

**Ю. А. ПЛАКСІЙ**, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПІ»

## СТЕПЕНЕВІ АЛГОРИТМИ ВИЗНАЧЕННЯ КВАТЕРНІОНІВ ОРІЄНТАЦІЇ ТА ЇХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ МОДИФІКАЦІЇ

На основі розкладання частного рішення кінематического рівняння в кватерніонах в ряд по степеням кажущихся поворотів отримані степеневі алгоритми визначення орієнтації та їх інтерполяційні модифікації. Показано, що урахування динаміки вращення твердого тіла в алгоритмах призводить до підвищення точності визначення орієнтації.

**Ключевые слова:** кватерніон, орієнтація, безплатформенна інерціальна система

**Вступ і постановка задачі.** До алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС) пред'являються жорсткі вимоги по точності визначення параметрів орієнтації і завантаженню автономного обчислювача на такті. Це обумовлено тим, що алгоритм визначення орієнтації в БІНС математично відтворює інерціальну систему координат, тобто виступає в ролі «аналітичної платформи».

Для визначення поточної орієнтації триєдра зв'язаних осей відносно інерціального триєдра осей в БІНС в автономному обчислювачі на кожному такті  $[t_{n-1}, t_n]$  реалізується алгоритм визначення кватерніонів орієнтації, який використовує первинну інформацію про обертання твердого тіла на такті у вигляді приростів інтегралів від проекцій вектора абсолютної кутової швидкості тіла  $\vec{\omega}$  на зв'язані осі (позірні повороти) [1]:

$$\theta_{n,i}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Повна орієнтація при цьому обчислюється за формулою додавання поворотів

$$A_n^* = A_{n-1}^* \circ \Delta A_n^*, \quad (2)$$

де  $A_n^* = A^*(t_n)$ ,  $A_{n-1}^* = A^*(t_{n-1})$  – обчислені кватерніони орієнтації в моменти часу  $t_n$  та  $t_{n-1}$  відповідно,  $\Delta A_n^* = \Delta A(\theta_n^*)$  – алгоритм визначення повороту (прийняте наближення до частинного розв'язку кінематичного рівняння  $\dot{A} = 0,5A \circ \vec{\omega}$  з початковою умовою  $A(0) = (1, 0, 0, 0)^T$ ),  $\circ$  – знак кватерніонного множення.

Існуючі алгоритми визначення повороту базуються на формальних розкладеннях частинного розв'язку  $\Delta A_n$  в ряд по степеням кінцевих різниць «на-

зад» вектора позірного повороту  $\bar{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)^T$  [1]. При цьому не враховується той факт, що  $\bar{\omega}$  є розв'язком відповідних динамічних рівнянь.

В роботі [2] отримане розкладення 5-го порядку частинного розв'язку  $\Delta A_n$  в ряд по степенях позірних поворотів (1) у вигляді:

$$\Delta\lambda_0 = 1 - \frac{1}{8}\theta^{*2} + \frac{1}{384}\theta^{*4} + O(\theta^{*5}); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_1 = & \frac{1}{2}\theta_1^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta^{*2} - \frac{1}{12}b_1\right) - \frac{1}{24}\eta_1 + \frac{1}{3840}\theta_1^*\theta^{*4} + \frac{1}{1440}\theta_1^*(a_1b_1(a_2\theta_3^{*2} + \\ & + a_3\theta_2^{*2}) + a_2b_2\theta_3^{*2} - a_3b_3\theta_2^{*2}) + \frac{1}{720}a_2a_3b_1\theta_1^{*3} + \frac{1}{480}\theta_1^*(a_2b_3\theta_3^{*2} - a_3b_2\theta_2^{*2}) + \\ & + \frac{1}{960}b_1\theta_1^*\theta^{*2} + \frac{1}{1440}(b_2\mu_2\theta_3^* - b_3\mu_3\theta_2^* + \theta_1^*(a_3\mu_2^2 - a_2\mu_3^2)) + a_1(a_2\mu_2\theta_3^{*2} - \\ & - a_3\mu_3\theta_2^{*2}) + \frac{1}{960}\eta_1\theta^{*2} + \frac{1}{720}a_1\rho_1\theta_2^*\theta_3^* + \frac{1}{480}(\mu_1\rho_1 - a_1\gamma_1 - a_2a_3\eta_1 - \theta_1^*(\mu_2^2 + \\ & + \mu_3^2)) + \frac{1}{360}\mu_1((a_2 + a_3)\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^* - \gamma_1) - \frac{1}{240}\theta_1^{*2}(a_2\mu_2\theta_3^* + a_3\mu_2\theta_2^*) + O(\theta^{*6}), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\theta^{*2} = \theta_1^{*2} + \theta_2^{*2} + \theta_3^{*2}$ ;  $a_1 = (I_2 - I_3)/I_1$ , (1,2,3);  $I_1, I_2, I_3$  – моменти інерції твердого тіла ( $I_1 \geq I_2 \geq I_3$ );  $m_i = M_i/I_1$ , (1,2,3) – проекції приведенного вектора головного моменту  $\bar{M}$  на зв'язані осі;  $b_1 = a_2\theta_3^{*2} - a_3\theta_2^{*2}$ , (1,2,3);  $\eta_1 = \mu_2\theta_3^* - \mu_3\theta_2^*$ , (1,2,3);  $\gamma_1 = a_2\mu_3\theta_3^* - a_3\mu_2\theta_2^*$ , (1,2,3);  $\rho_1 = \mu_2\theta_2^* + \mu_3\theta_3^*$ , (1,2,3); (1,2,3) – символ кругової перестановки індексів.

Необхідно на основі розкладення (3), (4) побудувати алгоритми визначення повороту, що використовують тільки степені першої різниці вектора позірного повороту, і отримати їх інтерполяційні модифікації.

**Степеневі алгоритми визначення повороту і їх інтерполяційні модифікації.** В умовах, коли на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  з'являється первинної інформації (1) приведені моменти  $m_i$  можна вважати постійними  $m_i = m_i(t_{n-1})$  та обмеженими за величиною  $|m_i| = O(\omega^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , де  $\omega = \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |\bar{\omega}(t)|$ , з розкладень (3),

(4) можна отримати алгоритми визначення кватерніона повороту  $\Delta A_n^* = (\Delta\lambda_{n0}^*, \Delta\lambda_{n1}^*, \Delta\lambda_{n2}^*, \Delta\lambda_{n3}^*)^T$  різного порядку. Такі алгоритми назвемо степеневими, бо вони використовують тільки першу різницю вектора позірного повороту у вигляді (1). Алгоритми першого та другого порядку співпадають з різницеєвими алгоритмами, отриманими в [1].

Степеневий алгоритм визначення повороту третього порядку (САВПЗ) має вигляд:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}; \quad (5)$$

$$\Delta\lambda_{n1}^* = \frac{1}{2}\theta_{n1}^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2} - \frac{1}{12}b_1\right) - \frac{1}{24}\eta_1, \quad (1,2,3), \quad (6)$$

де  $\theta_n^{*2} = \theta_{n1}^{*2} + \theta_{n2}^{*2} + \theta_{n3}^{*2}$ ;  $b_1 = a_2\theta_{n3}^{*2} - a_3\theta_{n2}^{*2}$ , (1,2,3);  $\eta_1 = \mu_2\theta_{n3}^* - \mu_3\theta_{n2}^*$ , (1,2,3) і позначено  $\mu_i = m_i(\Delta t)^2$ ,  $i = 1,2,3$ . Зазначимо, що  $\mu_i = O(\theta_0^2)$ , де  $\theta_0^2 = \theta_{01}^2 + \theta_{02}^2 + \theta_{03}^2$ ,  $\vec{\theta}_0 = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})^T$  – вектор лінійного повороту [2],  $\theta_{0i} = \omega_{i0} \cdot \Delta t$ ,  $\omega_{i0}$ ,  $i = 1,2,3$  – компоненти вектора  $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}(t_{n-1})$ .

Степеневий алгоритм визначення повороту четвертого порядку (САВП4) задається формулами:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2} + \frac{1}{384}\theta_n^{*4}; \quad (7)$$

$$\Delta\lambda_{n1}^* = \frac{1}{2}\theta_{n1}^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2} - \frac{1}{12}b_1\right) - \frac{1}{24}\eta_1, \quad (1,2,3), \quad (8)$$

тобто різняться від алгоритму САВП3 тільки доданком  $\frac{1}{384}\theta_n^{*4}$  в скалярній частині кватерніона визначення повороту. Вплив динаміки обертання твердого тіла на орієнтацію визначається наявністю членів в векторній частині кватерніона визначення повороту в алгоритмах третього та четвертого порядку, які залежать від значень приведених моментів  $m_i$  на такті з йому первинної інформації (1) і динамічних коефіцієнтів  $a_i$ .

У випадку вільного руху твердого тіла ( $m_i = 0$ ,  $i = 1,2,3$ ) алгоритми визначення повороту (5), (6) та (7), (8) набувають більш простого вигляду. Так, для степеневого алгоритму третього порядку (САВПВО3) маємо:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}; \quad (9)$$

$$\Delta\lambda_{n1}^* = \frac{1}{2}\theta_{n1}^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2} - \frac{1}{12}(a_2\theta_{n3}^{*2} - a_3\theta_{n2}^{*2})\right), \quad (1,2,3). \quad (10)$$

Відповідні формули для алгоритму четвертого порядку (САВПВО4) для випадку вільного обертання твердого тіла мають вигляд:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2} + \frac{1}{384}\theta_n^{*4}; \quad (11)$$

$$\Delta\lambda_{n1}^* = \frac{1}{2}\theta_{n1}^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2} - \frac{1}{12}(a_2\theta_{n3}^{*2} - a_3\theta_{n2}^{*2})\right), \quad (1,2,3). \quad (12)$$

Формули (6), (8), (10), (12) містять приведені моменти  $m_i$  і динамічні коефіцієнти  $a_i$ , які на практиці, звичайно, відомі з деякою похибкою. Це може вносити додаткову складову в загальну похибку визначення орієнтації. Таким чином у приведеному вигляді алгоритми САВП3, САВП4, САВПВО3, САВПВО4 не можна безпосередньо застосувати в автономному обчислювачі для

визначення кватерніона повороту. Наведені алгоритми мають, насамперед, методологічне значення, бо констатують наявний зв'язок кінематичних параметрів з динамікою обертання твердого тіла.

Для отримання розрахункових алгоритмів визначення повороту на основі розкладення (3), (4) використаємо отриманий в [2] зв'язок між проекціями вектора лінійного повороту  $\bar{\theta}_0 = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})^T$  і проекціями вектора позірнього повороту  $\bar{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)^T$  у вигляді:

$$\theta_{01} = \theta_{n1}^* - \frac{1}{2}(a_1\theta_{n2}^*\theta_{n3}^* + \mu_1) + \frac{1}{12}a_1(\theta_{n1}^*(a_2\theta_{n3}^{*2} + a_3\theta_{n2}^{*2}) + (\mu_2\theta_{n3}^* + \mu_3\theta_{n2}^*)) - \frac{1}{24}a_1(\theta_{n1}^*(a_2a_3\theta_{n1}^*\theta_{n2}^*\theta_{n3}^* + a_2\mu_3\theta_{n3}^* + a_3\mu_2\theta_{n2}^*) + \mu_2\mu_3) + O(\theta_n^{*5}), (1,2,3). (13)$$

Оскільки  $\mu_i = O(\theta_n^{*2})$ , то з (13) можна виразити  $\mu_i$  через компоненти векторів позірнього та лінійного поворотів:

$$\mu_i = 2\theta_{n1}^* - 2\theta_{01} - a_1\theta_{n2}^*\theta_{n3}^*, (1,2,3). (14)$$

Виключимо  $\mu_i$  в виразах для векторної частини кватерніона повороту САВПЗ і САВП4, при цьому автоматично виключаться також динамічні коефіцієнти  $a_i$ . Отримаємо в результаті нескладних перетворень, що

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^*(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}) + \frac{1}{12}(\bar{\theta}_0 \times \bar{\theta}_n^*). (15)$$

На основі формули (15) можна отримати цілу низку алгоритмів визначення кватерніона повороту, якщо представити вектор лінійного повороту  $\bar{\theta}_0$  на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  в функції первинної інформації виду (1) на такті  $[t_{n-1}, t_n]$ , з попередніх тактів, а також у випадку, коли точками з'йому позірних поворотів є внутрішні точки такту  $[t_{n-1}, t_n]$ . Очевидно, щоб порядок точності таких апроксимаційних алгоритмів відповідав порядку точності алгоритмів САВПЗ, САВП4, треба при апроксимації  $\bar{\theta}_0$  забезпечити відповідний порядок по  $\bar{\theta}_n^*$ .

Якщо представити  $\bar{\theta}_0$  як середньоарифметичне позірних поворотів на сусідніх тактах  $[t_{n-2}, t_{n-1}]$  і  $[t_{n-1}, t_n]$ , тобто

$$\bar{\theta}_0 = (\bar{\theta}_{n-1}^* + \bar{\theta}_n^*)/2, (16)$$

то підстановка цього наближення в (15) приводить до відомого різницевого алгоритму третього порядку, який приведений в [1]:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}; (17)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^*(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}) + \frac{1}{24}(\bar{\theta}_{n-1}^* \times \bar{\theta}_n^*). (18)$$

Застосуємо для визначення  $\bar{\theta}_0$  квадратичну інтерполяцію для  $\bar{\theta}_n^*$  на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  в умовах  $\bar{\theta}_n^*(t_{n-1}) = 0$ :

$$\bar{\theta}_n^* = \bar{a}\tau^2 + \bar{b}\tau, \quad \tau \in [0, \Delta t], \quad (19)$$

що відповідає вектору кутової швидкості на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  у вигляді

$$\bar{\omega} = 2\bar{a}\tau + \bar{b}, \quad \tau \in [0, \Delta t],$$

де  $\bar{\omega}_0 = \bar{b}$ .

Для визначення  $\bar{\theta}_0 = \bar{\omega}_0 \Delta t$  розглянемо дві точки з'яому первинної інформації:  $t_n = t_{n-1} + \Delta t$  та деяку внутрішню точку такту  $t_{n-1+p} = t_{n-1} + p\Delta t$ ,  $p \in (0,1)$  і позначимо відповідні позірні повороти як  $\bar{\theta}_n^*$  та  $\bar{\theta}_{n-1+p}^*$ , тобто  $\bar{\theta}_n^* = \bar{a}(\Delta t)^2 + \bar{b}\Delta t$ ,  $\bar{\theta}_{n-1+p}^* = \bar{a}(p\Delta t)^2 + \bar{b}(p\Delta t)$ . В результаті розв'язання системи лінійних рівнянь відносно  $\bar{a}$  та  $\bar{b}$  отримаємо, що:

$$\bar{\theta}_0 = \frac{\bar{\theta}_{n-1+p}^* - p^2 \bar{\theta}_n^*}{p(1-p)}, \quad p \in (0,1). \quad (20)$$

Задамо  $p = 0,5$ , що відповідає внутрішній точці з'яому посередині такту, тобто  $t_{n-1/2} = t_{n-1} + 0,5\Delta t$ . В цьому випадку з (20) маємо наступну апроксимацію для вектора лінійного повороту:

$$\bar{\theta}_0 = 4\bar{\theta}_{n-1/2}^* - \bar{\theta}_n^*. \quad (21)$$

Підстановка  $\bar{\theta}_0$  (21) в формулу (15) дає для векторної частини кватерніона повороту наступний вираз:

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{1}{3}(\bar{\theta}_{n-1/2}^* \times \bar{\theta}_n^*). \quad (22)$$

Таким чином, для двох точок з'яому позірних поворотів маємо інтерполяційний алгоритм визначення повороту 3-го порядку (АВП3і2) у вигляді:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}; \quad (23)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{1}{3}(\bar{\theta}_{n-1/2}^* \times \bar{\theta}_n^*). \quad (24)$$

Відповідний алгоритм визначення повороту 4-го порядку (АВП4і2) запишеться так:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2} + \frac{1}{384}\theta_n^{*4}; \quad (25)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{1}{3}(\bar{\theta}_{n-1/2}^* \times \bar{\theta}_n^*). \quad (26)$$

Застосуємо кубічну інтерполяцію для  $\bar{\theta}_n^*$  на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  в умовах  $\bar{\theta}_n^*(t_{n-1}) = 0$ :

$$\bar{\theta}_n^* = \bar{a}\tau^3 + \bar{b}\tau^2 + \bar{c}\tau, \quad \tau \in [0, \Delta t]. \quad (27)$$

Для вектора кутової швидкості маємо представлення:

$$\bar{\omega} = 3\bar{a}\tau^2 + 2\bar{b}\tau + \bar{c}, \quad \tau \in [0, \Delta t],$$

де  $\bar{\omega}_0 = \bar{c}$ .

Для визначення  $\bar{\theta}_0$  використаємо три точки з'яому первинної інформації: точку  $t_n = t_{n-1} + \Delta t$  та дві внутрішні точки такту  $t_{n-1+p} = t_{n-1} + p\Delta t$  та  $t_{n-1+m} = t_{n-1} + m\Delta t$ ,  $p \in (0,1)$ ,  $m \in (0,1)$ ,  $p \neq m$ . Відповідні позірні повороти позначимо як  $\bar{\theta}_n^*$ ,  $\bar{\theta}_{n-1+p}^*$  та  $\bar{\theta}_{n-1+m}^*$ . Після розв'язання системи лінійних рівнянь відносно  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  та  $\bar{c}$  отримаємо, що:

$$\bar{\theta}_0 = \frac{p^2 m^2 (p-m) \bar{\theta}_n^* + m^2 (m-1) \bar{\theta}_{n-1+p}^* + p^2 (1-p) \bar{\theta}_{n-1+m}^*}{pm(p-m)(1-p-m+pm)}, \quad (28)$$

де  $p \in (0,1)$ ,  $m \in (0,1)$ ,  $p \neq m$ .

Задамо  $p = 1/3$ ;  $m = 2/3$ , тобто виберемо внутрішні точки з'яому  $t_{n-1+p}$ ,  $t_{n-1+m}$  так, що  $t_n - t_{n-1+m} = t_{n-1+p} - t_{n-1} = 1/3 \Delta t$ . За таких умов з (28) маємо:

$$\bar{\theta}_0 = -(9/2) \bar{\theta}_{n-2/3}^* + 9 \bar{\theta}_{n-1/3}^* + \bar{\theta}_n^*, \quad (29)$$

де позначено  $\bar{\theta}_{n-2/3}^* = \bar{\theta}^*(t_{n-2/3})$ ,  $t_{n-2/3} = t_{n-1} + 1/3 \Delta t$ ,  $\bar{\theta}_{n-1/3}^* = \bar{\theta}^*(t_{n-1/3})$ ,  $t_{n-1/3} = t_{n-1} + 2/3 \Delta t$ .

Підстановка (29) в (15) дає:

$$\Delta \bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2} \bar{\theta}_n^* (1 - \frac{1}{24} \theta_n^{*2}) + \frac{3}{8} (2 \bar{\theta}_{n-2/3}^* - \bar{\theta}_{n-1/3}^*) \times \bar{\theta}_n^*.$$

Отже, для трьох точок з'яому позірних поворотів  $t_n$ ,  $t_{n-2/3}$ ,  $t_{n-1/3}$  маємо інтерполяційний алгоритм визначення повороту 3-го порядку (АВП3і3) у вигляді:

$$\Delta \lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8} \theta_n^{*2}; \quad (30)$$

$$\Delta \bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2} \bar{\theta}_n^* (1 - \frac{1}{24} \theta_n^{*2}) + \frac{3}{8} (2 \bar{\theta}_{n-2/3}^* - \bar{\theta}_{n-1/3}^*) \times \bar{\theta}_n^*. \quad (31)$$

Відповідний алгоритм визначення повороту 4-го порядку (АВП4і3) задається формулами:

$$\Delta \lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8} \theta_n^{*2} + \frac{1}{384} \theta_n^{*4}; \quad (32)$$

$$\Delta \bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2} \bar{\theta}_n^* (1 - \frac{1}{24} \theta_n^{*2}) + \frac{3}{8} (2 \bar{\theta}_{n-2/3}^* - \bar{\theta}_{n-1/3}^*) \times \bar{\theta}_n^*. \quad (33)$$

Відзначимо, що на відміну від різницевого алгоритмів визначення пово-

роту, наведених в [1], інтерполяційні алгоритми АВПЗі2, АВП4і2, АВПЗі3, АВП4і3 використовують позірні повороти у внутрішніх точках такту  $[t_{n-1}, t_n]$  і не потребують «розгонки».

**Чисельний експеримент.** Для отримання оцінок методичних похибок розроблених інтерполяційних алгоритмів визначення повороту АВПЗі2, АВП4і2, АВПЗі3, АВП4і3 застосуємо аналітичну еталонну модель регулярної прецесії [3], що включає в себе аналітичні вирази для позірних поворотів:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (34)$$

де  $\theta_1(t) = 2a \sin \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \psi) / k$ ,  $\theta_2(t) = -2a \sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 + \psi) / k$ ,  $\theta_3(t) = \omega_3(0) \cdot t$ , яким відповідає точний кватерніон орієнтації  $\Lambda(t)$  з компонентами:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \\ \lambda_1(t) &= a \sin \alpha_2 \cos(\alpha_1 + \psi) / v; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\lambda_2(t) = -a \sin \alpha_2 \sin(\alpha_1 + \psi) / v;$$

$$\lambda_3(t) = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2,$$

де позначено:  $a = (\omega_1^2(0) + \omega_2^2(0))^{1/2}$ ,  $k = (1 - \xi_2)\omega_3(0)$ ,  $\xi_2 = I_3/I_1$ ,  $\cos \psi = \omega_1(0)/a$ ,  $\sin \psi = -\omega_2(0)/a$ ,  $v = (a^2 + \xi_2^2 \omega_3^2(0))^{1/2}$ ,  $r = \xi_2 \omega_3(0) / v$ ,  $\alpha_1 = 0,5kt$ ,  $\alpha_2 = 0,5vt$ .

В якості похибки алгоритмів будемо розглядати похибку дрейфу [1], яка, на відміну від похибки норми кватерніона орієнтації  $\Lambda_n^*$ , є неусувною.

На рис. 1 показана отримана за допомогою еталонної моделі регулярної прецесії (34), (35), реалізованої на інтервалі часу  $t \in [0; 2000]$  с з тактом  $\Delta t = 0,1$  с при  $\xi_2 = 12/35$  і початкових умовах  $\vec{\omega}(0) = (0,012; -0,011; 0,015)$  рад/с,  $\Lambda(0) = (1,0,0,0)^T$  оцінка похибки дрейфу для алгоритму визначення повороту (17), (18), який має третій порядок точності і позначений тут як АВПБШЗ. На рис. 2 представлена оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВПЗі2 (23), (24). Отримано, що для вказаної еталонної моделі похибка дрейфу алгоритму АВПЗі2 приблизно на два порядки менша, ніж для алгоритму АВПБШЗ.

На рис. 3 представлена оцінка похибки дрейфу для алгоритму четвертого порядку, наведеного в [1], який позначимо як АВПБШ4. Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВП4і2 (25), (26) показана на рис. 4. Порівняння результатів дозволяє зробити висновок, що алгоритм АВП4і2 має значно меншу похибку дрейфу, ніж різницевий алгоритм АВПБШ4.

Похибки дрейфу для алгоритмів АВПЗі3 (30), (31) і АВП4і3 (32), (33) мають приблизно однакові значення (рис. 5), вони гірші, ніж для алгоритмів АВПЗі2 і АВП4і2, але кращі, ніж для алгоритмів АВПБШЗ і АВПБШ4.

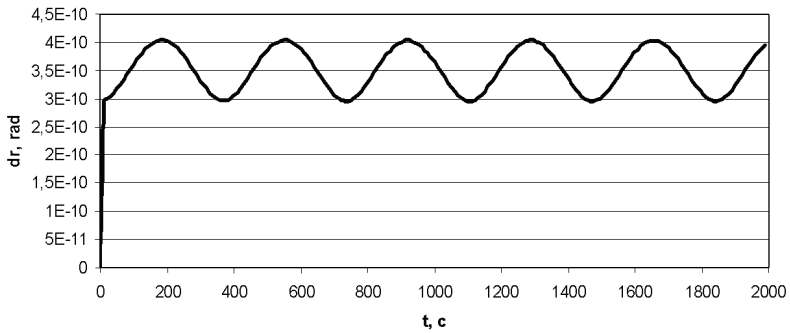


Рисунок 1 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВП3ШЗ

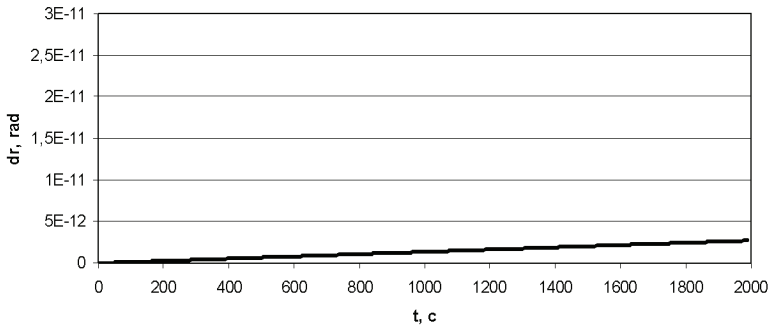


Рисунок 2 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВП3i2

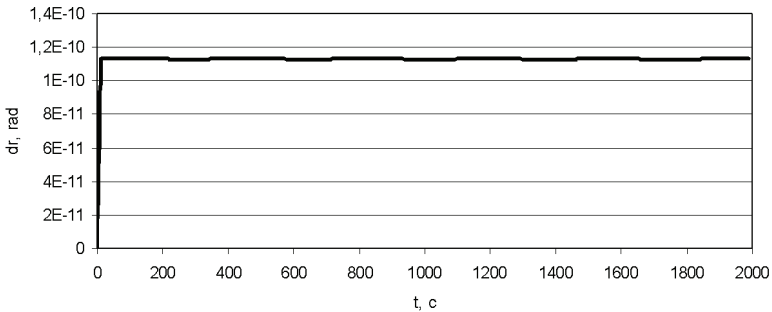


Рисунок 3 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВП3i4

**Висновки.** На основі отриманого в [2] розкладення 5-го порядку частинного розв'язку кінематичного рівняння в кватерніонах в степеневий ряд в термінах першої різниці вектора позірною повороту (1) одержані алгоритми третього та четвертого порядку, векторна частина кватерніона повороту яких явно залежить від динамічних коефіцієнтів  $a_i$  і приведених моментів  $m_i$ . Для степеневих алгоритмів побудовані їх інтерполяційні модифікації, що не міс-



тять динамічні коефіцієнти і приведені моменти. Це можливо за рахунок використання інформації про позірні повороти, що зняті у внутрішніх точках такту  $[t_{n-1}, t_n]$ . На еталонній моделі регулярної прецесії показано, що інтерполяційні модифікації степеневих алгоритмів мають підвищені точносні характеристики у порівнянні з відомими різницевиими алгоритмами.

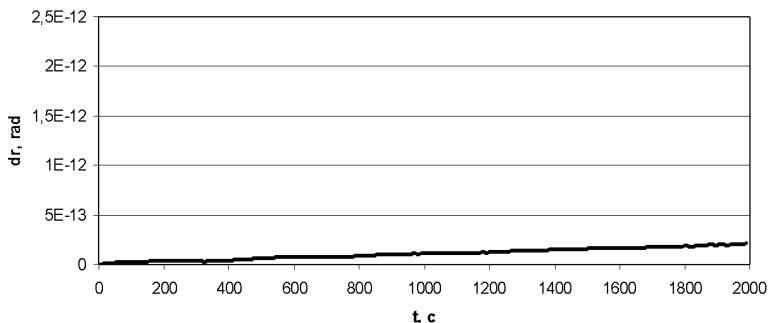


Рисунок 4 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВП4і2

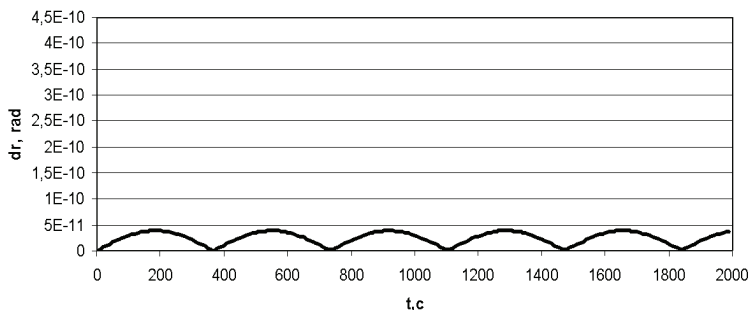


Рисунок 5 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритмів АВП3і3 і АВП4і3

**Список літератури:** 1. *Бранец В.Н.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / *В.Н.Бранец, И.П.Шмыглевский.* – М.: Наука, 1973. – 320 с. 2. *Плаксій Ю.А.* Разложение 5-го порядка частного решения кинематического уравнения в кватернионах в ряд по степеням кажущихся поворотов / *Ю.А.Плаксій* // Вісник НТУ «ХП». – 2009. – № 42. – С. 137–141. 3. *Плаксій Ю.А.* Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта / *Ю.А.Плаксій* // Вестник Харьк. политехн. ин-та. – 1992. – №2, выпуск 11. – С.79–83.

*Надійшла до редколегії 18.04.2013*

УДК 629.7.05

**Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації / Ю. А. Плаксій** // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 168-177. – Бібліогр.: 3 назв.

На основі розкладення частинного розв’язку кінематичного рівняння в кватерніонах в ряд по степенях позірних поворотів отримані степеневі алгоритми визначення орієнтації та їх інтерпо-

ляційні модифікації. Показано, що врахування динаміки обертання твердого тіла в алгоритмах приводить до підвищення точності визначення орієнтації.

**Ключові слова:** кватерніон, орієнтація, безплатформена інерціальна навігаційна система

The orientation algorithms, based on the decomposition of the particular solution of the quaternion kinematic equation in the degree series of seeming turns, and their interpolation modifications are received. It is shown that the considering of a rigid body dynamics in algorithms gives orientation definitions to accuracy increase.

**Keywords:** quaternion, orientation, strapdown inertial navigation system