

**Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ**, д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ»;  
**С. О. ПАЩЕНКО**, студент, НТУ «ХПІ»;  
**О. В. ГУДЗЕНКО**, аспірант, НТУ «ХПІ»

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРЬОХВIMIРНОЇ ЗАДАЧІ НЕСТАЦIОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КОРПУСА СУПUTНИКА ТИПУ «СІЧ-2»

Стаття посвящена розшуканню розв'язання задачі нестационарної тепlopроводності в корпусі штучного супутника Землі типу «Січ-2» при його рухах по околоземній орбіті. Показано, що відповідне розподiленiє температур в блокi гiроскопiв, установленому на даному космiчному апаратi, для рiзних моментiв часу. Определено площа радиаторних пластин для отвода теплової енергii с целью обеспечення роботи гiроскопiв в заданому дiапазонi температур в штатном режимi. Проведено исследование нагрева корпуса супутника с различными коэффициентами теплоизоляции внутренней стенки.

**Ключевые слова:** температура, нестационарная тепlopроводность, искусственный спутник Земли, теплоизоляция, метод конечных элементов, радиационное излучение тепла.

**Вступ.** Останнім часом в космічній техніцi (наприклад, у супутниках) спостерігається перехід від механічних гіроскопів до лазерних, одним із елементів яких є оптоволоконні трубки. В багатьох випадках якість керування космічним апаратом залежить від того, настільки точно датчик може зчитати параметри кутової швидкостi та прискорення. Матерiал, з якого виготовленi оптоволоконні трубки, достатньо чуттєвий на змiну температури оточуючого середовища (в даному випадку – стiнки блока гiроскопа): при вiдносно незначнiй змiнi температури стiнки легко деформуються, тим самим даючи значну похибку показань гiроскопа. Для того, щоб якiсно провести керування космічним апаратом, необхiдно враховувати теплову похибку. Одним з ефективних шляхiв вирiшення цiєї проблеми є розв'язання задачi тепlopровiдностi.

У зв'язку з тим, що всi фiзичнi процеси протiкають у космосi, в якому вiдсутнi «робочi» тiла, що передають теплову енергiю (наприклад, газ), можуть мати мiсце значнi перегрiви апаратних частин супутника. У зв'язку з цим виникає завдання сконструювати корпус таким чином, щоб поглинання та випромiнювання теплової енергiї було приблизно однаковим, а гiроскопи знаходилися в робочому температурному дiапазонi. Таким чином, необхiдно розв'язати двi задачi:

- 1) знайти еволюцiю температурного поля на корпусi;
- 2) запропонувати конструкторське рiшення, що забезпечить вихiд температурного поля на заданий режим роботи.

**1 Умови функціонування.** Супутник, який наведено на рис. 1, знаходиться на високій орбіті Землі, висота якої 700 км, період обертання 100 хв.

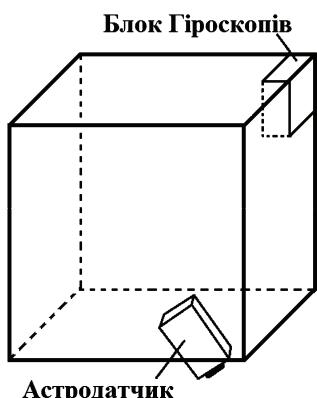


Рисунок 1 – Схема штучного супутника Землі типу «Січ-2»

В момент відділення від ракети-носія супутник спрямований скануючим пристроєм на Землю, а площиною, на якій розташовано астродатчик, – на Сонце. Корпус супутника представляє собою порожністий паралелепіпед, товщина стінки якого  $\delta = 20$  мм, довжина зовнішньої грані –  $a = 740$  мм, внутрішньої –  $b = 700$  мм. Уесь корпус супутника виготовлено зі сплаву діоралюмінію із коефіцієнтами тепlopровідності, рівними за всіма напрямками:  $k_x = k_y = k_z = 160$  Вт/мм · К. Густина матеріалу –  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>. Протягом всього періоду обертання сканер не змінює свого положення, тобто завжди є спрямованим на Землю. Корпус супутника здійснює скануючи

коливання земної поверхні в діапазоні кута  $\alpha = 30^\circ$  з періодом  $T_1 = 10$  хв. Супутник періодично входить в зону тіні Землі, кут якої складає  $\gamma = 100^\circ$ , та рухається за круговою орбітою. Схему руху представлено на рис. 2.

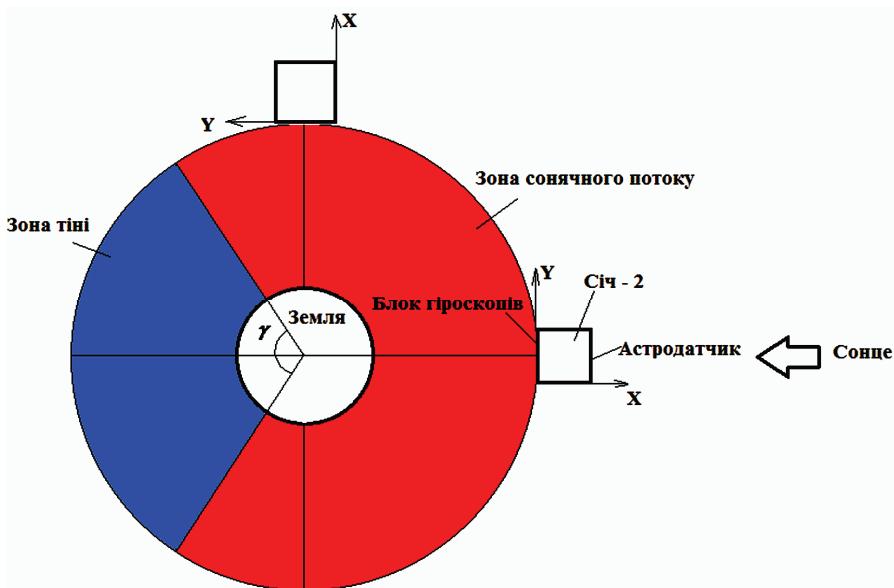


Рисунок 2 – Схема обертання штучного супутника Землі типу «Січ-2»

Вважатимемо, що на сонячній стороні теплообмін відбувається за законом Неймана, а в тіньовій стороні – за законом Стефана-Больцмана [1]. На внутрішніх поверхнях корпуса супутника передача теплової енергії відбувається шляхом радіаційного випромінювання. На віддаленіх орбітах середня інтенсивність теплового (сонячного) потоку складає  $\bar{q} = 133,6 \text{ Вт}/\text{мм}^2$  [2].

**2 Математична постановка задачі.** Розв'язуємо задачу трьохвимірної нестационарної тепlopровідності [1] у замкненої області  $\Omega$ , що обмежена поверхнею  $S$ :

$$u_t = k_x u_{xx} + k_y u_{yy} + k_z u_{zz} + f(x, y, z, t), \quad (1)$$

де  $u(x, y, z, t)$  – невідома функція розподілу температури;  $f(x, y, z, t)$  – функція розподілу теплових джерел;  $k_x, k_y, k_z$  – коефіцієнти тепlopровідності в напрямках осей  $OX, OY, OZ$  відповідно.

У зв'язку з тим, що корпус супутника постійно знаходиться в процесі руху, заданий температурний режим на поверхні буде відсутнім, тобто крайові умови першого роду не включаються в постановку задачі. Отже, сформулюємо закони теплообміну наступним чином.

Крайові умови 2 роду (Неймана):

$$\frac{\partial u}{\partial n} |_{S_2} = q(t), \quad (2)$$

$S_2$  – поверхня, на якій задано інтенсивність теплового потоку у вигляді функції  $q(t)$ .

Крайові умови 4 роду (радіаційний теплообмін):

$$\frac{\partial u}{\partial n} |_{S_3} = Ae\delta(T_1^4 - T_2^4), \quad (3)$$

де  $A$  – площа поверхні, на якій відбувається радіаційний теплообмін з оточуючим середовищем;  $e$  – коефіцієнт чорноти;  $\delta$  – константа Стефана-Больцмана,  $\delta = 5,670373 \cdot 10^{-8}$ ;  $T_1$  – температура тіла на поверхні  $S_3$ ;  $T_2$  – температура оточуючого середовища.

Як початкові умови приймаємо розподіл температур при  $t = 0$ :

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \quad (4)$$

**3 Метод розв'язання.** Задачу розв'язуємо методом скінченних елементів. Проводячи дискретизацію області на скінчені елементи та застосовуючи основні співвідношення методу зважених відхилів для кожного елементу, отримаємо постановку трьохвимірної задачі нестационарної тепlopровідності методом скінченних елементів [3, 4], що була розглянута раніше в статті [5]. Відмінність даної задачі від попередніх є в тому, що до закону теплообміну на поверхні додаються додаткові умови теплового радіаційного випромінювання. Далі коротко опишемо алгоритм, зосереджуючись на розв'язку задачі з крайовими умовами четвертого роду Стефана-Больцмана.

Представимо шуканий розв'язок у вигляді ряду [3], [4]:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) N_i(x, y, z), \quad (5)$$

де  $N_i(x, y, z) | i=1, n$  – базисні функції (БФ), які залежать від 3х геометричних координат;  $u_i(t)$  – нестационарний температурний розподіл у вузлах СЕ сітки, що є функцією часу. Побудуємо зважені відхили по області  $\Omega$ , границі  $\Gamma_1$ , на якій задані країові умови 2 роду та границі  $\Gamma_2$ , на якій задано тепловий радіаційний потік. Для того, щоб найточніше знайти розв'язок задачі (1), (2), (3), вимагатимемо, щоб сума відхилів дорівнювала нулю [3]:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \overline{W}_l R_{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \overline{\overline{W}}_l R_{\Gamma_2} d\Gamma = 0, \quad (6)$$

де  $W_l$  – вагова функція для області;  $\overline{W}_l$  – вагова функція для границі, де задано тепловий потік;  $\overline{\overline{W}}_l$  – вагова функція для границі, де задано радіаційне випромінювання. Для мінімізації першого відхилу виразу (6), підставимо припустимий розв'язок (5) в диференційне рівняння (1), та після цього отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{du_i(t)}{dt} W_l N_i(x, y, z) d\Omega &= \int_{\Omega} k_x \sum_{i=1}^n u_i(t) W_l \frac{\partial^2 N_i(x, y, z)}{\partial x^2} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left[ k_y \sum_{i=1}^n u_i(t) W_l \frac{\partial^2 N_i(x, y, z)}{\partial y^2} + k_z \sum_{i=1}^n u_i(t) W_l \frac{\partial^2 N_i(x, y, z)}{\partial z^2} \right] d\Omega + \int_{\Omega} f(x, y, z, t) W_l d\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Для мінімізації зважених відхилів теплового та радіаційного потоків, підставимо апроксимацію (5) до другого та третього доданку виразу (6) відповідно:

$$\int_{\Gamma_1} \overline{W}_l \left( \bar{q} - \sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{\partial N_i(x, y, z)}{\partial n} \right) d\Gamma = 0; \quad \int_{\Gamma_1} \overline{\overline{W}}_l \left( A e \delta \left( T_1^4 - T_2^4 \right) - \sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{\partial N_i(x, y, z)}{\partial n} \right) d\Gamma = 0.$$

Мінімізуємо одночасно відхил по області та по граници з тепловим потоком, взявши заздалегідь граничні функції ваги наступним чином:

$$W_l = -\overline{W}_l.$$

Застосовуючи формулу Гріна для правої частини рівняння (7), отримаємо наступний вираз:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \frac{du_l(t)}{dt} \right] &= k_x \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right] u_l(t) + k_y \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right] u_l(t) + \\ &+ k_z \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \right] u_l(t) + \int_{\Omega} f(x, y, z, t) N_j d\Omega. \end{aligned}$$

Даний підхід дозволяє перевести базисні функції з класу диференційо-

ваності  $C_2$  до класу  $C_1$ . Тим самим для розв'язання задачі виберемо триліній-ні базисні функції, що мають наступний вигляд:

$$N_i = \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \left( \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right) \left( \frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right).$$

Для розрахунків застосуємо скінчений елемент у вигляді правильного восьмивузлового паралелепіпеду.

Введемо матрицю вкладу, що має назву локальної матриці теплопровідності:

$$K_{ij} = k_x \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right] + k_y \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right] + k_z \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \right].$$

По аналогії з матрицею теплопровідності введемо матрицю, елементи якої обчислюються як інтеграли добутків базисних функцій:

$$P_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega.$$

Узагальнені термодинамічні сили позначимо, як:

$$Q_j = \int_{\Omega} f(x, y, z, t) N_j d\Omega.$$

Узагальнені поверхневі сили, що утворюють тепловий потік, позначимо наступним чином:

$$S_j = \int_{\Gamma} q N_j d\Gamma.$$

Узагальнені поверхневі сили, що утворюють радіаційне випромінювання, розіб'ємо на дві частини та позначимо наступним чином:

$$R^1_j = \int_{\Gamma} \left( A e \delta(T_1^4 - T_2^4) \right) N_j d\Gamma; \quad R^2_j = u_j \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial N_i}{\partial n} \right) N_j d\Gamma,$$

де  $R^1_j$  – вектор-стовпець, в який входять вільні зважені члени від радіаційного потоку;  $R^2_j$  – вектор-стовпець, в який входять зважені добутки нормальних похідних від базисних функцій.

На кожному елементі локальні матриці мають розмірність  $8 \times 8$ , тобто  $i = 1 \dots 8$ ;  $j = 1 \dots 8$ . До того ж всі локальні матриці будуть позитивно визначеними та симетричними. Тоді, з урахуванням всіх позначень, задача переформулюється у наступному вигляді:

$$P_{ij} \frac{du_j(t)}{dt} = (K_{ij} + R^2_j) u_j(t) + Q_j + S_j + R^1_j. \quad (8)$$

До (8) додаємо початкові умови (4).

Процес ансамблювання локальних матриць в глобальну детальніше розглянуто в роботі [3-5], а створення геометричної моделі – у [5,6].

Для дискретизації виразу (8) за часом застосуємо чисельну схему Ейлера: представимо похідну вузлової температури через відношення скінченних різниць:

$$\frac{du_i(t)}{dt} \approx \frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t)}{\Delta t}. \quad (9)$$

Після підстановки виразу (9) у формулу (8), отримаємо:

$$P_{ij} \frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t)}{\Delta t} = \left( K_{ij} + R^2_j \right) u_i(t + \Delta t) + Q_j + S_j + R^1_j.$$

Провівши перетворення, маємо:

$$\left( K_{ij} - \frac{P_{ij}}{\Delta t} + R^2_j \right) u_i(t + \Delta t) = -\frac{P_{ij}}{\Delta t} u_i(t) - Q_j + S_j + R^1_j.$$

**4 Аналіз результатів.** Приймемо, що після віddлення корпусу супутника від ракети-носія його початкова температура складає  $320 \text{ } ^\circ\text{K}$ . Для розв'язання вище поставленої задачі побудуємо скінченно-елементну модель корпуса супутника, кількість елементів якої складає 6400. Застосуємо тактovий крок для ітераційної схеми Ейлера  $\tau = 2 \text{ хв}$ . З метою зменшення підвдення теплової енергії, що надходить від сонячного потоку візьмемо коефіцієнт чорноти для сплаву дюралюмінію  $e = 0,04$  [2].

З урахуванням періодів руху супутника навколо Землі та сканування застамо вирази для теплових потоків: для поверхонь  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ , що зображені на рис. 3, де  $S_3$  – поверхня корпусу супутника, на якій розміщено астродатчик;  $S_4$  – поверхня корпусу супутника, на якій розміщено блок гіроскопів.

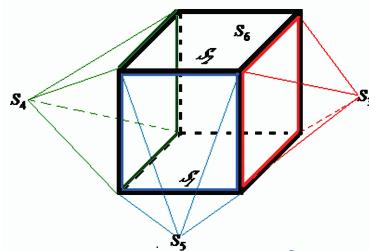


Рисунок 3 – Схема граней, на які діють теплові потоки Сонця та радіаційне випромінювання

Для поверхні  $S_3$ :

$$Q = \vec{q} \cos\left(\frac{2t\pi}{T}\right) \sin(\varphi),$$

де  $Q$  – кількість теплоти, що приймає поверхня від Сонця;  $t$  – поточний момент часу;  $T$  – період обертання супутника навколо Землі,  $T = 6000 \text{ с}$ ;  $\vec{q}$  –

інтенсивність теплового потоку;  $\varphi$  – кут, що характеризує коливання в процесі сканування:

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{2t\pi}{T_1}\right),$$

де  $T_1$  – період коливань при скануванні,  $T_1 = 600$  с.

Для поверхні  $S_5$ :

$$Q = \bar{q} \sin\left(\frac{2t\pi}{T}\right) \sin(\varphi).$$

Для поверхонь  $S_2, S_1$ :

$$Q = \bar{q} \sin(\varphi).$$

Поверхні  $S_4, S_6$  знаходяться в першій чверті періоду в тіньовій стороні. В останніх чвертях періоду обертання теплові потоки знаходяться аналогічним чином. Розглянемо, як веде себе температурне поле в залежності від коефіцієнта ізоляції  $\lambda$  внутрішніх стінок. Коефіцієнт ізоляції змінюється в межах 0...1, де 0 характеризує повністю ізольоване тіло, а 1 – повну відсутність ізоляції.

На рис. 4 надано результати розв'язання задачі нестационарної тепло-проводності для СЕ, які знаходяться у місті встановлення блоку гіроскопів, протягом періоду обертання супутника навколо Землі.

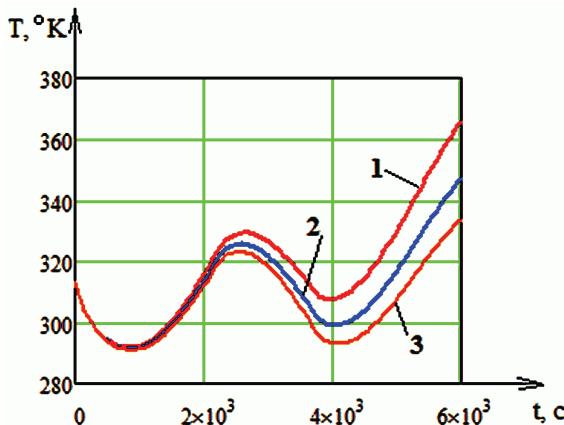


Рисунок 4 – Зміновання температури у блоці гіроскопів при різних коефіцієнтах теплоізоляції

Крива 1 описує еволюцію температури на блоці гіроскопа з коефіцієнтом теплоізоляції  $\lambda = 1$ ; крива 2 –  $\lambda = 0,5$ ; крива 3 –  $\lambda = 0,2$ .

На проміжку часу з 0 до 900 секунди спостерігається інерційне остигання блока гіроскопів. Це явище має місце у зв'язку з двома причинами: передача теплової енергії від нагрітої Сонцем поверхні за рахунок тепlopровідно-

сті не може бути миттєвою; блок гіроскопів знаходиться в тіньовій стороні супутника, на поверхні якого відбувається остигання за рахунок радіаційного випромінювання. Після того, як супутник перетинає кут  $90^\circ$ , грань, на якій встановлено гіроскопи, повертається до сонячної сторони, у зв'язку з чим спостерігається інтенсивний нагрів блока гіроскопа, проте, починаючи з 2267 секунди, супутник входить в зону тіні Землі, і спостерігається інерційний нагрів блока гіроскопа. Після того, як супутник виходить із зони тіні Землі, грань гіроскопа знову повернена до Сонця, у зв'язку з чим спостерігається значне підвищення температури аж до завершення періоду обертання. Як видно з рис. 4, самостійно супутник охолодитися не може (за рахунок його тіньової сторони), а зони тіні Землі також для цього не достатньо. Це виникає через те, що кількість теплоти, що приходить від сонячного потоку більша, ніж випромінена на тіньової стороні шляхом радіаційного теплообміну.

За один період обертання спостерігається підвищення температурного поля відносно початкового. Хоча теплоізоляція дозволяє знизити кількість теплової енергії на блоках гіроскопів, проте через декілька періодів обертань температура перевищить робочий температурний діапазон гіроскопів, і вони не зможуть працювати у штатному режимі.

Далі проаналізовано змінювання температури за часом у разі встановлення радіаторних панелей на грань, де знаходяться гіроскопи, з метою виходу на початковий температурний режим. Площу панелей розраховано для різних коефіцієнтів теплоізоляції. Місце встановлення радіаторних пластин обрано, виходячи з того, що дана грань максимально довго знаходить в тіньовій стороні.

На рис. 5 показано змінювання температури у місці розташування блоку гіроскопів з урахуванням встановлених радіаторних пластин. Розглянути три випадки, що відповідають різним коефіцієнтам теплоізоляції  $\lambda$  внутрішніх стінок.

На рис. 5 криву 1 побудовано для випадку  $\lambda = 1$ ; криву 2 –  $\lambda = 0,5$ , криву 3 –  $\lambda = 0,2$ .

На рис. 5 видно, що за рахунок радіаторних пластин кут інерційного остигання та нагрівання суттєво збільшився. На проміжку часу від 1200 до 2267 с (до зони входу супутника в тінь Землі) спостерігається значний стрибок температурного поля за рахунок того, що пластини повернуті до Сонця. Але у зв'язку з тим, що цей вплив відбувається недовго, то в зоні тіні Землі спостерігається суттєве остигання.

В ході циклу розрахунку для різних коефіцієнтів теплоізоляції було знайдено площі радіаторів: для  $\lambda = 1 - S = 2700 \text{ mm}^2$ , для  $\lambda = 0,5 - S = 2300 \text{ mm}^2$ , для  $\lambda = 0,2 - S = 2100 \text{ mm}^2$ . Незважаючи на те, що зміна температури з радіаторними пластиналами стала більш інтенсивною, даний підхід дозволяє вивести температурне поле в заданий початковий режим з абсолютною величиною температур, що знаходиться в робочому діапазоні гіроскопів.

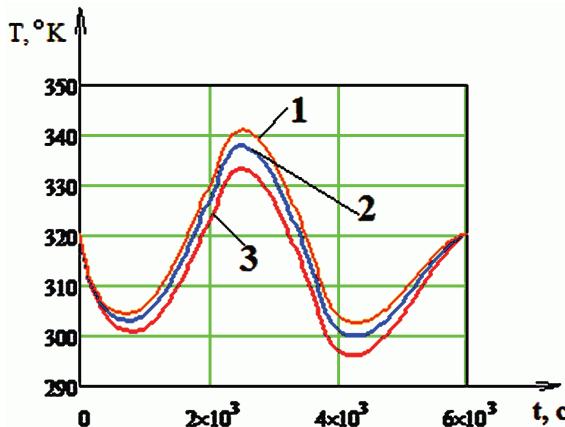


Рисунок 5 – Еволюція температурних полів з різними коефіцієнтами теплоізоляції

**Висновки.** Розроблений програмний засіб для розв'язання нестационарних задач тепlopровідності методом скінченних елементів [5] доповнено можливістю розв'язання задач нестационарної тепlopровідності з крайовими умовами четвертого роду. Виконано чисельне моделювання перерозподілу температурних полів у корпусі штучного супутника Землі типу «СіЧ-2». Проведені розрахунки для радіаторних пластин, виготовлених з матеріалів з різними коефіцієнтами теплоізоляції. Показано можливість підтримання необхідного теплового режиму у корпусі супутника, визначено площини радіаторних пластин з матеріалів з різними коефіцієнтами теплоізоляції, необхідних для відведення теплової енергії.

**Список літератури:** 1. Самарский А.А. Уравнения математической физики (5-е изд.) / А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1977. – 728 с. 2. Санин Ф.П. Космос и технологии: Учебное пособие / Ф.П. Санин. – Д.: АРТ-ПРЕСС, 2007. – 456 с. 3 Морган О. Конечные элементы и аппроксимации / О. Морган, К. Зенкевич. – М.: Мирб 1986. – 309 с. 4. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М.: Мир, 1981. – 212 с. 5. Бреславський Д.В. Розробка алгоритмічного та програмного забезпечення для розв'язку трьохвимірних нестационарних задач тепlopровідності методом скінченних елементів / Д.В. Бреславський, С.О. Пащенко // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ», 2012. – № 67. – С. 31-38. 6. Бреславський Д.В. Программные средства для конечноэлементного моделирования двумерных задач теории ползучести / Д.В. Бреславский, Ю.Н. Корытко, П.М. Лисак // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ», 2007. – № 38. – С. 24-29.

Надійшла до редколегії 01.06.2013

УДК 536

Розв'язання трьохвимірної задачі нестационарної тепlopровідності для корпуса супутника типу «Січ-2» / Д. В. Бреславський, С. О. Пащенко, О. В. Гудзенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 32-41. – Бібліог.: 6 назв.

Стаття присвячена розв'язанню трьохвимірної задачі нестационарної тепlopровідності у корпусі штучного супутника Землі типу «Січ-2» при його русі за навколоzemною орбітою. Отримано

розподіл температур у блоці гіроскопів, встановленому на даному космічному апараті, для різних моментів часу. Визначено площу радіаторних пластин для відведення теплової енергії з метою забезпечення роботи гіроскопів в заданому діапазоні температур у штатному режимі. Проведено дослідження залежності нагрівання корпуса супутника від різних коефіцієнтів теплоізоляції внутрішньої стінки.

**Ключові слова:** температура, нестационарна теплопровідність, штучний супутник Землі, теплоізоляція, метод скінченних елементів, радіаційне випромінювання тепла.

The paper is devoted to solving of the three-dimensional transient heat conduction problem for the case of the Earth artificial satellite of «Sich-2» type. The temperature distribution for the gyroscope block installed on the spacecraft is obtained. Area for heat extraction in order to ensure the gyroscope's work in a regular mode in a given temperature range is determined. An investigation of the satellite's heating with different coefficients of thermal insulation of the inner wall is performed.

**Keywords:** temperature, transient heat conduction, artificial Earth satellite, thermal insulation, Finite Element Method, heat radiation emission.