

УДК 539.3

В. А. КАИРОВ, С. А. МОРГУН

ВЛИЯНИЕ ОТВЕРСТИЙ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Исследованы свободные колебания тонких упругих цилиндрических оболочек, ослабленных прямоугольными отверстиями. С использованием метода конечных элементов разработана уточненная математическая модель, учитывающая конструктивную неоднородность оболочки. Приведены результаты расчета амплитудно-частотных характеристик оболочечной системы. Выполнено сопоставление полученных данных с численными результатами для аналогичных задач, а также с экспериментальными данными.

Ключевые слова: свободные колебания, цилиндрическая оболочка, прямоугольное отверстие, подкрепляющие ребра, амплитудно-частотные характеристики, метод конечных элементов.

Введение. Оболочечные конструкции нашли широкое применение в турбиностроении и других сложных технических объектах современной техники. В реальных условиях эксплуатации они часто находятся в поле стационарного динамического нагружения. Наличие отверстий и ребер жесткости создает локальную инерционную неоднородность применяемых тонкостенных оболочек и оказывает существенное влияние на их амплитудно-частотные характеристики. Поэтому особое место в расчетной практике занимают задачи о свободных колебаниях сложных оболочечных систем с конструктивными особенностями.

Анализ последних исследований и литературы. Влиянию отверстий на свободные колебания тонких упругих оболочек посвящено сравнительно небольшое число теоретических и экспериментальных исследований, обзор которых приведен в работах [3-10, 12]. Их анализ показывает, что традиционными приемами, основанными на использовании вариационных принципов [5], удастся определить с приемлемой точностью только низшие частоты и формы колебаний оболочек. На практике этого оказывается недостаточно, поскольку для тонкостенных конструкций, в силу их повышенной чувствительности к вибрациям и в связи с ростом динамичности действующих нагрузок, предусматривается определение более широкой части спектра собственных частот и форм. В основном рассматривались гладкие шарнирно опертые оболочки с одним отверстием. В работах [3, 6, 9, 12] с использованием различных численных методов получены решения ряда задач определения основных частот колебаний гладких оболочек с неподкрепленным отверстием. Однако характер влияния отверстий на собственные колебания конструктивно неоднородных оболочек достаточно сложный и имеет ряд характерных особенностей. Аналитических решений задач свободных колебаний оболочек с отверстиями, насколько известно авторам из опубликованных работ, не существует.

Целью данной работы является разработка уточненной математической модели свободных колебаний тонких упругих конструктивно неоднородных оболочек вращения и исследование влияния отверстий и подкрепляющих ребер на их амплитудно-частотные характеристики.

Постановка задачи. Рассматриваются свободные колебания как гладких, так и оребренных тонких упругих цилиндрических оболочек вращения постоянной толщины h , ослабленных отверстиями с свободным и подкрепленным контуром (рис. 1). Геометрия срединной поверхности оболочки задана в глобальной декартовой системе координат (X, Y, Z) с началом координат в нижнем торце, ось OX которой направлена по оси цилиндра, а ось OZ проходит через центр одного из отверстий. Геометрические и физические соотношения представим в криволинейной ортогональной системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с началом в нижнем торце оболочки, линии α_1 и α_2 которой совпадают с линиями главных кривизн оболочки, α_3 – нормальная к поверхности координата. Подкрепляющие ребра обладают жесткостью на изгиб в радиальной и продольной плоскостях, на растяжение-сжатие и крутильной жесткостью. Оболочка и ребра изготовлена из однородного изотропного материала, работают в упругой стадии деформирования и могут существенно различаться по своим физико-механическим свойствам.

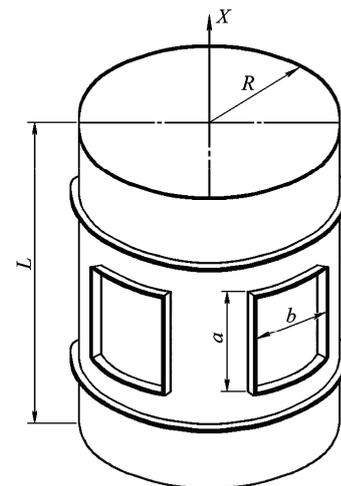


Рисунок 1 – Модель подкрепленной оболочки с вырезами для расчетов свободных колебаний

Оболочка подкреплена I стрингерами и J шпангоутами вдоль координатных осей α_1, α_2 и имеет N_0 прямоугольных отверстий, контуры которых расположены вдоль линий главной кривизны

($x_{01v} \leq \alpha_1 \leq x_{02v}$; $\theta_{01v} \leq \alpha_2 \leq \theta_{02v}$). Отверстия имеют свободные края или подкреплены по контуру жесткими рамами. Подкрепляющие отверстия ребра рассматриваются как дискретные одномерные упругие стержни, обладающие жесткостью на изгиб в радиальной и продольной плоскостях, на растяжение-сжатие и крутильной жесткостью. На торцах оболочки заданы соответствующие граничные условия, а на контурах отверстий необходимо дополнительно удовлетворять условиям равенства нулю перерезывающих сил и изгибающих моментов.

Оболочка и ребра работают в упругой стадии деформирования и могут различаться по своим физико-механическим свойствам. Рассматривается общий случай деформации ребер, оболочки и рамы, подкрепляющей отверстие.

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеют место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения для перемещений:

$$\begin{aligned} u_{1i} &= u_1(\alpha_1, \alpha_{2i}) + \eta_{1i} \varphi_1(\alpha_1, \alpha_{2i}); \\ u_{2i} &= u_2(\alpha_1, \alpha_{2i}) + \eta_{1i} \varphi_2(\alpha_1, \alpha_{2i}); \\ u_{3i} &= u_3(\alpha_1, \alpha_{2i}); \quad \varphi_{1i} = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_{2i}); \\ \varphi_{кpli} &= \varphi_2(\alpha_1, \alpha_{2i}); \\ u_{1j} &= u_1(\alpha_{1j}, \alpha_2) + \eta_{2j} \varphi_1(\alpha_{1j}, \alpha_2); \\ u_{2j} &= u_2(\alpha_{1j}, \alpha_2) + \eta_{2j} \varphi_2(\alpha_{1j}, \alpha_2); \\ u_{3j} &= u_3(\alpha_{1j}, \alpha_2); \quad \varphi_{2j} = \varphi_2(\alpha_{1j}, \alpha_2); \\ \varphi_{кp2j} &= \varphi_1(\alpha_{1j}, \alpha_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u_1(\alpha_1, \alpha_{2i})$, $u_2(\alpha_1, \alpha_{2i})$, $u_3(\alpha_1, \alpha_{2i})$, $u_1(\alpha_{1j}, \alpha_2)$, $u_2(\alpha_{1j}, \alpha_2)$, $u_3(\alpha_{1j}, \alpha_2)$ – компоненты перемещений срединной поверхности обшивки оболочки на линиях контакта ребер; $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_{2i})$, $\varphi_2(\alpha_1, \alpha_{2i})$, $\varphi_1(\alpha_{1j}, \alpha_2)$, $\varphi_2(\alpha_{1j}, \alpha_2)$ – углы поворота нормали к поверхности оболочки относительно координатных осей α_1 и α_2 ; $\varphi_{кpli}$, $\varphi_{кp2j}$, φ_{1i} , φ_{2j} – углы закручивания и поворота поперечных сечений продольных и поперечных ребер, соответственно; $\eta_{1i} = 0,5h + H_i^1$, $\eta_{2j} = 0,5h + H_j^2$ – эксцентриситеты ребер; H_i^1 , H_j^2 – расстояния от осей i -го продольного и j -го поперечного стержня до поверхности оболочки; α_{1j} , α_{2i} – координаты линий сопряжения ребер с обшивкой.

Для получения дифференциальных уравнений напряженно-деформированного состояния разбиваем область (S) изменения координат (α_1, α_2) на N_e криволинейных четырехугольных элементов, в каждом из которых вводим локальную косоугольную систему координат (ξ, η) .

Связь между компонентами тензора деформаций и вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки и ребер согласно гипотез Кирхгофа-Лява и Кирхгофа-Клебша запишем в виде [6]:

$$e_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}; \quad e_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_3}{R};$$

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right); \\ e_4 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right); \\ e_5 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right); \\ e_6 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R} \right); \quad e_{1i} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{1i}}{\partial \alpha_1}; \\ e_{4i} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{3i}}{\partial \alpha_1} \right); \quad e_{6i} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_{кpli}}{\alpha_1}; \\ e_{2j} &= \frac{1}{A_{2j}} \frac{\partial u_{2j}}{\partial \alpha_2} - \frac{u_{3j}}{R}; \\ e_{2j} &= \frac{1}{A_{2j}} \frac{\partial u_{2j}}{\partial \alpha_2} - \frac{u_{3j}}{R}; \quad e_{5j} = \frac{1}{A_{2j}^2} \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{u_{3j}}{R^2}; \\ e_{6j} &= \frac{1}{A_{2j}} \frac{\partial \varphi_{кp2j}}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Представим компоненты деформации (2) в матричной форме [12]:

$$\{\varepsilon\} = [B_\varepsilon] \{u\} \quad (3)$$

где $\{\varepsilon\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}^T$ – вектор компонентов деформации; $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ – вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки, которые представлены в виде проекций на орты континуальной криволинейной системы координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; $\{\varphi\} = \{\varphi_1, \varphi_2\}^T$ – вектор углов поворота нормали к поверхности относительно координатных осей; $[B_\varepsilon]$ – матрица линейных операций дифференцирования; A_1 , A_2 , A_{2j} , R – коэффициенты Ляме и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки и поперечных ребер; e_{pi} , e_{pj} , u_{ki} , u_{kj} – компоненты деформаций и перемещений подкрепляющих ребер ($p = \overline{1, 6}$; $k = \overline{1, 3}$).

Материалы исследований. Решение задачи для конструктивно неоднородной подкрепленной оболочки выполняется методом конечных элементов (МКЭ) [1, 2, 11, 12] с использованием вариационного принципа Лагранжа [12]:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4)$$

где $L = \Pi - T$ – функция Лагранжа; Π , T – потенциальная и кинетическая энергии деформации и колебаний дискретно подкрепленной оболочки; q_i – обобщенные координаты i -го узла; N – число узлов конечно-элементной модели.

Кинетическая энергия колебаний оболочки в матричном виде определяется по формуле:

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint_S \{q\}^T [B]^T [N]^T [B] [N] \{q\} dS = \frac{1}{2} \{q\}^T [M] \{q\}, \quad (5)$$

Потенциальную энергию деформации оболочки представим в виде:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \iint_S \{\varepsilon\}^T [D_0] \{\varepsilon\} dS = \frac{1}{2} \iint_S \{q\}^T [B]^T [D_0] [B] \{q\} dS = \\ &= \frac{1}{2} (\{q\}^T [K] \{q\}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\{\varepsilon\} = [B] \{q\}$ – вектор деформаций оболочки; ρ , ε – плотность материала и деформации конечного элемента; $[D_0]$ – матрица жесткостей оболочки; $[M]$ – матрица функций формы элемента; $[B] = [D_\varepsilon] [M]$ – матрица градиентов конечного элемента; $[M]$ – матрица масс; S – область срединной поверхности оболочки.

Разрешающие уравнения в перемещениях теории тонких упругих оболочек получаются из условий стационарности функционала Лагранжа, в котором углы поворота нормали φ_1 и φ_2 вычисляются через вектор перемещений. При этом геометрические и физические соотношения записываются в глобальной криволинейной ортогональной системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, а дифференцирование и интегрирование выполняются в косоугольной системе (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

Для получения дифференциальных уравнений напряженно-деформированного состояния область S изменения координат α_1, α_2 разбивается на N_e криволинейных четырехугольных конечных элементов (КЭ), в каждом из которых вводится локальная косоугольная система координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

При этом проекции вектора перемещений КЭ на оси глобальной декартовой системы координат аппроксимируем билинейными функциями:

$$u_k = \sum_{i=1}^4 u_k^{(i)} N_i(\xi_1, \xi_2) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (7)$$

где $u_k^{(i)}$ – проекции вектора перемещений в i -ом узле; $N_i(\xi_1, \xi_2)$ – функции формы элемента в локальной системе координат ξ_1, ξ_2 . Стороны конечных элементов совпадают с координатными линиями (ξ_1, ξ_2) косоугольных координат.

Проекции вектора углов поворота нормали к поверхности относительно координатных осей на оси глобальной системы координат представим в виде биквадратичных полиномов:

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^4 \varphi_k^{(i)} N_i^{\varphi}(\xi_1, \xi_2), \quad (k = 1, 2), \quad (8)$$

где $\varphi_k^{(i)}$ – проекции вектора углов поворота в i -ом узле, которые определяются через узловое значения углов поворота $\varphi_1^{(i)}$ и $\varphi_2^{(i)}$; $N_i^{\varphi}(\xi_1, \xi_2)$ – функции формы (положения узлов) элемента.

Для того, чтобы гипотезы Кирхгофа-Лява выполнялись в узлах и чтобы количество узловых неизвестных было минимальным, аппроксимируем проекции вектора перемещений $\{q\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ вдоль сторон элемента кубическими сплайнами. Также примем, что угол поворота нормали вокруг касательной к контуру элемента изменяется вдоль сторон по линейному закону. Построенные таким образом элементы удовлетворяют условиям непрерывности первых производ-

ных от прогиба.

Формулы (3) для компонент деформации оболочки с учетом аппроксимаций (7) и (8) примут вид:

$$\{\varepsilon\} = [B^{(e)}] \{q^{(e)}\}, \quad (9)$$

где $[B^{(e)}]$ – матрица дифференцирования функций формы; $\{q^{(e)}\}$ – вектор степеней свободы конечного элемента (e).

Используя соотношения (6) и (9), полную энергию оболочки можно представить в виде:

$$\Pi = \sum_{e=1}^N \left[\frac{1}{2} \iint_S \{q^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T [D_0] [B^{(e)}] \{q^{(e)}\} dS \right]. \quad (10)$$

Из условий стационарности функционала Лагранжа (3) получим систему разрешающих уравнений в перемещениях, которая в матричной форме имеет вид:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (11)$$

где $[K]$, $[M]$ – матрицы жесткости и масс конечно-элементной модели; ω – круговая частота колебаний; $\{q\}$ – вектор обобщенных перемещений узлов элемента; N – число степеней свободы оболочечной модели.

Матрица жесткости определяется зависимостью

$$[K] = \sum_{e=1}^N \iint_S [B^{(e)}]^T [D_0] [B^{(e)}] dS.$$

Решение системы (11) для малых колебаний ищем в следующем виде

$$\{q\} = \{q_0\} \sin \omega t, \quad (12)$$

где $\{q_0\}$ – вектор амплитуд перемещений узлов; ω – круговая частота собственных колебаний.

С учетом выражения (12), уравнения колебаний примут вид

$$([K] - \omega^2 [M]) \{q_0\} = 0. \quad (13)$$

Полученное матричное выражение представляет собой систему однородных линейных алгебраических уравнений, решение которых дает вектор собственных частот и матрицу форм колебаний оболочечной системы. Задача сводится к вычислению матриц жесткости $[K]$ и масс $[M]$ оболочки, которые формируются из матриц жесткости $[k]$ и масс $[m]$ составляющих ее конечных элементов.

Соотношения (13) определяют собой, так называемую, обобщенную проблему собственных значений, которая в общем виде сводится к определению собственных значений систем вида:

$$[A] x - \lambda [B] x = 0, \quad (14)$$

где $[A]$ и $[B]$ – симметричные матрицы.

Уравнение (14) может быть решено с помощью прямого разложения Холецкого для ленточных матриц с последующим применением метода Хаусхольдера для перехода к трехдиагональным симметричным матрицам и непосредственного определения частот колебаний оболочки.

Результаты численных исследований. Численные исследования влияния отверстий и подкреплений на собственные частоты и формы колебаний выполнены для однородной жестко защемленной цилиндрической оболочки с геометрическими характеристиками: $R/h = 100$; $L/R = 3$; $R = 0,1$ м. Механические характери-

стики и плотность материала составляют: $E = 197$ ГПа; $G = 75,77$ ГПа; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,71 \cdot 10^3$ кг/м³. Для неподкрепленной оболочки с центральным прямоугольным отверстием, расположенным симметрично относительно ее торцов, на рис.2 изображена зависимость частотного параметра $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ от высоты отверстия L_0 , где ω_0 – низшая круговая частота однородной сплошной оболочки, ω – круговая частота колебаний конструктивно неоднородной оболочки. Кривые 1, 2, 3 соответствуют размерам отверстия в окружном направлении – $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$. Кривая 2 соответствует оболочке с двумя диаметрально расположенными отверстиями ($\theta_0 = \pi/4$).

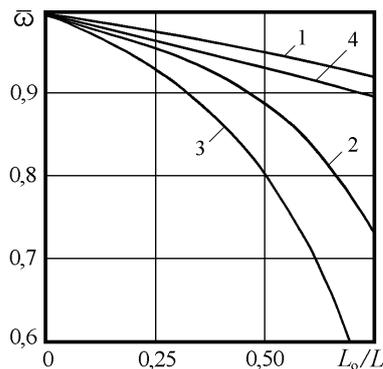


Рисунок 2 – Зависимость частотного параметра $\bar{\omega}$ от высоты отверстия

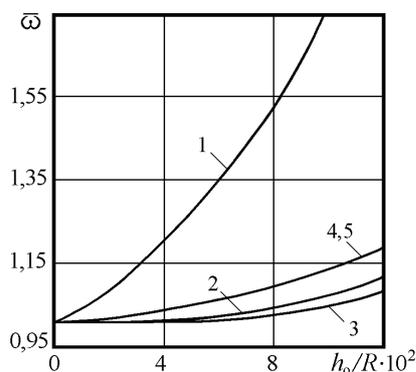


Рисунок 3 – Зависимость частотного параметра $\bar{\omega}$ от относительной высоты подкрепляющих отверстие ребер

Уменьшение собственной частоты сопровождается сменой форм колебаний. Форма колебаний сплошной оболочки трансформируется в форму, для которой максимум прогибов расположен по обе стороны от образующей, проходящей через центр отверстия. Эта форма сохраняется и при дальнейшем росте размера отверстия. Из приведенных зависимостей следует, что увеличение высоты отверстия приводит к понижению основной частоты колебаний неподкрепленной оболочки, а увеличение его ширины в меньшей степени сказывается на изменении частот. Понижение основной собственной частоты вызвано локальными колебаниями участков поверхности у краев отверстия. Понижение собственной частоты может сопровождаться сменой форм колебаний, на которых максимум погибов достигается в окрестности отверстия.

При этом формы колебаний с различными волновыми числами в окружном и осевом направлениях, полученные в результате расчетов, оказываются связанными между собой и могут отличаться от форм колебаний сплошной однородной оболочки. Максимумы прогибов достигаются в окрестности отверстия, что согласуется с экспериментальными данными, полученными для оболочек с одним и двумя отверстиями [8, 10]. Формы колебаний при удалении от отверстия носят регулярный характер, характерный для оболочек без вырезов. Ослабление оболочки двумя диаметрально расположенными отверстиями еще более понижает низшую частоту.

Для оболочки с центральным прямоугольным отверстием ($L_0 = L/2$; $\theta_0 = \pi/2$) выполнен анализ влияния геометрических характеристик подкрепляющих его контур тонкостенных ребер прямоугольного сечения на собственные частоты и формы колебаний. Толщина ребер составляет 2 мм. Оболочка и подкрепляющие ребра выполнены из одного материала.

Результаты численного анализа влияния подкреплений приведены на рис. 3 в виде зависимости частотного параметра $\bar{\omega}$ от относительной высоты h_0/R подкрепляющих ребер. Кривая 1 соответствует подкреплению оболочки двумя шпангоутами ($J = 2$), проходящими по контуру отверстия, кривая 2 – подкреплению четырьмя стрингерами ($I = 4$), два из которых располагаются вдоль контура отверстия, кривая 3 – подкреплению продольных краев отверстия, кривая 4 – поперечных краев отверстия, кривая 5 – подкреплению рамой всего контура отверстия.

Подкрепление контура отверстия приводит к незначительному повышению нижней частоты колебаний, а также других частот спектра, однако в меньшей степени влияет на формообразование. Если подкрепить не отверстие, а оболочку двумя шпангоутами, расположенными на расстоянии $L/4$ от ее торцов, и равномерно распределенными стрингерами так, чтобы они располагались по краям отверстия, то в первом случае частоты колебаний значительно возрастают, а волновые числа в окружном направлении уменьшаются, во втором случае подкрепления влияют незначительно.

Таким образом, наличие отверстий и подкреплений оказывает влияние на собственные частоты, формы колебаний и распределение внутренних напряжений и деформаций в оболочках. Подкрепление контура отверстий увеличивает локальную жесткость конструкции и позволяет незначительно повысить частоты колебаний до значений, соответствующих однородным сплошным оболочкам.

Выводы. С использованием метода конечных элементов (МКЭ) решена задача расчета частот и форм свободных колебаний тонких упругих конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек вращения. Исследовано влияние отверстий и подкрепляющих ребер на их амплитудно-частотные характеристики. Для решения данной задачи разработана уточненная математическая модель, позволяющая в достаточной мере учитывать особенности кон-

струкции оболочечной системы. Анализ полученных результатов подтверждает адекватность данной модели и указывает на то, что для повышения спектра низших частот колебаний оболочечной системы, необходимо применять подкрепление оболочки соответствующими шпангоутами. Разработанная математическая модель может быть использована для исследования колебаний сложных оболочечных конструкций, применяемых в качестве элементов турбомашин, которые имеют вырезы и подкрепления.

Список литературы: 1. Алямовский А.А. SolidWorks / COSMOSWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов / А.А. Алямовский. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 432 с. 2. Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с. 3. Дышко А.Л. Приближенное определение собственных характеристик цилиндрической оболочки с отверстиями / А.Л. Дышко, И.Д. Павленко, Ю.М. Селиванов // Прикл. механика. – 1996. – Т. 32, № 2. – С.27-32. 4. Заруцкий В.А. О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек / В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, № 8. – С. 38-67. 5. Каиров А.С. Влияние отверстий на собственные колебания подкрепленных оболочек вращения / А.С. Каиров // Теорет. и прикл. механика. – Х.: Основа. – 2000. – Вып. 31. – С. 131-137. 6. Колебания ребристых оболочек вращения / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, В.Н. Ревуцкий и др. – К.: Наук. думка, 1988. – 172 с. 7. Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, В.Н. Чехов. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. 8. Пальчевский А.С. Свободные колебания цилиндрических оболочек с большими прямоугольными отверстиями / А.С. Пальчевский // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17, № 5. – С. 130-133. 9. Преображенский И.Я. О задачах по устойчивости и колебаниям многосвязных тонкостенных деформируемых систем. Обзор // Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем: Сб. статей. / Пер. с англ. Сост. И. Н. Преображенский. – М.: Мир, 1984. – С. 287-309. 10. Селиванов Ю.М. Голографическая интерферометрия и метод конечных элементов в задачах механики неоднородных структур / Ю.М. Селиванов // Методы розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – Вып. 11. – С. 265-275. 11. Bathe K.J. Numerical methods in finite element analysis / K.J. Bathe // Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2006. – 564 p. 12. Zienkiewicz O.C. The finite element method. Fifth edition /

O.C. Zienkiewicz, R.L. Teylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann Linacre House, Jordan Hill, 2000. – 348 p. 13. Toda S. Колебания круговых цилиндрических оболочек с вырезами / С. Toda, К. Камату // Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем: Сб. статей. / Пер. с англ. Сост. И. Н. Преображенский. – М.: Мир, 1984. – С. 269-286.

Bibliography (transliterated): 1. Alyamovskij A.A. SolidWorks/COSMOSWorks. Inzhenernyj analiz metodom konechnykh elementov. A.A. Alyamovskij. Moscow: DMK Press, 2004. 432 Print. 2. Basov K.A. ANSYS: Spravochnik. Moscow: DMK Press, 2005. 640 Print. 3. Dyshko A.L. Priblizhennoe opredelenie sobstvennykh haracteristic tsulundricheskoj obolochki s otverstiyami. A.L. Dyshko, I.D. Pavlenko, Yu. M. Selivanov. Applied mechanics. 1996. Vol. 32, № 2. 27-32 Print. 4. Zarutskij V.A. O kompleksnykh eksperimetal'nykh issledovaniyah ustojchivosti i kolebanij konstruktivno neodnorodnykh obolochek. V.A. Zarutskij. Applied mechanics. 2001. Vol. 37, № 8. 38-67 Print. 5. Kairov A.S. Vliyanie otverstij na sobstvennye kolebaniya obolochek vrashcheniya. A.S. Kairov. Teoreticheskaya i prikladnaya mehanika. Khar'kiv: Osнова. 2000. No 31. 131-137 Print. 6. Kolebaniya rebristykh obolochek vrashcheniya. I.Ya Amiro, V.A. Zarutskij, V.N. Revutskij and other. Kyiv: Naukova dumka, 1988. 172 Print. 7. Metody rascheta obolochek; Vol. 1. Teoriya tonkih obolochek, oslablennykh otverstiyami. A.N. Guz', I.S. Chernyshenko, V.N. Chehov. Kyiv: Naukova dumka, 1980. 636 Print. 8. Pal'chevskij A.S. Svobodnye kolebaniya tsilindricheskih obolochek s bol'shymi pryamougol'nymi otverstiyami. A.S. Pal'chevskij. Applied mechanics. 1981. Vol. 17, № 5. 130-133 Print. 9. Preobrazhenskij I.Ya O zadachah po ustojchivosti i kolebaniyam mnogosvyaznykh tonkostennykh deformiruemykh system. Obzor. Kolebaniya i ustojchivost' mnogosvyaznykh tonkostennykh system. Moscow: Mir, 1984. 287-309 Print. 10. Selivanov Yu.M. Golographicheskaya interferometriya i metod konechnykh elementov v zadachah mehaniki neodnorodnykh struktur. Yu.M. Selivanov. Metody rozvyazuvannya prukladnykh zadach mehaniku deformivnogo tverdogo tila. Dnepropetrovsk: Nauka I osvita, 2010. № 11. 265-275 Print. 11. Bathe K.J. Numerical methods in finite element analysis. K.J. Bathe. Englewood Cliffs:Prentice-Hall, 2006. 564 Print. 12. Zienkiewicz O.C. The finite element method. Fifth edition. O.C. Zienkiewicz, R.L. Teylor. Oxford: Butterworth-Heinemann Linacre House, Jordan Hill, 2000. 348 Print. 13. Toda S. Kolebaniya krugovykh tsylindricheskih obolochek s vyrezami. S. Toda, K. Kamatsu. Kolebaniya i ustojchivost' mnogosvyaznykh tonkostennykh sistem. Moscow: Mir, 1984. 269-286 Print.

Поступила (received) 22.12.2015

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Каиров Владимир Алексеевич – Национальный университет кораблестроения, ассистент кафедры инженерной механики и технологии машиностроения; г. Николаев, Украина; e-mail: alex-kairov@yandex.ru.

Kairov Vladimir Alexeevich – National university of shipbuilding, Assistant at the Department of engineering mechanics and technology of machinebuilding Nikolaev, Ukraine; e-mail: alex-kairov@yandex.ru.

Моргун Сергей Александрович – Национальный университет кораблестроения, ассистент кафедры инженерной механики и технологии машиностроения; г. Николаев, Украина; e-mail: technolognuk@rambler.ru.

Morgun Sergei Aleksandrovich – National university of shipbuilding, Assistant at the Department of engineering mechanics and technology of machinebuilding Nikolaev, Ukraine; e-mail: technolognuk@rambler.ru.