

**А. Е. БОЖКО**, д-р техн. наук, профессор, член-корр. НАН Украины, ИПМаш НАН Украины, Харьков;

**Е. М. ИВАНОВ**, канд. техн. наук, доцент, ХНАДУ «ХАДИ», Харьков;

**З. А. ИВАНОВА**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Анализируется возможность предварительного определения устойчивости колебательных систем с  $n$ -степенями свободы на основе структурной теории, так как наличие положительных обратных связей в структурах могут приводить к неустойчивым режимам работы колебательных систем.

**Ключевые слова:** колебательная система, структура, устойчивость, степени свободы, передаточная функция.

**Введение.** В данной статье рассматриваются линейные и линеаризованные колебательные системы (КС) с  $n$ -степенями свободы. Анализ осуществляется для предварительного определения устойчивости КС на основе структурной теории [2, 3, 5]. В работах [3, 5] имеется некоторый анализ устойчивости КС, но на наш взгляд он может быть дополнен более доскональным применением теории автоматического управления [4]. Впервые построение структур КС с позиций теории автоматического управления было осуществлено в работе [1]. Однако до сих пор возникает вопрос об устойчивости КС с  $n$ -степенями свободы. Этот вопрос появляется из-за того, что в структурах КС с  $n$ -степенями свободы имеются положительные обратные связи, которые согласно теории автоматического регулирования [4] могут приводить к неустойчивым режимам работы систем. В связи с таким обоснованием попытаемся проанализировать КС с  $n$ -степенями свободы.

**Постановка проблемы.** Механическая система такой КС приведена на рис. 1, где  $m_k, c_k, b_k, x_k, k = \overline{1, n}$  – масса, коэффициенты жесткости, демпфирования, перемещения масс  $m_k$  соответственно;  $F_1$  – воздействие на массу  $m_1$ .

В общем случае в КС могут быть приложены воздействия  $F_k, k = \overline{1, n}$ . Уравнения движения КС с  $n$ -степенями свободы запишем в виде [3]

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (b_1 + b_2) \dot{x}_1 + (c_1 + c_2) x_1 &= b_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 + F_1; \\ m_2 \ddot{x}_2 + (b_2 + b_3) \dot{x}_2 + (c_2 + c_3) x_2 &= b_2 \dot{x}_1 + c_2 x_1 + b_3 \dot{x}_3 + c_3 x_3 \\ &\dots \\ m_n \ddot{x}_n + b_n \dot{x}_n + c_n x_n &= b_n \dot{x}_{n-1} + c_n x_{n-1} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ;  $t$  – время.

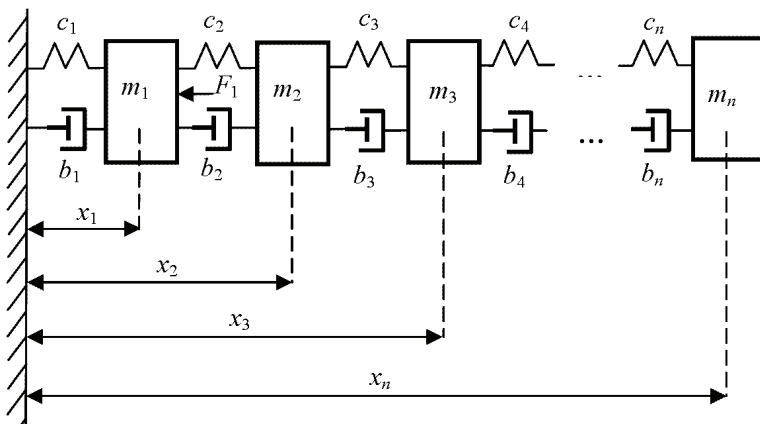


Рисунок 1 – КС с  $n$ -степенями свободы

Если обозначить  $\dot{x} = p$ , то система (1) может выглядеть так

$$\left. \begin{aligned} x_1 [m_1 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2] &= F_1 + x_2 (b_2 p + c_2); \\ x_2 [m_2 p^2 + (b_2 + b_3) p + c_2 + c_3] &= x_1 (b_2 p + c_2) + x_3 (b_3 p + c_3) \\ &\dots \\ x_n (m_n p^2 + b_n p + c_n) &= x_{n-1} (b_n p + c_n) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Если считать входным воздействием  $F_{\text{вх}k}, k = \overline{1, n}$ , а выходным сигналом каждого звена КС с массой  $m_k, k = \overline{1, n}$  величину  $x_k, k = \overline{1, n}$ , то тогда передаточная функция каждого такого звена будет

$$W_k(p) = \frac{x_k(p)}{F_{\text{вх}k}(p)}. \quad (3)$$

Учитывая (2), (3), представим на рис. 2 структуру КС с  $n$ -степенями свободы, где

$$\left. \begin{aligned} W_k &= W_k(p) = \frac{1}{m_k p^2 + (b_k + b_{k+1})p + c_k + c_{k+1}}; \\ W_{kl} &= W_{kl}(p) = b_{lp} + c_l, l = \overline{2, n}; \\ W_n &= W_n(p) = \frac{1}{m_n p^2 + b_n p + c_n}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

являются передаточными функциями звеньев.

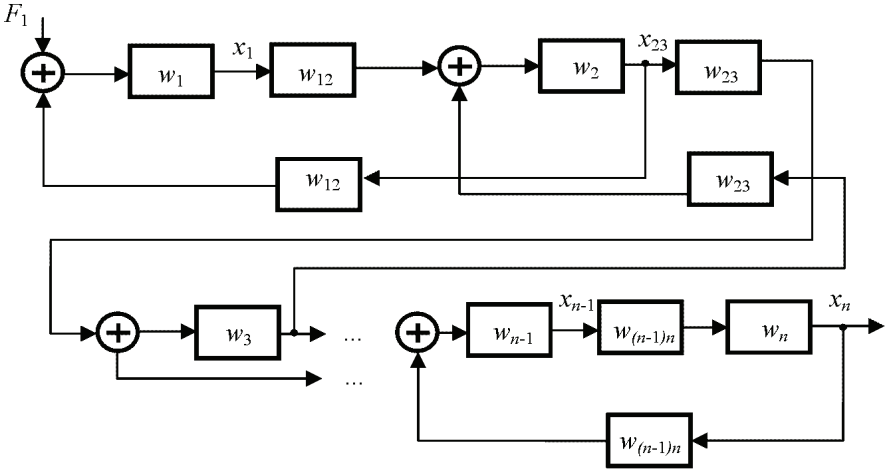


Рисунок 2 – Структура КС с  $n$ -степенями свободы

Как видно из рис. 2 в структуре КС с  $n$ -степенями свободы присутствует  $(n-1)$  положительных обратных связей с передаточной функцией  $W_{kl}(p)$ , что может обусловить неустойчивость КС. Более детально замечаем, что каждая КС с двумя степенями свободы, входящая в общую КС с  $n$ -степенями свободы, охвачена положительной обратной связью. Поэтому напрашивается вопрос, а что, если рассмотреть отдельно КС с двумя степенями свободы на устойчивость, а затем, учитывая структуру КС с  $n$ -степенями свободы, сделать вывод, может и предварительный, об устойчивости всей КС. Такой подход к исследованию, на наш взгляд, менее громоздкий.

Итак, проанализируем КС с двумя степенями свободы и распространим результат анализа на другие КС с двумя степенями свободы, входящие в КС с  $n$ -степенями свободы. При этом будем считать, что в данной КС имеется одно входное воздействие. Поэтому передаточная функция  $W_{kl}(p) = W$  такой КС имеет вид (берется последняя КС с двумя степенями свободы)

$$W_{kc} = \frac{W_{n-1}W_{(n-1)n}W_n}{1 - W_{n-1}W_{(n-1)n}^2W_n}. \quad (5)$$

Передаточные функции  $W_{n-1}$  и  $W_n$  можно представить в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} W_{n-1} &= \frac{1}{m_{n-1}p^2 + (b_{n-1} + b_n)p + c_{n-1} + c_n} = \frac{1}{m_{n-1}p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(b_{n-1} + b_n)p + c_{n-1} + c_n}{m_{n-1}p^2}}; \\ W_n &= \frac{1}{m_n p^2 + b_n p + c_n} = \frac{1}{m_n p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b_n p + c_n}{m_n p^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В соответствии с (6) структурные схемы этих КС будут такими, как изображено на рис. 3.

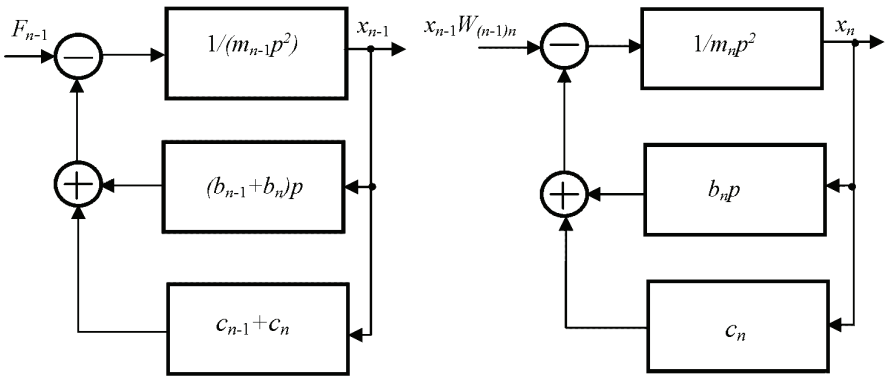


Рисунок 3 – Структурные схемы КС

Из этого рисунка видно, что КС с одной степенью свободы состоит из двойного интегратора  $1/(m_{n-1}p^2)$  или  $1/m_n p^2$ , охваченного двумя отрицательными обратными связями  $(b_{n-1} + b_n)p$ ,  $(c_{n-1} + c_n)$  или  $b_n p$ ,  $c_n$  соответственно. Наличие отрицательных обратных связей в КС должно компенсировать положительную обратную связь и этим самым обеспечивать устойчивость КС. Для убеждения в этом были рассмотрены возможные случаи с определенными значениями коэффициентов демпфирования и жесткости  $(b_{n-1}, b_n, c_{n-1}, c_n)$  в КС. В каждом случае были определены передаточная функция КС с двумя степенями свободы, а затем характеристическое уравнение, на основании которого с учетом критерия Гурвица [4] оценивалась принадлежность данной КС к устойчивой или неустойчивой системе.

Во всех случаях характеристические уравнения имели коэффициенты больше нуля, что убеждает о доминировании четырех внутренних отрица-

тельных обратных связей в каждой КС с двумя степенями свободы над данной положительной обратной связью, являющейся внешним контуром. Поэтому определено можно сказать об устойчивости каждой КС с двумя степенями свободы, входящей в КС с  $n$ -степенями свободы, а это, в свою очередь, дает право отметить устойчивость всей КС. Если же в какую-то отдельную КС с двумя степенями свободы включен нелинейный элемент, то вопрос об устойчивости следует рассматривать отдельно для этой КС с двумя степенями свободы и не исследовать другие линейные КС с двумя степенями свободы, входящие в КС с  $n$ -степенями свободы. Такой анализ по частям экономичен и во времени и в средствах.

**Вывод.** Процедура определения устойчивости КС с  $n$ -степенями свободы должна заключаться в построении ее структуры, подобной схеме, изображенной на рис. 2, выявлении нелинейных элементов в КС с двумя степенями свободы и в дальнейшем определении устойчивости последней системы.

**Список литературы:** 1. Божко А. Е. Воспроизведение вибраций. – К.: Наукова думка, 1975. – 191 с. 2. Божко А. Е. Оптимальное управление в системах воспроизведения вибраций. – К.: Наукова думка, 1977. – 219 с. 3. Божко А.Е. Синтез оптимального управления колебательными системами. – К.: Наукова думка, 1990. – 164 с. 4. Гузенко А.И. Основы теории автоматического регулирования. – М.: Высшая школа, 1967. – 406 с. 5. Елисеев С.В. Структурная теория виброзащитных систем. – Новосибирск: Наука, 1978. – 222 с.

*Поступила в редколлегию 30.10.2013*

УДК 531/534

**Определение устойчивости колебательных механических систем / А. Е. Божко, Е. М. Иванов, З. А. Иванова // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 63 (1036). – С. 24-28. – Бібліогр.: 5 назв.**

Аналізується можливість попереднього визначення стійкості коливальних систем з  $n$ -степенями свободи на основі структурної теорії, так як наявність позитивних зворотних зв'язків в структурах можуть призводити до нестійких режимів роботи коливальних систем.

**Ключові слова:** коливальна система, структура, стійкість, ступені свободи, передатна функція.

Considering the preliminary determination of the stability of oscillatory systems with  $n$  degrees of freedom on the basis of the structural theory, since the presence of positive feedbacks in the structures can lead to unstable operation modes of oscillatory systems.

**Key words:** oscillatory system, structure, stability, degree of freedom, transfers function.