$ дає

$$\left(\frac{\rho^2-2\rho R\cos\psi-1}{1+R^2}\right)^n=\sum_{t=0}^{[n/2]}\frac{n!(\rho^2-1)^{n-2t}2^t\cos^{2t}\sum\limits_{r=0}^{t}(-1)^t y^{n-t+r}}{(2t-1)!!(n-2t)!\,t!}-$$
$$-R\sum_{t=0}^{n-[n/2]-1}\frac{n!(\rho^2-1)^{n-2t-1}2^{t+1}\cos^{2t+1}\varphi\sum\limits_{r=0}^{t}C_t^r(-1)^t y^{n-t+r}}{(2t+1)!!(n-2t-1)!\,t!}. \tag{8}$$

Функцію $f(y)=\frac{1}{r(y)}$, отриману зі співвідношення (1) підстановкою (8), розкладемо в ряд Маклорена за степенями y. Для цього знайдемо

$$f^{(l)}(0)=\frac{(-1)^t}{\sqrt{1+R^2}}\left(1+\sum_{n=l}^{2t}\frac{(2n-1)!!}{2^n}\left(\sum_{t=n-l}^{[n/2]}\frac{(-1)^t(\rho^2-1)^{n-2t}2^t\cos^{2t}\varphi}{(2t-1)!!(n-2t)!(n-l)!(l+t-n)!}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-R\sum_{t=n-l}^{n-[n/2]-1}\frac{(\rho^2-1)^{n-2t-1}2^{t+1}\cos^{2t+1}\varphi}{(2t+1)!!(n-2t-1)!(l+t-n)!}\right)\right). \tag{9}$$

Таким чином, рівність (1) набуде вигляду

$$V(P)=\frac{GM}{\sqrt{1+R^2}}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(1+R^2)^l}\sum_{n=l}^{2l}\frac{(2n-1)!!}{2^n}\left(\sum_{t=n-l}^{[n/2]}\frac{(-2)^t\int_\tau(\rho^2-1)^{n-2t}\cos^{2t}\varphi\,d\tau}{(2t-1)!!(n-2t)!(l+t-n)!}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2R\sum_{t=n-l}^{n-[n/2]-1}\frac{(-2)^t\int_\tau(\rho^2-1)^{n-2t+1}\cos^{2t+1}\varphi\,d\tau}{(2t+1)!!(n-2t-1)!(l+t-n)!}\right)\right), \tag{10}$$

де інтеграли під сумами є такими:

$$\int_\tau(\rho^2-1)^{n-2t}\cos^{2t}\varphi\,d\tau=\int_\tau(\rho^2-1)^{n-2t}\big(\sin\theta(\xi\cos\lambda+\eta\sin\lambda)+\zeta\cos\theta\big)^{2t}d\tau,$$
$$\int_\tau(\rho^2-1)^{n-2t-1}\cos^{2t+1}\varphi\,d\tau=\int_\tau(\rho^2-1)^{n-2t-1}\big(\sin\theta(\xi\cos\lambda+\eta\sin\lambda)+\zeta\cos\theta\big)^{2t+1}d\tau.$$

Позначимо

$$X_l=\frac{(-1)^l}{M}\sum_{t=[l/2]}^{l}\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sum_{t=n-l}^{[n/2]}\frac{(-2)^t\int_\tau(\rho^2-1)^{n-2t}\cos^{2t}\varphi\,d\tau}{(2t-1)!!(n-2t)!(l+t-n)!},$$
$$Y_l=\frac{(-1)^l}{M}\sum_{t=[l/2]}^{l}\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sum_{t=n-l}^{n-[n/2]-1}\frac{(-2)^t\int_\tau(\rho^2-1)^{n-2t-1}\cos^{2t+1}\varphi\,d\tau}{(2t+1)!!(n-2t-1)!(l+t-n)!}. \tag{11}$$

Тоді вираз для потенціалу в цих позначеннях представиться як

$$V(P)=\frac{GM}{\sqrt{1+R^2}}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(1+R^2)^l}\sum_{n=l}^{2l}\frac{(2n-1)!!}{2^n}(X_l-2RY_l)\right). \tag{12}$$

Визначимо вирази деяких коефіцієнтів X_l при степенях $\frac{1}{1+R^2}$, наприклад,

$$X_0=1,$$
$$X_1=(3\sin^2\theta\cos^2\lambda-1)I_{200}+(3\sin^2\theta\sin^2\lambda-1)I_{020}+(3\cos^2\theta-1)I_{002}.$$

Не важко переконатись, що $\Delta(X_2)=0$, тобто величина X_2 гармонічна за змінними ξ,η,ζ (для X_0 це очевидно). Це дозволяє допустити, що значення X_l та Y_l є лінійними комбінаціями стоксових постійних. Для простоти викладок розглянемо випадок, коли потенціал заданий на осі Oz, тоді зовнішній потенціал визначається так:

$$V(z)=\frac{GM}{\sqrt{1+z^2}}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(1+z^2)^l}\sum_{n=l}^{2l}\frac{(2n-1)!!}{2^n}X_l\right). \tag{13}$$

Формули для перших трьох значень:

$$X_0=\frac{1}{M}\int_\tau \delta\, d\tau=1;$$
$$X_1=\frac{1}{M}\int_\tau \left(-\frac{1}{2}(\rho^2-1)+\frac{3}{2}\zeta^2\right)\delta\, d\tau=C_{20}+0{,}5C_{00};\qquad(14)$$
$$X_2=\frac{1}{M}\int_\tau \left(\frac{3}{8}(\rho^2-1)^2-\frac{3}{2}\zeta^2-\frac{1}{2}(\rho^2-1)\zeta^2+\frac{35}{8}\zeta^4\right)\delta\, d\tau=C_{40}-\frac{3}{2}C_{20}+0{,}375C_{00}.$$

Представлення потенціалу у вигляді (13) дає розв'язок системи рівнянь (6), котра в даному випадку має вигляд (в припущенні, що $Y_l=0$):

$$V(z_j)=\frac{GM}{\sqrt{1+z_j^2}}\sum_{l=1}^{T_N}\frac{(-1)^l}{(1+z_j^2)^l}\sum_{n=l}^{2l}\frac{(2n-1)!!}{2^n}X_l,\qquad j=1,2,...,T_N.$$

Для перевірки описаного алгоритму виконаємо відповідні обчислення, для чого використаємо параметри гравітаційного поля Землі, представленого моделлю GEM-10B [4]. Відповідно, кількість рівнянь визначається параметром T_N, збільшення якого дає більш точні результати. По обчислених значеннях X_1, X_2 за формулами (13) визначаємо відповідно величини C_{20}, C_{40}. Результати обчислень приведемо в таблиці.

Таблиця 1

Кількість рівнянь T_N	Стоксові сталі			
	Значення по моделі		Результат обчислень	
	C_{20}	C_{40}	C_{20}	C_{40}
2	$0{,}1082\cdot10^{-2}$	$0{,}161\,998\,136\cdot10^{-5}$	$-0{,}093\,413\,547\cdot10^{-2}$	$0{,}129\,010\,414\cdot10^{-2}$
4			$-0{,}104\,827\,827\cdot10^{-2}$	$0{,}955\,212\,073\cdot10^{-7}$
6			$-0{,}108\,200\,784\cdot10^{-2}$	$0{,}276\,612\,110\cdot10^{-5}$
8			$-0{,}108\,200\,036\cdot10^{-2}$	$0{,}162\,889\,612\cdot10^{-5}$
10			$-0{,}108\,200\,011\cdot10^{-2}$	$0{,}166\,843\,594\cdot10^{-5}$

Як видно з табл. 1, визначені стоксові постійні є практично ідентичними до вихідних значень. Це дозволяє зробити висновок, що зображення потенціалу як неперервної функції у вигляді (1) дає алгоритм його обчислення у всьому просторі.

1. *Петровская М.С.* Представление гравитационного потенциала Земли в виде рядов, сходящихся во всем пространстве // Тр. I Орловской конференции «Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики». — К.: Наукова думка, 1982. — 115 с.
2. *Фис М.М., Согор А.Р., Фоца Р.С.* Апроксимація потенціалу планети неперервними функціями // Геодинаміка. — 2008. — Т. 1(6). — С.11–15.
3. *Фис М.М., Согор А.Р., Фоца Р.С.* Про можливість визначення коефіцієнтів потенціалу всюди збіжними рядами та їх геофізичне тлумачення // Матеріали XVII міжнародного науково-технічного симпозіуму «Геоінформаційний Міжнародний ювілейний науково-технічний моніторинг навколишнього середовища GPS і GIS-технології», 10–15 вересня, 2012 р. Алушта (Крим). — С.115–119.
4. *Lerch F.I. Putney B., Wagner C.A., Klosko S.M.* Goddard earth models for oceanographic applications (GEM-10B and IOC) // Marine Geodesy. — 1981. — Vol. 5, № 2. — P.145–187.

Исследование структуры коэффициентов представления потенциала всюду сходящимися рядами

Фыс М.М., Брыдун А.М., Согор А.Р.

Национальный университет «Львовская политехника», 79013, г. Львов, ул. Карпинского, 6

Рассмотрены изображения потенциала планеты с помощью непрерывных функций. Исследована структура элементов разложения и возможность их определения. Гармоничность коэффициентов ряда обеспечивает их представление через параметры гравитационного поля и наоборот. Это позволяет находить значения потенциала как непрерывной функции во всем пространстве.

Ключевые слова: потенциал; непрерывная функция; всюду сходящийся ряд; гравитационное поле Земли.

Research of structure of coefficients' representation of the potential by everywhere convergent series

Fys M.M., Brydun A.M., Sohor A.R.

Lviv Polytechnic National University, Karpinskyi str. 6, 79013 Lviv, Ukraine

This paper offers the representation of the potential of planets by a sequence of non-harmonic continuous functions, which are determined by direct resolve of the inversion radius in the binomial series. The coefficients of such interpretation are, in essence, the quantities determined by the body's shape and its filling, generating the potential by the masses and, therefore, taking into account their features. In connection with this, there is a need to study the nature of these quantities (for example, the possible connection with the parameters of the external gravitational field) and to develop methods and means for their determination. There are introduced algorithms for finding these elements of such representation, investigated the character and structure, connected with the harmony in the middle of a bulk body, what allows to find the coefficients of the resolve of series by means of linear combinations of parameters of the external gravitational field of the celestial body (Stokes constant), which is confirmed by arithmetical experiment on a concrete example. On the contrary, according to the known values for the elements in this representation, it is possible to determine Stokes permanent gravitational fields of planetary bodies. This, in turn, allows us to determine the value of the potential of the force of attraction (gravity, if we take into account the rotating component) throughout the space, including at points that are close to the surface or are on it. Obviously, the advantage of this approach consists in the computational aspect, since such images are not harmonic functions of the external generating body, and therefore the proposed approximation should be considered as an approximation of the continuous function. But, given the slow convergence (or even difference) of approaching ball functions in areas close to the surface, such an approach can be considered as an additional tool (or even alternative) when studying the representation of a gravitational field by classical methods (for example, by means of ball functions). Also the recording of the attraction potential using binomial series can be considered as its analytic continuation in the middle of the generating body with the corresponding distribution of masses and used in the interpretation of planetary geodynamic processes, which consist precisely in the proposed areas.

Keywords: potential; continuous function; everywhere convergent series; Earth's gravitational field.

Надійшла до редакції / Received	17.07.2017
Виправлена авторами / Revised	14.08.2017
Прийнята до друку / Accepted	31.08.2017