УДК 539.3

С.М. ВЕРЕЩАКА, д-р техн. наук, профессор, СумДУ, Сумы;
А.В.ДЕЙНЕКА, аспирант, СумДУ, Сумы

ТЕРМОУПРУГОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ТРУБЫ С ЗАЩИТНЫМ СЛОЕМ ИЗ ДЮРАЛЮМИНИЯ И УГЛЕПЛАСТИКА

На основе классической теории упругости анизотропного тела сравнивается напряженно-деформированное состояние многослойного толстостенного цилиндра конечной длины при действии внутреннего давления и температуры. Защитный слой цилиндра выполнен из дюралюминия или углепластика. Кинематические и статические условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев считаются идеальными. Решение задачи получено в осесимметричной постановке. При этом внутреннее давление и температурная нагрузка изменяются по синусоидальному закону по длине цилиндра. Отмечается, что замена дюралюминиевого защитного слоя композитной трубы на углепластик, оказывает существенное влияние на ее напряженное состояние. При сравнении напряженно-деформированного состояния рассматриваемых конструктивных вариантов цилиндров более эффективным оказался вариант защитного слоя из углепластика.

Ключевые слова: толстостенный цилиндр; температура; стеклопластик; углепластик.

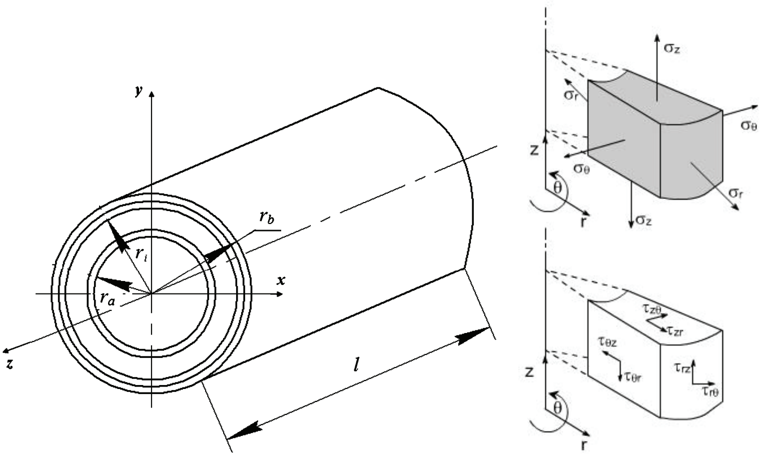
Введение. Композиты многослойной структуры широко используются в различных областях современной техники. Известно, что элементы из композитов значительно выигрывают по удельной прочности при сравнении с их изотропными аналогами. Так, например, замена стальных труб стеклопластиковыми трубами увеличивает срок службы трубопроводов примерно в 4 раза и в 3 раза снижает его массу, а также исключает применение антикоррозионных защитных средств и дорогостоящих сварочных работ.

Однако для практической реализации этих преимуществ необходимо и дальше накапливать опыт проектирования такого рода конструкций. При изготовлении и эксплуатации многослойных конструкций из композиционных материалов на межслойных границах контакта жестких армированных слоев происходит образование тонкого мягкого клеевого слоя, а также различного рода структурных несовершенств, например, участков непроклея или отслоений. Традиционно используемое в расчетных моделях предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта жестких армированных слоев оказывается существенно нарушенным.

В этой связи изучение напряженного состоянии армированных оболочек при действии как статической, так и тепловой нагрузки на основе дискретно-структурной теории многослойных оболочек, когда учитываются реальные условия взаимодействия слоев и величина изменения контактных напряжений на межслойных границах, представляется актуальной задачей. Подробный анализ последних результатов и направлений развития дискретно-структурной теории слоистых пластин и оболочек можно найти в обзорах робот [1 – 2].

1. Основные уравнения. Пусть круговой полый цилиндр нагружен по цилиндрическим поверхностям $r = r_a$ и $r = r_b$ стационарными температурными нагрузками $t_a(z)$ и $t_b(z)$ и равномерно распределенными по окружной координате усилиями $q_a(z)$ и $q_b(z)$. Направление осей цилиндрической системы координат указано на рис. 1, *а*. Напряжения, которые возникают в точке цилиндра при действии внешней нагрузки, показаны на рис. 1, *б*. Считается, что температурная нагрузка и заданное по лицевым цилиндрическим поверхностям давление осесимметричны относительно продольной оси цилиндра. Но при этом их величина изменяется вдоль меридиана и зависит от координаты z. Кроме этого, цилиндр имеет конечную длину l, а на его торцах выполняются условия свободного опирания. Также при решении задачи может учитываться эффект проскальзывания слоев цилиндра друг относительно друга в продольном направлении.

На основе классической теории анизотропного упругого тела [3] для решения поставленной задачи были составлены уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения.



а *б*

Рисунок 1 – Многослойный круговой полый цилиндр конечной длины
а – направление осей координат; *б* – направление действия напряжений

1.1. Физические соотношения. Приняв цилиндрическую систему координат r, θ, z и задав направление оси x, от которой отсчитывается угол θ (рис. 1, *а*), физические соотношения для i-го ортотропного слоя с цилиндрической анизотропией запишутся в виде

$$\left\{\varepsilon_r^i\right\}=\left[B_r^i\right]\left\{\sigma_r^i\right\}+\left\{\alpha_r^i\Delta t\right\} \qquad (i=1,2,\ldots,N), \tag{1}$$

где

$$\left\{\sigma_r^i\right\}=\begin{Bmatrix}\sigma_r^i\\ \sigma_\theta^i\\ \sigma_z^i\\ \tau_{\theta z}^i\\ \tau_{rz}^i\\ \tau_{r\theta}^i\end{Bmatrix}, \qquad \left\{\varepsilon_r^i\right\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r^i\\ \varepsilon_\theta^i\\ \varepsilon_z^i\\ \gamma_{\theta z}^i\\ \gamma_{rz}^i\\ \gamma_{r\theta}^i\end{Bmatrix}, \qquad \left\{\alpha_r^i\Delta t\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_r^i\Delta t\\ \alpha_\theta^i\Delta t\\ \alpha_z^i\Delta t\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix},$$

$$\left[B_r^i\right]=\begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i & 0 & 0 & 0\\ & b_{22}^i & b_{23}^i & 0 & 0 & 0\\ & & b_{33}^i & 0 & 0 & 0\\ & сим. & & b_{44}^i & 0 & 0\\ & & & & b_{55}^i & 0\\ & & & & & b_{66}^i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta r}^i}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{zr}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{r\theta}^i}{E_r^i} & \frac{1}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{z\theta}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{rz}^i}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta z}^i}{E_\theta^i} & \frac{1}{E_z^i} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta z}^i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}^i} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}^i}\end{bmatrix} -$$

матрицы-столбцы напряженно-деформированного состояния и температурных деформаций, а также матрица коэффициентов податливости $[B_r^i]$ соответственно. Здесь E_r^i, E_θ^i, E_z^i – модули упругости соответственно в радиальном, круговом и продольном направлениях; $G_{\theta z}^i, G_{rz}^i, G_{r\theta}^i$ – модули сдвига в плоскостях $\theta 0z$, $r0z$, $r0\theta$ соответственно; ν_{kj}^i $(k, j = r, \theta, z)$ – коэффициенты Пуассона; α_j^i $(j = r, \theta, z)$ – температурный коэффициент линейного расширения в направлениях осей цилиндрической системы; Δt – изменение температуры на лицевых поверхностях цилиндра; N – количество слоев цилиндра. Решая систему уравнений (1) относительно напряжений, несложно найти следующие физические соотношения

$$\left\{\sigma_r^i\right\}=\left[A_r^i\right]\left\{\varepsilon_r^i\right\}-\left\{\alpha_r^i\Delta t\right\}, \tag{2}$$

где

$$\left[A_r^i\right]=\begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22}^i & a_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & сим. & & a_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & a_{55}^i & 0 \\ & & & & & a_{66}^i \end{bmatrix}; \quad \left\{\alpha_r^i \Delta t\right\}=\begin{Bmatrix} (a_{11}^i+a_{12}^i+a_{13}^i)\alpha_r^i\ \Delta t \\ (a_{12}^i+a_{22}^i+a_{23}^i)\alpha_\theta^i\ \Delta t \\ (a_{13}^i+a_{23}^i+a_{33}^i)\alpha_z^i\ \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Здесь коэффициенты матрицы жесткости $[A_r^i]$ определяются выражениями

$$a_{11}^i=\left[b_{22}^i b_{33}^i-\left(b_{23}^i\right)^2\right]\Delta^{-1};\quad a_{22}^i=\left[b_{11}^i b_{33}^i-\left(b_{13}^i\right)^2\right]\Delta^{-1};$$

$$a_{33}^i=\left[b_{11}^i b_{22}^i-\left(b_{12}^i\right)^2\right]\Delta^{-1};\quad a_{12}^i=\left[b_{13}^i\, b_{23}^i-b_{12}^i\, b_{33}^i\right]\Delta^{-1};$$

$$a_{13}^i=\left[b_{12}^i\, b_{23}^i-b_{22}^i\, b_{13}^i\right]\Delta^{-1};\quad a_{23}^i=\left[b_{12}^i\, b_{13}^i-b_{11}^i\, b_{23}^i\right]\Delta^{-1};$$

$$\Delta\ =b_{11}^i b_{22}^i b_{33}^i+b_{12}^i b_{23}^i b_{31}^i+b_{21}^i b_{32}^i b_{13}^i-$$

$$-b_{13}^i b_{22}^i b_{31}^i-b_{21}^i b_{12}^i b_{33}^i-b_{11}^i b_{32}^i b_{23}^i;$$

$$a_{44}^i=\frac{1}{b_{44}^i};\quad a_{55}^i=\frac{1}{b_{55}^i};\quad a_{66}^i=\frac{1}{в_{66}^i}.$$

1.2. Геометрические соотношения.

$$\varepsilon_r^i=\frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{r}^\mathrm{i}}{\partial r};\quad \varepsilon_\theta^i=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta^i}{\partial\theta}+\frac{u_r^i}{r};\quad \varepsilon_z^i=\frac{\partial u_z^i}{\partial z};\quad \gamma_{\theta z}^i=\frac{\partial u_\theta^i}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z^i}{\partial\theta};$$

$$\gamma_{rz}^i=\frac{\partial u_z^i}{\partial r}+\frac{\partial u_r^i}{\partial z};\ \gamma_{r\theta}^i=\frac{\partial u_r^i}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta^i}{\partial r}-\frac{u_\theta^i}{r}\quad (i=1,2,\ldots,N), \tag{3}$$

где u_r^i, u_θ^i, u_z^i – перемещения в радиальном, окружном и продольном направлении i-го ортотропного слоя цилиндра ($r_i < r < r_{i+1}$) соответственно.

В связи с тем, что рассматриваемая задача в осесимметричной постановке относительно оси z , перемещение u_θ^i не изменяется в окружном направлении. Поэтому выражения (3) можно переписать в следующем виде:

$$\varepsilon_r^i=\frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{r}^\mathrm{i}}{\partial r};\quad \varepsilon_\theta^i=\frac{u_r^i}{r};\quad \varepsilon_z^i=\frac{\partial u_z^i}{\partial z};\quad \gamma_{\theta z}^i=0;$$

$$\gamma_{rz}^i=\frac{\partial u_z^i}{\partial r}+\frac{\partial u_r^i}{\partial z};\quad \gamma_{r\theta}^i=-\frac{u_\theta^i}{r}\qquad (i=1,2,\ldots,N). \tag{4}$$

1.3. Уравнения равновесия. При осесимметричной двумерной постановке задачи уравнения равновесия классической анизотропной теории упругости [3] принимают вид:

$$\frac{\partial\sigma_r^i}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}^i}{\partial z}+\frac{\sigma_r^i-\sigma_\theta^i}{r}=0;\qquad \frac{\partial\tau_{rz}^i}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z^i}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{rz}^i}{r}=0\,. \tag{5}$$

Система из двух уравнений равновесия дополняется третьим уравнением теплопроводности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)t^i=0\,. \tag{6}$$

Для решения поставленной задачи, составленную систему из трех дифференциальных уравнений в частных производных (5) – (6), необходимо задать граничные условия на торцах и лицевых поверхностях цилиндра, а также условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев.

1.4. Граничные условия:

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{gathered}
u_r^i(r,0)=0; \qquad \sigma_z^i(r,0)=\tau_{rz}^i(r,0)=0;\\
u_r^i(r,l)=0; \qquad \sigma_z^i(r,l)=\tau_{rz}^i(r,l)=0;\\
\sigma_r^1(r_a,z)=q_a(z); \qquad \tau_{rz}^1(r_a,z)=0;\\
\sigma_r^N(r_b,z)=q_b(z); \qquad \tau_{rz}^N(r_b,z)=0;\\
t^i(r,0)=t^i(r,l)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,N),\\
t^1(r_a,z)=t_a(z); \qquad t^N(r_b,z)=t_b(z).
\end{gathered} \tag{7}$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{gathered}
\sigma_r^{i-1}(r_i,z)=\sigma_r^i(r_i,z); \qquad \tau_{rz}^{i-1}(r_i,z)=\tau_{rz}^i(r_i,z);\\
u_r^{i-1}(r_i,z)=u_r^i(r_i,z); \qquad u_z^{i-1}(r_i,z)-u_z^i(r_i,z)=K\cdot\tau_{rz}^i(r_i,z);\\
t^{i-1}(r_i,z)=t^i(r_i,z); \qquad \lambda^{i-1}\frac{\partial t^{i-1}(r_i,z)}{\partial r}=\lambda^i\frac{\partial t^i(r_i,z)}{\partial r} \quad (i=1,2,\ldots,N).
\end{gathered} \tag{8}$$

В последнем условии (8) параметр λ^i соответствует коэффициенту теплопроводности i-го слоя.

В качестве предельных из уравнения (8) имеет место два варианта: при $1/K^{(i)}=0$ – имеет место упругое проскальзывание соседних слоев друг относительно друга по сопряженным поверхностям, при $K^{(i)}=0$ – идеальный контакт.

1.5. Безразмерные параметры. Для упрощения ввода исходных данных и обобщения полученных численных результатов, следуя работе [4], вводятся следующие безразмерные величины:

$$R=\frac{r}{r_b};\quad R_a=\frac{r_a}{r_b};\quad R_b=\frac{r_b}{r_b}=1;\quad Z=\frac{z}{r_b};$$

$$L=\frac{l}{r_b};\quad A_{kl}^i=\frac{a_{kl}^i}{E_0};\quad \Gamma_k^i=\frac{\gamma_k^i}{\alpha_0 E_0};$$

$$T^i=\frac{t^i}{t_0};\quad \Lambda^i=\frac{\lambda^i}{\lambda_0};\quad U_r^i=\frac{u_r^i}{\alpha_0 E_0 r_b};\quad U_z^i=\frac{u_z^i}{\alpha_0 E_0 r_b};$$

$$S_r^i=\frac{\sigma_r^i}{\alpha_0 E_0 t_0};\quad S_z^i=\frac{\sigma_z^i}{\alpha_0 E_0 t_0};\quad S_\theta^i=\frac{\sigma_\theta^i}{\alpha_0 E_0 t_0};$$

$$TU_{rz}^i=\frac{\tau_{rz}^i}{\alpha_0 E_0 t_0};\quad Q_a(z)=\frac{q_a(z)}{\alpha_0 E_0 t_0};\quad Q_b(z)=\frac{q_b(z)}{\alpha_0 E_0 t_0};$$

$$T_a(z)=\frac{t_a(z)}{t_0};\quad T_b(z)=\frac{t_b(z)}{t_0}, \tag{9}$$

где E_0, λ_0**,** и α_0 – значения модуля Юнга, теплопроводности и коэффициента теплового линейного расширения эталонного материала; t_0 – эталонная температура цилиндра.

1.6. Постановка краевой задачи. Подставляя геометрические соотношения (4) в уравнения (5), а также с учетом безразмерных параметров введенных выше, можно получить следующие уравнения:

$$\left[A_{11}^i\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)-\frac{A_{22}^i}{R^2}+A_{55}^i\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right]U_r^i+$$

$$+\left[\left(A_{13}^i+A_{55}^i\right)\frac{\partial^2}{\partial R\partial Z}+\left(A_{13}^i-A_{23}^i\right)\frac{\partial}{\partial Z}\right]U_z^i=\Gamma_r^i\frac{\partial T^i}{\partial R};$$

$$\left[\left(A_{13}^i+A_{55}^i\right)\frac{\partial^2}{\partial R\partial Z}+\left(A_{23}^i+A_{55}^i\right)\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial Z}\right]U_r^i+$$

$$\left[\left[A_{55}^i\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)+A_{33}^i\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right]\right]U_z^i=\Gamma_r^i\frac{\partial T^i}{\partial Z};$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)T^i+\frac{\partial^2 T^i}{\partial Z^2}=0. \tag{10}$$

Граничные условия (7), (8), записанные при помощи безразмерных параметров (9), принимают вид:

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$U_r^i(R,0)=0;\quad S_z^i(R,0)=TU_{rz}^i(R,0)=0;$$

$$U_r^i(R,l)=0;\quad S_z^i(R,l)=TU_{rz}^i(R,l)=0;$$

$$S_r^1(R_a,z)=Q_a(z);\quad TU_{rz}^1(R_a,z)=0;$$

$$S_r^N(R_b,z)=Q_b(z);\quad TU_{rz}^N(R_b,z)=0;$$
$$T^i(R,0)=T^i(R,l)=0\quad (i=1,2,\ldots,N),$$
$$T^1(R_a,z)=T_a(z);\quad T^N(R_b,z)=T_b(z).\tag{11}$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$S_r^{i-1}(R_i,z)=S_r^i(R_i,z);\qquad TU_{rz}^{i-1}(R_i,z)=TU_{rz}^i(R_i,z);$$
$$U_r^{i-1}(R_i,z)=U_r^i(R_i,z);\quad U_z^{i-1}(R_i,z)-U_z^i(R_i,z)=K\cdot TU_{rz}^i(R_i,z);$$
$$T^{i-1}(R_i,z)=T^i(R_i,z);\quad \Lambda^{i-1}\frac{\partial T^{i-1}(R_i,z)}{\partial R}=\Lambda^i\frac{\partial T^i(R_i,z)}{\partial R}\quad (i=1,2,\ldots,N).\tag{12}$$

2. Алгоритм решения краевой задачи. Решение краевой задачи (10) – (12) в направлении продольной оси цилиндра ищется в виде тригонометрических рядов

$$U_r^i(R,Z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n^i(R)\sin(\beta Z);\quad U_z^i(R,Z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n^i(R)\cos(\beta Z);$$
$$T_r^i(R,Z)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n^i(R)\sin(\beta Z).\tag{13}$$

где $\beta=\dfrac{n\pi\chi_b}{L}$. Принятые выражения (13) удовлетворяют условиям свободного опирания на торцах цилиндра.

Подставляя (13) в систему уравнений (10), несложно получить ее в следующем виде:

$$\left[A_{11}^i\left(\frac{d^2}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)-\frac{A_{22}^i}{R^2}+A_{55}^i\beta^2\right]\Phi_n^i(R)+$$
$$\left[\left(A_{13}^i+A_{55}^i\right)\beta\frac{d}{dR}+\left(A_{13}^i-A_{23}^i\right)\frac{\beta}{R}\right]\Psi_n^i(R)=\Gamma_r^i\frac{dF_n^i(R)}{dR};$$
$$\left[\left(A_{13}^i+A_{55}^i\right)\beta\frac{d}{dR}+\left(A_{23}^i+A_{55}^i\right)\frac{\beta}{R}\right]\Phi_n^i(R)+$$
$$\left[\left[A_{55}^i\left(\frac{d^2}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)+A_{33}^i\beta^2\right]\right]\Psi_n^i(R)=\Gamma_r^iF_n^i(R);$$
$$\left[\left(\frac{d^2}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)-\beta^2\right]F_n^i(R)=0.\tag{14}$$

По аналогичной схеме преобразовываются и граничные условия (11), (12):

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$A_{11}^{1}\frac{d\Phi_n^1(R_a)}{dR}+A_{12}^{1}\frac{\Phi_n^1(R_a)}{R}-\beta A_{13}^{1}\Psi_n^1(R_a)=Q_{an},$$

$$\beta\Phi_n^1(R_a)+\frac{d\Psi_n^1(R_a)}{dR}=0,$$

$$A_{11}^{N}\frac{d\Phi_n^N(R_b)}{dR}+A_{12}^{N}\frac{\Phi_n^N(R_b)}{R}-\beta A_{13}^{N}\Psi_n^N(R_b)=Q_{bn},$$

$$\beta\Phi_n^N(R_b)+\frac{d\Psi_n^N(R_b)}{dR}=0,$$

$$F_n^1(R_a)=T_{an},F_n^N(R_b)=T_{bn}. \quad (15)$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$A_{11}^{i-1}\frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR}+A_{12}^{i-1}\frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R}-\beta A_{13}^{i-1}\Psi_n^{i-1}(R^i)=$$

$$=A_{11}^{i}\frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR}+A_{12}^{i}\frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R}-\beta A_{13}^{i}\Psi_n^{i}(R^i);$$

$$\beta\Phi_n^{i-1}(R^i)+\frac{d\Psi_n^{i-1}(R^i)}{dR}=\beta\Phi_n^{i}(R^i)+\frac{d\Psi_n^{i}(R^i)}{dR};\quad \Phi_n^{i-1}(R^i)=\Phi_n^{i-1}(R^i);$$

$$\Psi_n^{i-1}(R^i)-\Psi_n^{i}(R^i)=K\left(\beta\Phi_n^{i}(R^i)+\frac{d\Psi_n^{i}(R^i)}{dR}\right);\quad F_n^{i-1}(R^i)=F_n^{i-1}(R^i);$$

$$\Lambda^{i-1}\frac{dF_n^{i-1}(R^i)}{dR}=\Lambda^{i}\frac{dF_n^{i}(R^i)}{dR}. \quad (16)$$

Здесь

$$Q_{an}=\frac{1}{L}\int_0^{2L}Q_a(Z)\sin(\beta Z)dZ;\quad Q_{bn}=\frac{1}{L}\int_0^{2L}Q_b(Z)\sin(\beta Z)dZ;$$

$$T_{an}=\frac{1}{L}\int_0^{2L}T_a(Z)\sin(\beta Z)dZ;\quad T_{bn}=\frac{1}{L}\int_0^{2L}T_b(Z)\sin(\beta Z)dZ.$$

Считается, что в радиальном направлении функции $\Phi_n^i(R^i)$, $\Psi_n^i(R^i)$, $F_n^i(R^i)$ непрерывны по толщине i-го слоя, тогда при помощи рядов Тейлора их можно будет записать в виде:

$$\Phi_n^i(R)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^i(R-1)^k;\quad \Psi_n^i(R)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k^i(R-1)^k;$$

$$F_n^i(R)=\sum_{k=0}^{\infty}D_k^i(R-1)^k. \quad (17)$$

Подставив (17) в уравнения (15) и приравняв коэффициенты при $(R-1)^k$

к нулю, несложно получить следующие рекуррентные соотношения

$$C_{k+2}^{i}=\frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[\begin{array}{l}-(k+1)C_{k+1}^{i}+\frac{A_{22}^{i}+\beta^{2}A_{55}^{i}}{A_{11}^{i}}C_{k}^{i}-\\(k+1)\beta\frac{A_{13}^{i}+A_{55}^{i}}{A_{11}^{i}}B_{k+1}^{i}-\beta\frac{A_{13}^{i}-A_{23}^{i}}{A_{11}^{i}}B_{k}^{i}+\frac{\Gamma_{r}^{i}(k+1)}{A_{11}^{i}}D_{k+1}^{i}\end{array}\right];$$

$$B_{k+2}^{i}=\frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[\begin{array}{l}-(k+1)B_{k+1}^{i}+\frac{\beta^{2}A_{33}^{i}}{A_{55}^{i}}B_{k}^{i}-\\(k+1)\beta\frac{A_{13}^{i}+A_{55}^{i}}{A_{55}^{i}}C_{k+1}^{i}-\beta\frac{A_{55}^{i}+A_{23}^{i}}{A_{55}^{i}}C_{k}^{i}+\frac{\Gamma_{z}^{i}}{A_{55}^{i}}D_{k}^{i}\end{array}\right];$$

$$D_{k+2}^{i}=\frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[-(k+1)D_{k+1}^{i}+\beta^{2}B_{k}^{i}\right]. \tag{18}$$

Из рекуррентных соотношений (18) следует, что все коэффициенты C_k^i, B_k^i и D_k^i могут быть выражены через C_0^i, C_1^i, B_0^i, B_1^i, D_0^i, D_1^i, когда $k>1$. Тогда решения системы уравнений (15) могут быть записаны в компактной форме

$$\Phi_{n}^{i}(R)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{array}{l}g_{c}^{i}(k,1)C_{0}^{i}+g_{c}^{i}(k,2)C_{1}^{i}+g_{c}^{i}(k,3)B_{0}^{i}\\+g_{c}^{i}(k,4)B_{1}^{i}+g_{c}^{i}(k,5)D_{0}^{i}+g_{c}^{i}(k,6)D_{1}^{i}\end{array}\right](R-1)^{k};$$

$$\Psi_{n}^{i}(R)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{array}{l}g_{b}^{i}(k,1)C_{0}^{i}+g_{b}^{i}(k,2)C_{1}^{i}+g_{b}^{i}(k,3)B_{0}^{i}\\+g_{b}^{i}(k,4)B_{1}^{i}+g_{b}^{i}(k,5)D_{0}^{i}+g_{b}^{i}(k,6)D_{1}^{i}\end{array}\right](R-1)^{k};$$

$$F_{n}^{i}(R)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{array}{l}g_{d}^{i}(k,1)C_{0}^{i}+g_{d}^{i}(k,2)C_{1}^{i}+g_{d}^{i}(k,3)B_{0}^{i}\\+g_{d}^{i}(k,4)B_{1}^{i}+g_{d}^{i}(k,5)D_{0}^{i}+g_{d}^{i}(k,6)D_{1}^{i}\end{array}\right](R-1)^{k}, \tag{19}$$

где $g_b^i(k,o)$, $g_c^i(k,j)$, $g_d^i(k,j)$ константы, определяемые при помощи рекуррентных соотношений (19). Неизвестные константы C_0^i, C_1^i, B_0^i, B_1^i, D_0^i, D_1^i, число которых определяется количеством дискретных слов цилиндра N, находятся путем подстановки выражений (19) в граничные условия (15), (16). Полученная при этом линейная алгебраическая система уравнений включает $6N$ неизвестных констант.

Определив значение выражений (19) и подставив их в заданные решения (13), несложно при помощи геометрических и физических соотношений, представленных выше, получить решение рассматриваемой термоупругой краевой задачи.

3. Пример расчета. Геометрические параметры многослойного кругового полого цилиндра r_a = 0,156 м, r_b = 0,188 м и l = 2,163 м. Эталонные значения температуры, модуль Юнга, и коэффициент теплового расширения равны: T_0 = 50 K, E_0 = 40 ГПа, а a_0 = 7,0·10^{-5} K^{-1}. Температурные нагрузки на внутренней и наружной поверхности, а также внутреннее и внешнее давление, заданы в следующем виде:

$$T_a(z) = 0, T_b(z) = \Delta T \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \qquad q_a(z) = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), q_b(z) = 0,$$

где q_0 = 20 МПа, ΔT = 80 К.

Цилиндр состоит из 4 слоев: 1) твердый полиэтилен высокого давления (h = 4 мм) – E = 260 МПа; ν = 0,4; λ = 0,44 Вт/м·К; α = $20\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$; 2) стеклопластик (h = 20 мм) – λ = 0,4 Вт/м·К; $\alpha_z = \alpha_\theta = 5\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$; $\alpha_r = 7\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$; 3) пеновинилпласт (h = 4 мм) – E = 83 МПа; ν = 0,33; λ = 0,4 Вт/м·К; $\alpha = 15\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$; 4) дюралюминий (h = 4 мм) – E = 71 ГПа; ν = 0,31; λ = 160 Вт/м·К; $\alpha = 2{,}3\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$; углепластик – λ = 0,4 Вт/м·К, $\alpha_z = -5{,}7\cdot10^{-7}$ К$^{-1}$, $\alpha_\theta = 3{,}0\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$, $\alpha_r = 7\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$.

Для первого, третьего и четвертого слоев, изготовленных из упругого изотропного материала, справедливы следующие соотношения:

$$E_z = E_\theta = E_r = E; \qquad G_{\theta z} = G_{r\theta} = G_{rz} = G;$$

$$\nu_{z\theta} = \nu_{zr} = \nu_{\theta r} = \nu_{\theta z} = \nu_{rz} = \nu_{r\theta} = \nu_z; \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Упругие характеристики стеклопластика определялись по методике, предложенной в работе [1]. Модули упругости $E_в$, сдвига $G_в$ и коэффициент Пуассона $\nu_в$ наматываемых лент, набранных из алюмоборосиликатных нитей, соответственно равны $E_в$ = 55000 МПа, $G_в$ = 22000 МПа и $\nu_в$ = 0,25. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер со следующими параметрами упругости: $E_м$ = 3550 МПа, $G_м$ = 1270 МПа и $\nu_м$ = 0,4. В каждом монослое толщиной 0,25 мм объем, занимаемый лентами, составляет 70 % общего объема.

Углепластик. Согласно паспортным данным модули упругости $E_в$, сдвига $G_в$ и коэффициент Пуассона $\nu_в$ углеродного волокна ЛУ-03 соответственно равны 235000 МПа, 90400 МПа и 0,3. Механические характеристики связующего углепластика (сополимер эпокситрифенольной и анилиноформальдегидной смол) – $E_м$ = 3500 МПа, $G_м$ = 1320 МПа и $\nu_м$ = 0,32. В каждом монослое толщиной 0,171 мм объем, занимаемый волокнами, составляет 55 % общего объема.

Технические постоянные рассматриваемых многослойного стеклопластика и углепластика сведены в табл. 1.

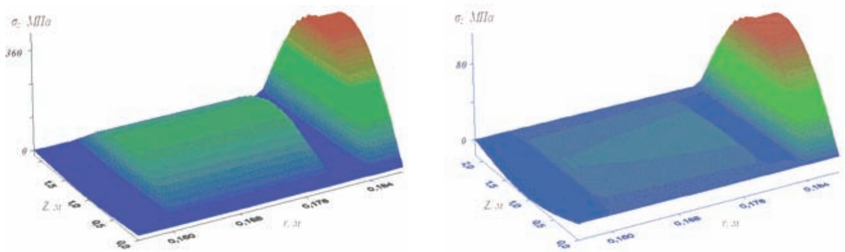
На рис. 2 – 4 показаны графики распределения перемещений и напряжений в толстостенном цилиндре.

Анализ теоретических результатов, показанных на рис. 2, позволяет отметить следующее. Осевые напряжения в несущем стеклопластиковом слое цилиндра уменьшаются примерно в 3,5 раза, когда дюралюминиевый защитный слой заменяется защитным слоем из углепластика.

Из рис. 3 видно, что в результате замены дюралюминиевого внешнего защитного слоя цилиндра углепластиковым слоем величина окружных напряжений в несущем стеклопластиковом слое уменьшается в 1,4 раза при совместном действии температурной нагрузки и внутреннего давления.

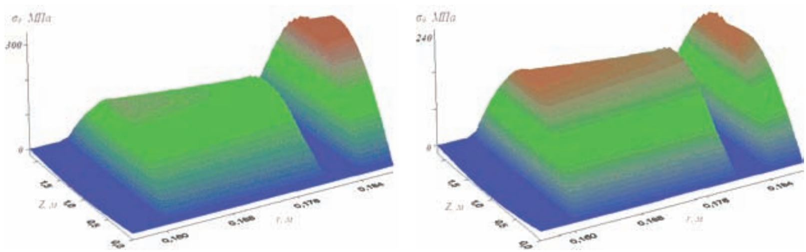
Таблица 1 – Упругие характеристики угле и стеклопластиков

Материал	E_{ii}, МПа	G_{ij}, МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
Углепластик	$E_\theta = 84457$ $E_z = 42026$ $E_r = 14703$	$G_{\theta z} = 12410$ $G_{r\theta} = 4287$ $G_{rz} = 3677$	$\nu_{\theta z} = 0{,}21$ $\nu_{r\theta} = 0{,}28$ $\nu_{rz} = 0{,}3$	$\nu_{\theta z} = 0{,}11$ $\nu_{r\theta} = 0{,}049$ $\nu_{rz} = 0{,}1$
Стеклопластик	$E_z = 23800$ $E_\theta = 33500$ $E_r = 23870$	$G_{\theta z} = 7490$ $G_{rz} = 5014$ $G_{r\theta} = 6620$	$\nu_{z\theta} = 0{,}077$ $\nu_{zr} = 0{,}397$ $\nu_{\theta r} = 0{,}405$	$\nu_{\theta z} = 0{,}11$ $\nu_{rz} = 0{,}4$ $\nu_{r\theta} = 0{,}284$



а *б*

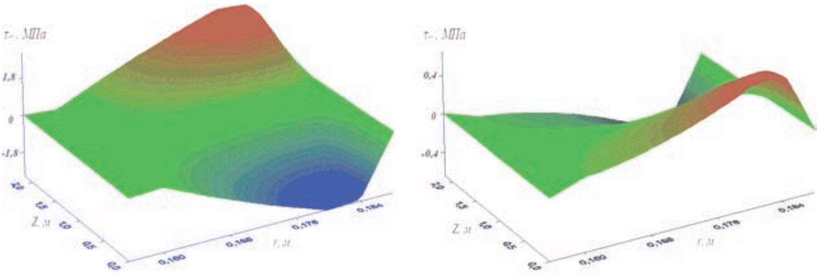
Рисунок 2 – Распределение осевых напряжений в цилиндре (q_0 = 20 МПа, ΔT = 80 К) защитный слой: *а* – дюралюминий; *б* – углепластик



а *б*

Рисунок 3 – Распределение окружных напряжений в цилиндре (q_0 = 20 МПа, ΔT = 80 К) защитный слой: *а* – дюралюминий; *б* – углепластик

Заметно изменяется картина распределения осевых напряжений в защитном слое многослойного цилиндра (q_0 = 20 МПа, ΔT = 80 К). Максимальные напряжения σ_z в дюралюминиевом слое в 3 раза больше максимальных напряжений в углепластиковом слое. Изменяется картина распределения напряжений поперечного сдвига (рис. 4) в полом неоднородном толстостенном цилиндре при использовании углепластика вместо дюралюминия для конструкции защитного слоя.



а *б*

Рисунок 4 – Распределение напряжений поперечного сдвига в цилиндре (q_0 = 20 МПа, ΔT = 80 К) защитный слой: *а*) дюралюминий; *б*) углепластик

Выводы. На основе дискретно-структурной теории проведены исследования напряженно-деформированного состоянии многослойных оболочек при действии как статической, так и температурной нагрузки. Предложенный алгоритм решения, рассмотренного класса задач, позволяет получать расчетные данные для оценки влияния физико-механических характеристик отдельных слоев на термоупругое деформированное состояние неоднородного по толщине цилиндра. При сравнение напряженно-деформированного состояния цилиндров с внешними защитными слоями из углепластика и дюралюминия, более эффективным оказался углепластик.

Список литературы: **1.** *Верещака С.М.* Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры / *С.М. Верещака*. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с. **2.** *Пискунов В.Г.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек / *В.Г.Пискунов, А.О.Рассказов* // Прикладная механика. – 2002. – Т 38. № 2. – С. 22-56. **3.** *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / *С.Г. Лехницкий*. – М.: Наука, 1977. – 416 с. **4.** *Shao Z. S.* Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length / *Z. S. Shao* // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82. – P. 155-163.

Bibliography (transliterated): 1. Vereschaka S.M. Nelinejnoe deformirovanie i ustojchivost' mnogoslojnyh elementov konstrukcij s defektami struktury. S.M. Vereschaka. Sumy: Izd-vo SumGU, 2009. 286 Print. **2.** Piskunov V.G. Razvitie teorii sloistyh plastin i obolochek. V.G.Piskunov, A.O.Rasskazov. Prikladnaya mehanika. 2002. T 38. № 2. 22-56 Print. **3.** Lehnickij S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. S.G. Lehnickij. Moscow: Nauka, 1977. 416 Print. **4.** Shao Z. S. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length. Z. S. Shao. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2005. Vol. 82. 155-163 Print.

Поступила (received) 25.03.2014