

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р. физ.-мат. наук, профессор, ХНТУСХ;
С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

ВБК – МЕТОД В РАСЧЕТАХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В общем виде представлены приближенные формулы для расчета свободных нестационарных колебаний линейного осциллятора переменных параметров методом ВБК. Проиллюстрировано применение этих формул к решению конкретных задач.

Ключевые слова: осциллятор, линейно-переменная длина, ВБК – метод.

Введение. Свободные колебания линейного осциллятора монотонно переменных параметров (массы и жесткости) описываются дифференциальными уравнениями с непериодически переменными коэффициентами. Для отдельных случаев изменения параметров осциллятора аналитические решения этих уравнений удастся выразить через специальные функции. Так при линейном изменении массы во времени уравнения колебаний решены с помощью функций Бесселя в работах [1, 2, 3, 4]. К этим функциям в [5, 6] сведен расчет нестационарных колебаний и при экспонентном изменении массы или коэффициента жесткости пружины осциллятора. Но при более сложных законах изменения параметров точные решения уравнения колебаний обычно нельзя выразить в известных специальных функциях. Поэтому в расчетах, кроме численных методов, приходится применять известные приближенные асимптотические методы [7, 8], эффективные при медленном изменении параметров колебательной системы за один период ее колебаний. К асимптотическим относится и ВБК метод [9], давно получивший распространение в физике [10], а также в механике [11, 12].

Целью данной статьи является иллюстрация возможностей ВБК метода в расчетах свободных нестационарных колебаний линейного осциллятора переменных параметров. К такому осциллятору обычно сводят упрощенные математические модели элементов машин [2].

Общие формулы ВБК – метода и примеры их применения. Предполагаем, что свободные колебания системы с одной степенью свободы описываются дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + \mu(t)\dot{x} + [\omega^2 f(t) + \psi(t)]x = 0. \quad (1)$$

В нем x – перемещение осциллятора; $\omega^2 \gg 1$; $\mu(t)$, $f(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемые функции времени t на интервале движения, причем $\mu(t) \geq 0$;

$f(t) > 0$; точкой над x обозначена производная по t .

Решение уравнения (1) должно удовлетворять начальным условиям:

$$x(t_0) = x_0; \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0. \quad (2)$$

Согласно ВБК – методу, который изложен в [9, стр. 162], приближенными фундаментальными решениями (1) является:

$$x_1 = a(t)\cos(F(t)); \quad x_2 = a(t)\sin(F(t)), \quad (3)$$

причем

$$a(t) = f^{-1/4}(t) \exp\left[-\frac{1}{2} \int \mu(t) dt\right];$$

$$F(t) = \int \left\{ \omega\sqrt{f} + \frac{1}{2\omega\sqrt{f}} \left[\psi - \frac{\mu^2}{4} - \frac{\dot{\mu}}{2} - \frac{\ddot{f}}{4f} + \frac{5}{16} \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 \right] \right\} dt. \quad (4)$$

В случае осциллятора постоянных параметров: $\mu(t) = \text{const}$; $f(t) \equiv 1$; $\psi(t) \equiv 0$, из (3), (4) следует приближенные фундаментальные решения:

$$x_1 = \exp\left(-\frac{\mu}{2}t\right)\cos(\omega_1 t); \quad x_2 = \exp\left(-\frac{\mu}{2}t\right)\sin(\omega_1 t), \quad (5)$$

в которых $\omega_1 = \omega - \frac{\mu^2}{8\omega}$.

Точные фундаментальные решения уравнения с постоянными коэффициентами в (1) отличаются от (5) тем, что в них $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \mu^2/4}$. Погрешность решений (5) будет малой, когда $\omega^2 \gg \mu^2$, ибо

$$\sqrt{\omega^2 - \mu^2/4} = \omega \left[1 - \frac{\mu^2}{8\omega^2} + O\left(\frac{\mu^4}{\omega^4}\right) \right].$$

Учитывая (3), решение задачи Коши представляем общей формулой

$$x(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} \left\{ x_0 \cdot \cos[F(t) - F(t_0)] + c \cdot \sin[F(t) - F(t_0)] \right\}, \quad (6)$$

где $c = \frac{\dot{x}_0 - \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}x_0}{\dot{F}(t_0)}$.

Выражение (6) приближенно описывает свободные колебания линейного осциллятора при достаточно общих предположениях относительно изменения его параметров во времени.

Рассмотрим примеры расчетов колебаний по формулам (4), (6).

Линейные колебания маятника переменной длины. Из [8] известно, что линейные колебания маятника переменной длины $l = l(t)$ описываются

дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(l^2 \frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{k}{m} \frac{d}{dt}(l\theta) + gl\theta = 0. \quad (7)$$

В (7) θ – угол отклонения маятника от вертикали; k – коэффициент вязкого линейного сопротивления; m – масса маятника; g – ускорения свободного падения.

Рассмотрим случай, когда длина маятника изменяется по линейному закону $l = l_0\xi$, где $\xi = 1 + \gamma t$, $\gamma = \text{const}$. В выбранной зависимости: l_0 – начальная длина маятника; $l_0\gamma$ – скорость изменения длины во времени, при $\gamma > 0$ она возрастает, а при $\gamma < 0$ – убывает.

Переходя от t к переменной ξ , уравнение (7) преобразуем к форме

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2+\alpha}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \left(\frac{\rho^2}{\xi} + \frac{\alpha}{\xi^2}\right)\theta = 0. \quad (8)$$

Здесь $\rho = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{g}{l_0}}$; $\alpha = \frac{\beta}{\gamma}$; $\beta = \frac{k}{ml_0}$.

Уравнение (8) дополняем начальными условиями:

$$\theta(1) = \theta_0; \quad \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=1} = \frac{\dot{\theta}_0}{\gamma}. \quad (9)$$

Задача Коши для выражений (1), (2) перейдет в аналогичную задачу для выражений (8), (9), если заменить x на θ , t на ξ и принять: $\omega = \rho$; $\mu = \frac{2+\alpha}{\xi}$; $f = \frac{1}{\xi}$; $\psi = \frac{\alpha}{\xi^2}$; $t_0 = 1$. Поэтому вычислив интеграл (4), получаем:

$$a(\xi) = \xi^{\frac{3}{4} \frac{\alpha}{2}}; \quad F(\xi) = 2\rho\sqrt{\xi} + \frac{1}{4\rho\sqrt{\xi}} \left[(\alpha-1)^2 - \frac{1}{4} \right].$$

Тогда, согласно (6):

$$\theta(\xi) = \xi^{\frac{3}{4} \frac{\alpha}{2}} \left[\theta_0 \cos(\Phi(\xi)) + c \sin(\Phi(\xi)) \right]; \quad (10)$$

$$\Phi(\xi) = 2\rho(\sqrt{\xi}-1) + \frac{1}{4\rho} \left[(\alpha-1)^2 - \frac{1}{4} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} - 1 \right); \quad c = \frac{\frac{\dot{\theta}}{\gamma} + \left(\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \theta_0}{\rho - \frac{1}{8\rho} \left[(\alpha-1)^2 - \frac{1}{4} \right]}.$$

Изменение амплитуд колебаний маятника в решении (10) подчиняется зависимости

$$am\theta = \sqrt{\theta_0^2 + c^2} \xi^{\frac{3}{4} \frac{\alpha}{2}}.$$

В точности к такому изменению амплитуд ранее пришли авторы в [8],

решая задачу колебаний собственным асимптотическим методом.

Свободные колебания линейного осциллятора без учета сопротивления среды. Выясним, какими будут свободные колебания линейного осциллятора без учета сопротивления среды, когда его масса меняется по экспоненциальному закону

$$m = m_0 \exp(\lambda t).$$

Здесь m_0 – начальное значение массы; λ – характеризует изменение m по времени, при $\lambda > 0$ m возрастает, а при $\lambda < 0$ – убывает.

Для указанного закона, перемещение осциллятора x удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\varepsilon \frac{dx}{dt} + \frac{c}{m_0} e^{-\lambda t} x = 0, \quad (11)$$

где c – коэффициент жесткости пружины; $0 \leq \varepsilon \leq 1$ – коэффициент реактивности, определяющий какая часть переменной массы идет на образование реактивной силы.

Уравнение (11) дополняем начальными условиями (2), полагая там $t_0 = 0$.

$$\text{В этом примере } \mu(t) = \lambda\varepsilon = \text{const}; \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m_0}}; \quad f(t) = e^{-\lambda t}; \quad \psi \equiv 0.$$

Вычислив интеграл (4), находим

$$a(t) = \exp\left[\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)t\right];$$

$$F(t) = -\frac{2\omega}{\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}t\right) + \frac{\lambda}{4\omega}\left(\frac{1}{4} - \varepsilon^2\right) \exp\left(\frac{\lambda}{2}t\right).$$

Тогда, согласно (6), искомым решением является

$$x(t) = \exp\left[\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)t\right] \left[x_0 \cos(S(t)) + c_1 \sin(S(t)) \right]. \quad (12)$$

$$\text{Здесь } S(t) = \frac{2\omega}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}t}\right) - \frac{\lambda}{4\omega} \left(\frac{1}{4} - \varepsilon^2\right) \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}t}\right); \quad c_1 = \frac{\dot{x}_0 - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)x_0}{\omega + \frac{\lambda^2}{8\omega}\left(\frac{1}{4} - \varepsilon^2\right)}.$$

Из решения (12) следует, что амплитуда колебаний осциллятора возрастающей массы, с учетом реактивной силы, убывает при $\varepsilon > 1/2$. Если масса осциллятора уменьшается, то колебания его, с учетом реактивной силы, затухают при $\varepsilon < 1/2$. В случае $\varepsilon = 1/2$ колебания осциллятора переменной массы, независимо от характера ее изменения, происходят с постоянной амплитудой.

Затухающие колебания осциллятора с экспоненциальным изменением массы. Определим, как затухают колебания осциллятора с экспоненциальным изменением массы, без учета реактивной силы, при наличии вязкого сопротивления среды? Для ответа на поставленный вопрос надо решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_0} e^{-\lambda t} \frac{dx}{dt} + \omega^2 e^{-\lambda t} x = 0,$$

при начальных условиях (2), положив там $t_0 = 0$.

В рассматриваемом случае: $\mu(t) = \frac{k}{m_0} e^{-\lambda t}$; $f(t) = e^{-\lambda t}$; $\psi(t) \equiv 0$.

Вычислив интегралы (4), находим:

$$a(t) = \exp\left[\frac{\lambda}{4}t + \frac{k}{2\lambda m_0} e^{-\lambda t}\right];$$

$$F(t) = -\frac{2\omega}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2}t} + \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{6\lambda} \left(\frac{k}{m_0}\right)^2 e^{-\frac{3}{2}\lambda t} - \frac{k}{m_0} e^{-\frac{\lambda}{2}t} + \frac{\lambda}{8} e^{\frac{\lambda}{2}t} \right]. \quad (13)$$

Согласно (6) и (13), решением поставленной задачи является:

$$x(t) = \exp\left[\frac{\lambda}{4}t - \frac{k}{2m_0\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\right] \left[x_0 \cos(T(t)) + c_2 \sin(T(t)) \right]; \quad (14)$$

$$T(t) = \frac{2\omega}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}t} \right) + \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{6\lambda} \left(\frac{k}{m_0}\right)^2 \left(e^{-\frac{3}{2}\lambda t} - 1 \right) + \frac{k}{m_0} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}t} \right) + \frac{\lambda}{8} \left(e^{\frac{\lambda}{2}t} - 1 \right) \right];$$

$$c_2 = \frac{\dot{x}_0 - \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{k}{2m_0} \right) x_0}{\omega - \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{6\lambda} \left(\frac{k}{m_0}\right)^2 - \frac{k\lambda}{2m_0} - \frac{\lambda^2}{16} \right]}.$$

Из решения (14) следует, что колебания осциллятора затухают независимо от значения k лишь при убывании массы ($\lambda < 0$). В случае возрастания массы, затухания колебаний нет, когда $k < 0,5\lambda m_0$. При значительном сопротивлении среды, когда $k > 0,5\lambda m_0$ на промежутке времени $t \in (0; t_*)$ амплитуды колебаний уменьшаются, но далее при $t > t_*$ — они возрастают. Время t_* определяется выражением

$$t_* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{2k}{\lambda m_0}.$$

Таким образом, при экспоненциальном возрастании массы осциллятора линейно-вязкое сопротивление среды с постоянным коэффициентом k может

обеспечить затухание колебаний лишь на конечном промежутке времени.

Результаты расчетов и их анализ. Рассмотрим колебания маятника переменной длины. При этом примем следующие исходные данные: $m = 10$ кг; $k = 6$ кг/с; $l_0 = 5$ м; $\theta_0 = \pi/9$; $\dot{\theta}_0 = 0,1$ с⁻¹ и разные γ . На рис. 1 нанесены зависимости угла отклонения θ от времени t . Цифры 1, 2, 3 соответствуют значениям коэффициента $\gamma = 0,05; 0,075; 0,1$ с⁻¹.

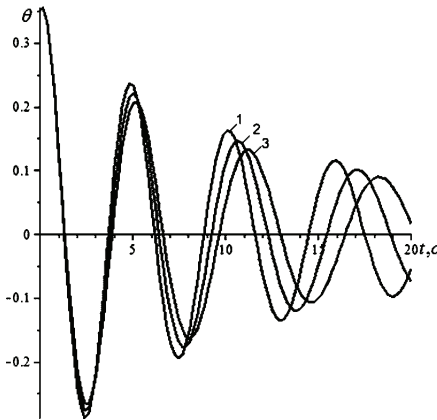


Рисунок 1 – Зависимость угла отклонения θ от времени t при разных значениях γ

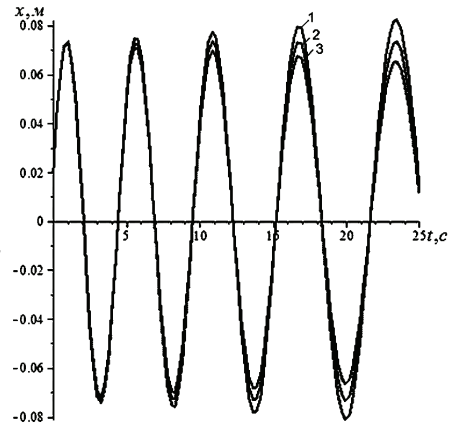


Рисунок 2 – Зависимости перемещения x от времени t при возрастании массы

Как видно из рис. 1 колебания маятника возрастающей длины носят исключительно затухающий характер.

Рассмотрим свободные колебания линейного осциллятора, когда его масса изменяется по экспоненциальному закону. Примем следующие исходные данные: $m_0 = 50$ кг; $\lambda = \pm 0,04$ с⁻¹; $v_0 = 0,1$ м/с; $x_0 = 0,02$ м; $c = 100$ кг/с² и разные ε . На рис. 2 нанесены зависимости перемещения $x(t)$ от времени t при возрастании массы. Цифры 1, 2, 3 соответствуют значениям $\varepsilon = 0,25; 0,5; 0,75$.

Результаты на рис. 2 подтверждают тот факт, что колебания осциллятора возрастающей массы, с учетом реактивной силы, убывают лишь при $\varepsilon > 1/2$.

На рис. 3 нанесены зависимости перемещения $x(t)$ от времени t при убывании массы. Цифры 1,2,3 соответствуют значениям $\varepsilon = 0,25; 0,5; 0,75$.

Кривые на рис. 3 подтверждают тот факт, что колебания осциллятора убывающей массы, с учетом реактивной силы, уменьшаются при $\varepsilon < 1/2$. Рис. 2 и рис. 3 свидетельствуют о том, что в случае $\varepsilon = 1/2$, колебания осцил-

лятора переменной массы, независимо от характера ее изменения, происходят с постоянной амплитудой.

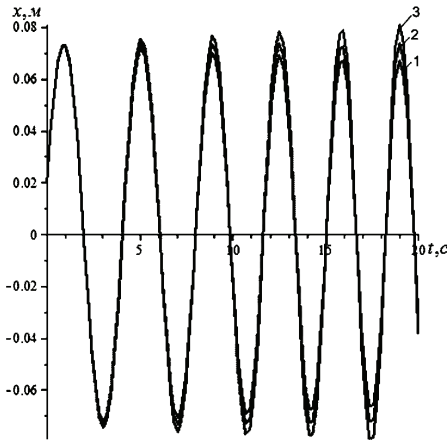


Рисунок 3 – Зависимости перемещения x от времени t при убывании массы

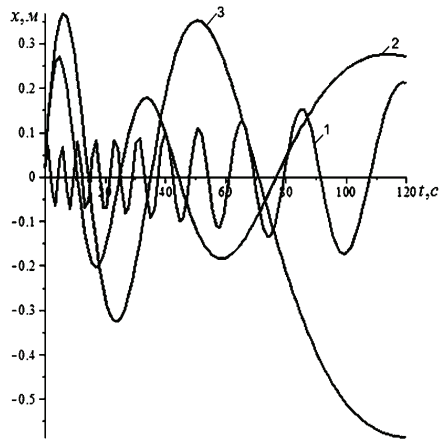


Рисунок 4 – Зависимости перемещения x от времени t при возрастании массы

Проиллюстрируем результаты третьего примера. Рассмотрим случай возрастания массы $\lambda > 0$. Случай, когда масса убывает $\lambda < 0$, качественно схож с первым примером. Для расчетов примем следующие исходные данные: $m_0 = 50$ кг; $\lambda = 0,04$ с⁻¹; $v_0 = 0,1$ м/с; $x_0 = 0,02$ м; $c = 100$ кг/с² и разные k . На рис. 4 нанесены зависимости перемещения $x(t)$ от времени t при возрастании массы. Цифры 1,2,3 соответствуют значениям $k = 0, 5; 3; 6$ кг/с. В первом случае $k < 0,5\lambda m_0$ – затухания колебаний нет, во втором и третьем случаях $k > 0,5\lambda m_0$ (соответственно $t_* = 27, 47; 40, 24$ с) при $t < t_*$ амплитуды колебаний уменьшаются, а при $t > t_*$ – возрастают.

Выводы. Исследование показало, что ВБК–метод является эффективным и достаточно общим приближенным способом построения решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с монотонно переменными коэффициентами. Он позволяет исследовать особенности нестационарных колебаний, вызванных изменением во времени параметров осциллятора.

Список литературы: 1. Мецкерский И.В. Работы по механике тел переменной массы / И.В. Мецкерский. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 2. Sveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Sveticanin. – Taylor & Francis Ltd, 1998. – 300 p. 3. Ольшанский В.П. Свободные вертикальные колебания осциллятора линейно-переменной массы / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця, 2013. – Вип. 1 (69). – С. 37-41. 4. Ольшанский В.П. Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при

импульсном нагружении / *В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский* // Вісник НТУ «ХП» Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 37 (1010). – С. 125-130. **5.** *Ольшанський В.П.* Вільні коливання осцилятора змінної маси / *В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський* // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця, 2013. – Вип. 2 (70). – С. 57-59. **6.** *Голоскоков Е.Г.* Нестационарные колебания деформируемых систем / *Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов.* – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с. **7.** *Митропольский Ю.А.* Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах / *Ю.А. Митропольский.* – К.: Изд-во АН УССР, 1955. – 283 с. **8.** *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / *Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский.* – М.: Наука, 1974. – 504 с. **9.** *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. / *Э. Камке.* – М.: Наука, 1976. – 576 с. **10.** *Фреман Н.* ВБК – приближение / *Н. Фреман, П.У. Фреман.* – М.: Мир, 1967. – 166 с. **11.** *Образцов И.Ф.* Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций / *И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, И.В. Андрианов.* – М.: Машиностроение, 1992. – 416 с. **12.** *Найфэ А.* Методы возмущений / *А. Найфэ.* – М.: Мир, 1984. – 456 с.

Поступила в редколлегию 11.10.2013.

УДК 534.1

ВБК – метод в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 63 (1036). – С. 107-114. – Бібліогр.: 12 назв.

У загальному вигляді представлено наближені формули для розрахунку вільних нестационарних коливань лінійного осцилятора змінних параметрів методом ВБК. Проілюстровано застосування цих формул до розв'язання конкретних задач.

Ключові слова: осцилятор, лінійно-змінна довжина, ВБК – метод.

In general, the approximate formulas are presented for the calculation of unsteady free oscillations of linear oscillator variables by WBK method. The application of these formulas to solve specific problems was illustrated.

Key words: an oscillator, linearly variable length, resonance, WBK - method.