

Г.И.ЛЬВОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»;
В.Г.СУКИАСОВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА

На основе принципа Вольтерра решена плоская задача для двухслойного цилиндра с вязкоупругим слоем. Искомые величины в виде функций времени найдены с помощью одностороннего интегрального преобразования Лапласа.

Ключевые слова: плоская задача, вязкоупругость, преобразование Лапласа.

Бандажирование считается в настоящее время одним из наиболее эффективных способов ремонта магистральных трубопроводов. В качестве материалов ремонтной накладки целесообразно применять композиты на полимерной основе, сочетающие благоприятные физико-механические свойства с доступностью технологии, что дает возможность для быстрого восстановления работоспособности действующего трубопровода без вывода из эксплуатации поврежденного участка. Перспективность данной методики определяет необходимость теоретического изучения различных аспектов ее реализации, при этом последовательное уточнение применяемых подходов имеет целью полное прояснить особенности получаемых решений. Среди значимых аспектов можно указать формирующееся в ходе отверждения напряженное состояние вследствие объемной усадки полимерного связующего, что оказывает благоприятное сжимающее воздействие на трубу. В дальнейшем это воздействие ослабевает за счет релаксации напряжений. В этой связи представляет определенный интерес исследование развития во времени напряженно-деформированного состояния трубопровода совместно с бандажом, при этом описание полимера моделью линейно вязкоупругой среды позволяет рассматривать независимо эффекты от усадочных напряжений и нагружения трубы внутренним давлением. Аналитическое решение, описывающее вязкоупругое деформирование одиночного цилиндра, приведено в [1]. Решение для вязкоупругого цилиндра внутри упругой оболочки получено в [2] методом аппроксимаций. В настоящей работе предложено замкнутое решение для составного цилиндра на основе одной из частных моделей вязкоупругой среды.

Рассматривается фрагмент трубопровода с ремонтной накладкой из полимерного материала. Расчетная модель представляет собой составной цилиндр под действием внутреннего давления, в условиях плоской деформации. Внутренний цилиндр считается упругим, наружный цилиндр обладает вязко-

упругими свойствами.

В общем случае сложного напряженного состояния определяющие соотношения для линейной вязкоупругой среды наследственного типа имеют вид [2]

$$s_{kl}(t) = 2G_0 \left[e_{kl}(t) - \int_0^t R(t-\zeta) e_{kl}(\zeta) d\zeta \right], \quad (k, l = \overline{1,3}); \quad (1)$$

$$\sigma_0(t) = K_0 \left[\theta(t) - \int_0^t V(t-\zeta) \theta(\zeta) d\zeta \right], \quad (2)$$

где $G_0 = \frac{1}{2} E_0 / (1 + \nu_0)$ и $K_0 = \frac{1}{3} E_0 / (1 - 2\nu_0)$ – мгновенные модуль сдвига и объемный модуль соответственно; ν_0 – коэффициент Пуассона; $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ – среднее нормальное напряжение; $\theta = \varepsilon_{kk}$ – относительное изменение объема при малых деформациях; $s_{kl} = \sigma_{kl} - \sigma_0 \delta_{kl}$ и $e_{kl} = \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} \theta \delta_{kl}$ – компоненты девиаторов напряженного и деформированного состояний; δ_{kl} – символ Кронекера; R и V – ядра сдвиговой и объемной релаксации соответственно.

Реальные полимерные материалы практически не обнаруживают объемной вязкости [2], что позволяет в прикладных расчетах вместо (2) использовать закон Гука:

$$\sigma_0 = K_0 \theta. \quad (3)$$

Применение одностороннего преобразования Лапласа

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (4)$$

к зависимостям (1) при условии $G_0(t) = \text{const}$ дает связь изображений

$$\tilde{s}_{kl}(p) = 2G_0 \tilde{e}_{kl}(p) [1 - \tilde{R}(p)], \quad (k, l = \overline{1,3}), \quad (5)$$

внешне подобную закону Гука для компонент девиаторов, с заменой модуля сдвига на $G_0 [1 - \tilde{R}(p)]$, где p – параметр преобразования.

Принцип Вольтерра [1] дает возможность трактовать компоненты НДС в решении упругой задачи как изображения соответствующих величин из задачи вязкоупругой, если в упругом решении выполнена указанная выше замена. На основе этого подхода рассматривается плоская задача о взаимодействии упругой трубы $a \leq r \leq b$ с вязкоупругим бандажом $b \leq r \leq c$ под действием внутреннего давления P_a . Напряжения и радиальное перемещение в трубе (верхний индекс I) и в упругом бандаже (верхний индекс II) выражены через сдвиговой и объемный модули соответствующих материалов и зависят от величины контактного давления P_k :

$$\sigma_{rr}^I = \frac{1}{b^2 - a^2} \left[P_a a^2 - P_k b^2 - (P_a - P_k) \frac{a^2 b^2}{r^2} \right]; \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^I &= \frac{1}{b^2 - a^2} \left[P_a a^2 - P_k b^2 + (P_a - P_k) \frac{a^2 b^2}{r^2} \right]; \quad \sigma_{zz}^I = \frac{1}{b^2 - a^2} \frac{3K^I - 2G^I}{3K^I + G^I} [P_a a^2 - P_k b^2]; \\
u^I &= \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \left[3 \frac{P_a a^2 - P_k b^2}{3K^I + G^I} r + \frac{P_a - P_k}{G^I} \frac{a^2 b^2}{r} \right]; \\
\sigma_{rr}^{II} &= \frac{P_k b^2}{c^2 - b^2} \left[1 - \frac{c^2}{r^2} \right]; \quad \sigma_{\theta\theta}^{II} = \frac{P_k b^2}{c^2 - b^2} \left[1 + \frac{c^2}{r^2} \right]; \\
\sigma_{zz}^{II} &= \frac{P_k b^2}{c^2 - b^2} \frac{3K^{II} - 2G^{II}}{3K^{II} + G^{II}}; \quad u^{II} = \frac{P_k b^2}{2(c^2 - b^2)} \left[\frac{3}{3K^{II} + G^{II}} r + \frac{1}{G^{II}} \frac{c^2}{r} \right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Учет сдвиговой вязкости наружного цилиндра по принципу Вольтерра при $P_a = \text{const}$ требует замены P_a на P_a/p , K^{II} на K_0 , а G^{II} на $G_0[1 - \tilde{R}(p)]$. Для модели стандартного вязкоупругого тела [3] с ядром релаксации

$$R(t) = \frac{1 - \beta}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \tag{8}$$

где $\beta = G_\infty / G_0 < 1$; G_∞ – длительный модуль сдвига; τ – время релаксации, в формулах вида (7) относительно изображений на месте G^{II} окажется величина $G_0 \frac{p + \beta/\tau}{p + 1/\tau}$. Дальнейшие преобразования приводят к довольно громоздким выражениям, поэтому вводятся промежуточные обозначения. В частности, при отсутствии радиального натяга изображение контактного давления определяется формулой

$$\tilde{P}_k = \frac{A(p + \beta/\tau)(p + \kappa/\tau)}{p[B(p + 1/\tau)^2 + D(p + 1/\tau)(p + \beta/\tau) + H(p + \beta/\tau)(p + \kappa/\tau)]}, \tag{9}$$

где $A = \frac{P_a a^2 (4G^I + 3K^I) G_0 (G_0 + 3K_0)}{(b^2 - a^2) G^I (G^I + 3K^I)}$; $B = \frac{3c^2 K_0}{c^2 - b^2}$; $D = \frac{(3b^2 + c^2) G_0}{c^2 - b^2}$;

$$H = \frac{G_0 (G_0 + 3K_0)}{b^2 - a^2} \left(\frac{3b^2}{G^I + 3K^I} + \frac{a^2}{G^I} \right); \quad \kappa = \frac{G_0 \beta + 3K_0}{G_0 + 3K_0}.$$

Контактное давление, найденное путем обращения (9), имеет вид

$$\begin{aligned}
P_k(t) &= \frac{A}{B + D + H} \left\{ \frac{\beta\kappa}{\mu} + \frac{1}{\rho - \chi} \left[\left(\beta + \kappa - \chi - \rho \frac{\beta\kappa}{\mu} \right) \exp\left(-\chi \frac{t}{\tau}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\rho - \beta - \kappa + \chi \frac{\beta\kappa}{\mu} \right) \exp\left(-\rho \frac{t}{\tau}\right) \right] \right\}, \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\text{где } \chi = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu}; \quad \rho = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu}; \quad \lambda = \frac{2B + (1 + \beta)D + (\beta + \kappa)H}{2(B + D + H)};$$

$$\mu = \frac{B + \beta D + \beta \kappa H}{B + D + H}.$$

Большинство величин в формулах (6) и (7) по характеру зависимости от времени повторяют контактное давление. Осевое напряжение и радиальное перемещение в бандаже помимо P_k зависят также непосредственно от свойств вязкоупругого материала. Поэтому для отыскания этих величин в виде функций времени применяется описанный выше подход, основанный на принципе соответствия. В результате получены выражения

$$\sigma_{zz}''(t) = M \left(2K_0 - \frac{4}{3}G_0 \right) \left[\frac{\varphi\beta}{\mu} + \frac{(\beta - \chi)(\chi - \varphi)}{\chi(\rho - \chi)} \exp\left(-\chi \frac{t}{\tau}\right) + \frac{(\rho - \beta)(\rho - \varphi)}{\rho(\rho - \chi)} \exp\left(-\rho \frac{t}{\tau}\right) \right]; \quad (11)$$

$$u''(t) = \frac{1}{\mu} \left(M\beta r + N \frac{\kappa}{r} \right) + \frac{\chi - 1}{\chi(\rho - \chi)} \left[M(\beta - \chi)r + N \frac{\kappa - \chi}{r} \right] \exp\left(-\chi \frac{t}{\tau}\right) + \frac{\rho - 1}{\rho(\rho - \chi)} \left[M(\rho - \beta)r + N \frac{\rho - \kappa}{r} \right] \exp\left(-\rho \frac{t}{\tau}\right), \quad (12)$$

$$\text{где } \varphi = \frac{3K_0 - 2\beta G_0}{3K_0 - 2G_0}; \quad M = \frac{3Ab^2}{2(B + D + H)(c^2 - b^2)(G_0 + 3K_0)};$$

$$N = \frac{3Ab^2 c^2}{2(B + D + H)(c^2 - b^2)G_0}.$$

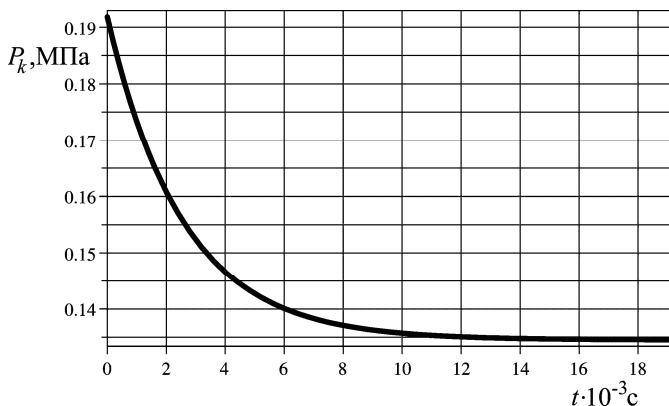


Рисунок 1 – Изменение во времени контактного давления

Наглядное представление о характере полученных зависимостей могут дать представленные ниже диаграммы, построенные при следующих исход-

ных данных: размеры объекта $a = 0,485$ м, $b = 0,510$ м, $c = 0,560$ м; давление в трубе $P_a = 7$ МПа; упругие свойства трубы $E^I = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu^I = 0,3$; характеристики вязкоупругого бандажа $E_0 = 3,4 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_0 = 0,35$; $\beta = 0,65$; $\tau = 2400$ с. Рис. 1 иллюстрирует процесс релаксации контактного давления. На рис. 2-4 показаны напряжения и перемещения в трубе и бандаже в зависимости от радиальной координаты и времени.

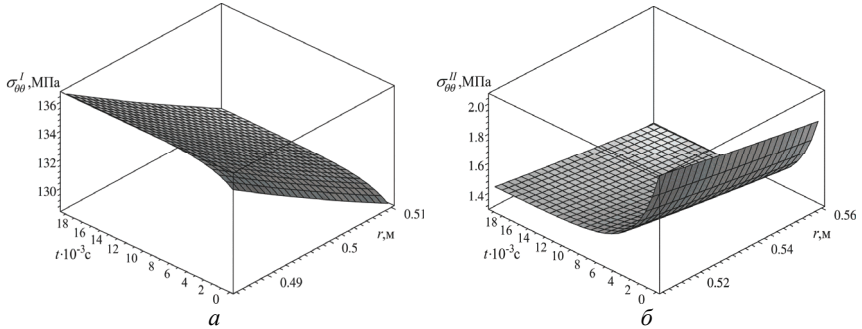


Рисунок 2 – Окружные напряжения: a – в трубе, b – в бандаже

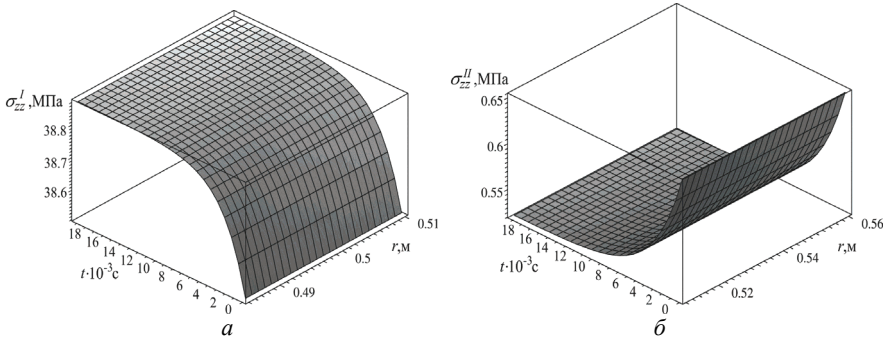


Рисунок 3 – Осевые напряжения: a – в трубе, b – в бандаже

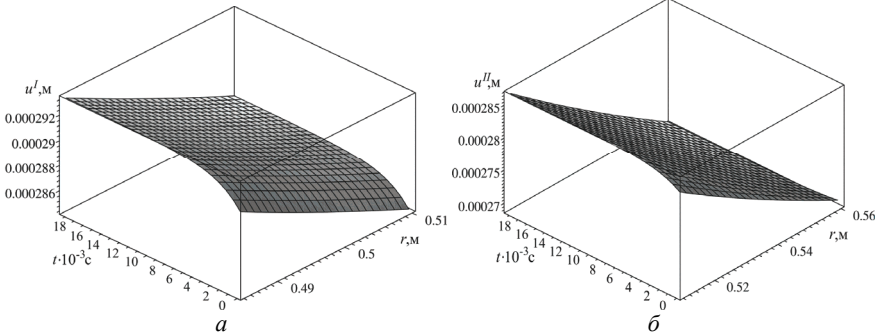


Рисунок 4 – Радиальные перемещения: a – в трубе, b – в бандаже

При анализе вязкоупругого деформирования изотропного цилиндра изображения компонент НДС получаются в виде дробно-рациональных функций переменной p , что позволяет находить оригиналы в замкнутой форме. Для композита на полимерной основе учет ортотропии свойств приводит к трансцендентным зависимостям от p в изображениях, что требует применения специальных приемов для поиска решения.

Список литературы: 1. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с. 2. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязко-упругих материалов. – М.: Наука, 1972. – 328 с.

Поступила в редколлегию 05.07.2013

УДК 539.3

Исследование вязкоупругого деформирования составного цилиндра / Г.И.Львов, В.Г.Сукиасов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 119-124. – Бібліогр.: 2 назв.

На основі принципу Вольтерра вирішена плоска задача для двохшарового циліндра з в'язкопружним шаром. Шукані величини у вигляді функцій часу знайдені за допомогою одностороннього інтегрального перетворення Лапласа.

Ключові слова: плоска задача, в'язкопружність, перетворення Лапласа.

On the basis of Volterra principle a planar problem for a two-layer cylinder with a viscoelastic layer was solved. Unknown quantities as functions of time were found using one-way integral Laplace transform.

Keywords: plane problem, viscoelasticity, Laplace transform.