

УДК 620.172.251.226

В.Г. МАРТИНЕНКО**МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ В'ЯЗКОПРУЖНИХ
ВЛАСТИВОСТЕЙ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРІАЛУ**

Представлено методику для проведення експериментального дослідження в'язкопружних властивостей ортотропного матеріалу. Розв'язана задача розтягнення та зсуву постійними навантаженнями тонкої в'язкопружної ортотропної пластинки. Розроблено спосіб апроксимації експериментальних даних, отриманих у різні моменти часу та для різних температурних точок, з метою визначення пружних властивостей та ядра релаксації ортотропного матеріалу, якому характерна в'язкопружність, ступінь анізотропії якої визначається ступенем анізотропії пружних властивостей, за допомогою методу найменших квадратів.

Ключові слова: в'язкопружність, ортотропія, ядро релаксації, метод найменших квадратів.

Вступ. В наш час промисловість, що швидко розвивається, виставляє жорсткі вимоги до продуктивності машин. Це означає, що вони повинні бути достатньо міцними, щоб витримати високий рівень навантажень на них, та водночас легкими, що дозволяє розвивати великі швидкості їм у цілому або їхнім рухомих частям. Прикладом цих машин можуть служити літак або космічний апарат.

Задля досягнення таких показників використовують композитні матеріали, зокрема склопластик або вуглепластик (рис. 1). В процесі навантаження вони проявляють складні механічні властивості: ортотропію та в'язкопружність [1]. Для визначення механічної поведінки та висновків щодо міцності конструкцій, елементи яких виконані з композитних матеріалів, ці властивості потребують адекватного математичного моделювання, що тягне за собою необхідність проведення експериментальних досліджень, спрямованих на визначення параметрів тієї чи іншої моделі механі-

чної поведінки матеріалу.

Саме тому розробка теоретичної бази та методики проведення експерименту з визначення таких властивостей є актуальною на даний момент задачею.

Найчастіше для визначення пружних та в'язкопружних властивостей ортотропного матеріалу використовують тонкостінні елементи, такі як пластинки та оболонки. Зокрема, в роботі [2] продемонстрована методика визначення пружних характеристик ортотропних пластин довільної форми за допомогою статичного згинального навантаження її зосередженими силами в певних точках. Стаття [3] описує спосіб отримання пружних характеристик ортотропної прямокутної пластини при збудженні в ній так званих хвиль Ламба. В праці [4] йдеться мова про визначення пружних характеристик ортотропної пластини, що має різні напрямки армування, за допомогою динамічного експерименту.



Рисунок 1 – Вуглепластикові елементи корпусу космічного апарату

В той же час, велика увага приділяється експериментальному визначенню в'язкопружних властивостей композитних матеріалів. Так, робота [5] описує

теорію та методологію числової оцінки лінійної в'язкопружності на прикладі тонкого циліндричного зразка матеріалу. Стаття [6] провадить натурне дослі-

дження коливань ортотропних в'язкопружних пластин. В [7] наведено теоретичне прогнозування та аналіз експериментальних даних з визначення динамічних характеристик ортотропної в'язкопружної пластинки.

Дана робота пропонує розв'язання задачі розтягування тонкої ортотропної в'язкопружної пластинки як теоретичну основу для проведення аналогічного експерименту з визначення ортотропних пружних та в'язкопружних механічних характеристик матеріалу з описом методики та способів проведення експерименту.

Постановка такої задачі для пружного випадку була зроблена в книгах [8, с. 6] та [9, с. 103]. В них наведено тензорне рівняння фізичних співвідношень для тонкої пружної ортотропної пластини, тобто для задачі узагальненого плоского напруженого стану, а також вираження матриці податливості через технічні пружні постійні. Розв'язання такої задачі для випадку пружного ізотропного матеріалу за допомогою введення спеціальної функції напружень наведено в літературі [10, с. 60] та [11, с. 49], при цьому в [11, с. 53] детально описується можливість отримання її розв'язку за допомогою поліномів при різних наборах статичних граничних умов. Робота [12] наводить постановку задачі навантаження тонкої анізотропної пластини з врахуванням температурних та в'язкопружних ефектів матеріалу.

Розв'язання ж задачі розтягування тонкої ортотропної пружної пластини було виконано навіть із врахуванням внутрішніх концентраторів в ній. Так, в статтях [13] та [14] проводяться аналітичне та чисельне дослідження концентрації напружень в навантаженій розтягуючими постійними розподіленими силами ортотропній пластині, що послаблена внутрішнім еліптичним вирізом. Робота [15] дає аналітичний розв'язок задачі розтягування диску, що має полярну ортотропію пружних властивостей та змінну за радіусом товщину. Нарешті, в книзі [16] наведено розв'язки задачі розтягування та згину тонких анізотропних пластин різноманітних форм при певних наборах кінематичних та статичних умов.

Також велика увага приділялась й дослідженню узагальненого плоского напруженого стану із врахуванням в'язкопружності матеріалу. Наприклад, в статті [17] наводиться аналітичне моделювання такого напруженого стану в в'язкопружній ізотропній пластині із круглим вирізом всередині. В [18] демонструється аналіз перехідних процесів в ізотропній в'язкопружній пластині на пружній основі. Робота [19] дає розв'язок рівняння поздовжніх хвиль для в'язкопружної нескінченної пластини.

Водночас, ні в одній з вищенаведених робіт не дається розв'язок задачі про навантаження тонкої ортотропної в'язкопружної пластини. Саме тому дана стаття присвячена розгляду цього питання з теоретичної та експериментальної точок зору.

1 Постановка задачі. Розглянемо тонку прямокутну пластину, виготовлену з ортотропного в'язкопружного матеріалу, осі ортотропії якого співпадають із осями координат, та навантажену постійними розтя-

гуючими та зсувними розподіленими навантаженнями на краях (рис. 2).

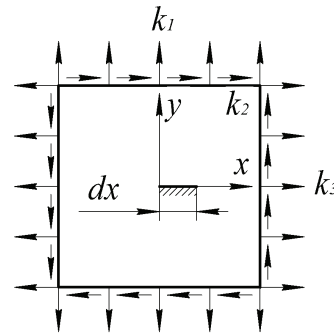


Рисунок 2 – Тонка прямокутна пластина під дією постійних навантажень

Ставиться задача визначення змінного у часі напружено-деформованого стану конструкції, а також розробки методики проведення миттєвих та тривалих експериментальних досліджень з визначення пружних та в'язкопружних параметрів матеріалу для різних температурних точок й адекватної апроксимації отриманих даних для застосування їх на практиці при теоретичному дослідженні механічної поведінки складних конструкцій, які виготовлені з матеріалу, що розглядається.

2 Теоретичні положення. Задача знаходження напружено-деформованого стану конструкції, що розглядається, належить до класу задач узагальненого плоского напруженого стану [11]. Запишемо рівняння рівноваги для даного випадку:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де x, y – просторові координати, напрямки осей яких співпадають із напрямками осей ортотропії матеріалу, σ_x, σ_y – нормальні напруження в напрямках відповідних координатних осей, τ_{xy} – дотичне напруження, X, Y – об'ємні сили в пластині.

Фізичні співвідношення в прямій формі для даного класу задач, записані через тензор миттєвих податливостей 2S із компонентами S_{ij} та тензор функцій швидкості повзучості ${}^2\Pi$ із компонентами $\Pi^*_{ij} = S_{ij}\Pi_{ij}(t)$, де сумування за індексами, що повторюються, не передбачається, а самі індекси $i, j = 1..6$ [20, с. 12]:

$$\begin{cases} \epsilon_x = S_{11}[\sigma_x(t) + \int_0^t \Pi_{11}(t-\tau)\sigma_x(\tau)d\tau] + \\ + S_{12}[\sigma_y(t) + \int_0^t \Pi_{12}(t-\tau)\sigma_y(\tau)d\tau]; \\ \epsilon_y = S_{21}[\sigma_x(t) + \int_0^t \Pi_{21}(t-\tau)\sigma_x(\tau)d\tau] + \\ + S_{22}[\sigma_y(t) + \int_0^t \Pi_{22}(t-\tau)\sigma_y(\tau)d\tau]; \\ \gamma_{xy} = S_{66}[\tau_{xy}(t) + \int_0^t \Pi_{66}(t-\tau)\tau_{xy}(\tau)d\tau], \end{cases} \quad (2)$$

де ϵ_x, ϵ_y – лінійні деформації в напрямках відповідних координатних осей, γ_{xy} – кутова деформація, τ – час,

що сплинув, t – даний момент часу (часова координата).

Введемо функцію напружень $\varphi(x, y, t)$ таким чином, щоб задовольнити рівняння рівноваги (1) при постійних об'ємних силах:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx. \end{cases} \quad (3)$$

Для задачі навантаження прямокутної пластини постійними нормальними та дотичними навантаженнями на краях функція напружень може бути записана у вигляді полінома другого ступеню, як це було визначено в [11, с. 53]:

$$\varphi(x, y, t) = \frac{k_1}{2} x^2 + k_2 xy + \frac{k_3}{2} y^2. \quad (4)$$

При цьому можна показати, що коефіцієнти k_1 , k_2 та k_3 відповідають нормальному в напрямку y , нормальному в напрямку x та зсувному постійним навантаженням на краях пластини.

Запишемо тепер вирази для деформацій (2) із врахуванням (3) та (4) за умови відсутності об'ємних навантажень:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = S_{11}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{11}(t-\tau) d\tau] + \\ + S_{12}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{12}(t-\tau) d\tau]; \\ \varepsilon_y = S_{21}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{21}(t-\tau) d\tau] + \\ + S_{22}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{22}(t-\tau) d\tau]; \\ \gamma_{xy} = S_{66}k_2[1 + \int_0^t \Pi_{66}(t-\tau) d\tau]. \end{cases} \quad (5)$$

Проінтегрувавши рівняння для лінійних деформацій в співвідношеннях Коши [10], отримаємо загальні розв'язки для переміщень:

$$\begin{cases} u = \int \varepsilon_x dx = S_{11}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{11}(t-\tau) d\tau]x + \\ + S_{12}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{12}(t-\tau) d\tau]x + C(y, t); \\ v = \int \varepsilon_y dy = S_{21}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{21}(t-\tau) d\tau]y + \\ + S_{22}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{22}(t-\tau) d\tau]y + C(x, t). \end{cases} \quad (6)$$

де u , v – переміщення в напрямках осей x та y відповідно, $C(y, t)$, $C(x, t)$ – функції інтегрування, що повинні бути знайдені з додаткових умов.

Враховуючи той факт, що напруження при постійних навантаженнях на краях є постійними за координатами, переміщення мають бути лінійними функціями координат. Це означає, що функції $C(y, t)$ та $C(x, t)$ також повинні мати лінійний відносно координат вигляд:

$$\begin{cases} C(x, t) = C_1(t)x + C_2(t); \\ C(y, t) = C_3(t)y + C_4(t), \end{cases} \quad (7)$$

де $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, $C_4(t)$ – невідомі функції часу, що потребують для їхнього знаходження чотири умови.

Перша умова може бути отримана, якщо підставити вирази для переміщень (6) у співвідношення Коши для зсувної деформації та прирівняти його до правої частини виразу для зсувної деформації з (5):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial C(y)}{\partial y} + \frac{\partial C(x)}{\partial x} \right) = S_{66}k_2 [1 + \int_0^t \Pi_{66}(t-\tau) d\tau]. \quad (8)$$

Підставивши в (8) загальний вид для функцій $C(y, t)$ та $C(x, t)$, отримаємо:

$$C_1(t) + C_3(t) = 2S_{66}k_2 [1 + \int_0^t \Pi_{66}(t-\tau) d\tau]. \quad (9)$$

Ще три умови для знаходження невідомих функцій витікають з умов закріплення пластини. Нехай закріплені точка в початку координат та нескінченно малий відрізок dx , який співпадає з віссю x , що на рис. 2 показано штриховкою. Таке закріплення означає наступні граничні умови:

$$\begin{cases} u(0, 0, t) = 0; \\ v(0, 0, t) = 0; \\ dv/dx(0, 0, t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Підставивши вирази (7) в (6), а потім в систему (10), отримаємо:

$$\begin{cases} C_4(t) = 0; \\ C_2(t) = 0; \\ C_1(t) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Тоді з виразу (9) маємо значення останньої невідомої функції часу:

$$C_3(t) = 2S_{66}k_2 [1 + \int_0^t \Pi_{66}(t-\tau) d\tau]. \quad (12)$$

В такому випадку розв'язок задачі для переміщень буде мати вигляд:

$$\begin{cases} u = S_{11}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{11}(t-\tau) d\tau]x + \\ + S_{12}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{12}(t-\tau) d\tau]x + \\ + 2S_{66}k_2[1 + \int_0^t \Pi_{66}(t-\tau) d\tau]y; \\ v = S_{21}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{21}(t-\tau) d\tau]y + \\ + S_{22}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{22}(t-\tau) d\tau]y. \end{cases} \quad (13)$$

За аналогією у випадку закріплення нескінченно малого відрізка dy , що співпадає з віссю y , розв'язок задачі набуде вигляду:

$$\begin{cases} u = S_{11}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{11}(t-\tau) d\tau]x + \\ + S_{12}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{12}(t-\tau) d\tau]x; \\ v = S_{21}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{21}(t-\tau) d\tau]y + \\ + S_{22}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{22}(t-\tau) d\tau]y + \\ + 2S_{66}k_2[1 + \int_0^t \Pi_{66}(t-\tau) d\tau]x. \end{cases} \quad (14)$$

У випадку ж відсутності дотичних напружень на краях пластини, тобто коли $k_2 = 0$, розв'язок задачі спроститься:

$$\begin{cases} u = S_{11}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{11}(t-\tau)d\tau]x + \\ + S_{12}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{12}(t-\tau)d\tau]x; \\ v = S_{21}k_3[1 + \int_0^t \Pi_{21}(t-\tau)d\tau]y + \\ + S_{22}k_1[1 + \int_0^t \Pi_{22}(t-\tau)d\tau]y. \end{cases} \quad (15)$$

При цьому для визначення переміщень в конструкції за формулами (13)-(15) коефіцієнти тензору податливості матеріалу повинні бути виражені через технічні пружні постійні [8, с. 6]):

$$\begin{cases} S_{11} = 1/E_x; \\ S_{22} = 1/E_y; \\ S_{12} = S_{21} = -\nu_{xy}/E_x = -\nu_{yx}/E_y; \\ S_{66} = 1/G_{xy}. \end{cases} \quad (16)$$

3 Методика проведення експериментальних досліджень. Як видно з п. 2 даної роботи, механічні характеристики тонкого зразку композитного матеріалу, що розглядається, містять в собі чотири пружні постійні $S_{11}, S_{22}, S_{12}, S_{66}$ та чотири функції швидкості повзучості $\Pi^*_{11}(t), \Pi^*_{22}(t), \Pi^*_{12}(t), \Pi^*_{66}(t)$. Дуже часто такі матеріали проявляють механічну поведінку, при якій анізотропія в'язкопружних властивостей визначається анізотропією пружних властивостей, що означає в нашому випадку наступне співвідношення [21]:

$$\Pi^*_{ij}(t) = S_{ij}\Pi(t). \quad (17)$$

Таким чином для визначення в'язкопружних характеристик матеріалу достатньо задати виглядом ядра повзучості $\Pi(t)$, яке може бути апроксимоване експоненціальними рядами Проні [20]:

$$\Pi(t) = \sum_{k=1}^K a_k \exp(-b_k t), \quad (18)$$

де a_k, b_k – параметри повзучості, K – число членів ряду Проні.

Оскільки ми маємо тензор податливості 2S із чотирма компонентами, для визначення пружних параметрів ортотропної пластини необхідно провести серію миттєвих експериментів [22] із врахуванням того, що $t = 0$.

Нехай до пластини прикладено розтягуюче розподілене навантаження P_1 , що діє у напрямку осі x , як це показано на рис. 3, а. Тоді система (5) для миттєвих деформацій набуде вигляду:

$$\begin{cases} \epsilon_{x(t)} = S_{11}P_1; \\ \epsilon_{y(t)} = S_{21}P_1; \\ \gamma_{xy(t)} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

де $\epsilon_{x(t)}, \epsilon_{y(t)}$ – значення миттєвих лінійних деформацій в напрямках відповідних координатних осей для першого експерименту, $\gamma_{xy(t)}$ – кутова деформація для першого експерименту, що повинна дорівнювати нулю.

Тоді із системи (19) можна знайти дві пружні постійні:

$$\begin{cases} S_{11} = \epsilon_{x(t)} / P_1; \\ S_{21} = \epsilon_{y(t)} / P_1. \end{cases} \quad (20)$$

Повторюючи процедуру для випадку прикладення розтягуючого розподіленого навантаження P_2 , що діє у напрямку осі y (рис. 3, б), можна отримати значення ще однієї пружної постійної:

$$S_{22} = \epsilon_{y(II)} / P_2. \quad (21)$$

При цьому очевидно, що згідно прийнятих припущень повинно виконуватись співвідношення:

$$\epsilon_{x(II)} / P_2 = \epsilon_{y(I)} / P_1. \quad (22)$$

Як видно з третього виразу в системі (5), для знаходження останньої константи S_{66} потрібно прикласти до пластини дотичне навантаження. Реалізувати такий тип навантаження можливо за допомогою прикладення сили P_3 під кутом 45° до осей x та y , як показано на рис. 3, в.

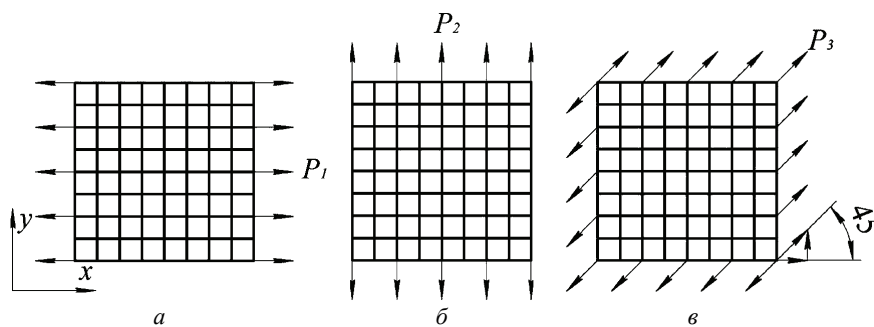


Рисунок 3 – Схеми навантаження пластини

В такому випадку при перерахуванні навантажень на площадки, що паралельні координатним осям, отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} \epsilon_{x(III)} = (S_{11} + S_{12})P_3\sqrt{2}/2; \\ \epsilon_{y(III)} = (S_{21} + S_{22})P_3\sqrt{2}/2; \\ \gamma_{xy(III)} = -S_{66}P_3\sqrt{2}/2. \end{cases} \quad (23)$$

Перші два вирази в даній системі можуть служи-

ти для перевірки отриманих за допомогою попередніх експериментів пружних констант, а третій – для отримання значення останньої невідомої:

$$S_{66} = -\gamma_{xy(III)}\sqrt{2}/P_3. \quad (24)$$

Таким чином після проведення трьох описаних вище експериментів формули (20), (21) та (24) дають повну інформацію про компоненти тензору податливості ортотропної пластини.

Для визначення в'язкопружних характеристик

матеріалу при певній температурі у випадку, коли вони визначаються функціями швидкості повзучості, що мають вигляд (17), достатньо одного експерименту [23, с. 57].

Нехай на пластину діє постійне розподілене навантаження P в напрямку осі x . Тоді за формулою (5) із врахуванням припущень (17) та (18) маємо для подовженої деформації у напрямку x :

$$\varepsilon_x(t) = S_{11}P[1 + \int_0^t \sum_{k=1}^K a_k \exp(-b_k(t-\tau))d\tau]. \quad (25)$$

Проінтегрувавши за часом члени ряду Проні та поставивши усі невідомі параметри в ліву частину, маємо наступний вираз:

$$\sum_{k=1}^K \frac{a_k}{b_k} \exp(-b_k t) = 1 - \varepsilon_x(t) / S_{11}P. \quad (26)$$

Якщо ввести змінений параметр $c_k = a_k/b_k$, то отримаємо:

$$\sum_{k=1}^K c_k \exp(-b_k t) = 1 - \varepsilon_x(t) / S_{11}P. \quad (27)$$

Нехай $(\varepsilon_x)_l, (\varepsilon_y)_l$ – вимірні значення лінійних деформацій для моментів часу t_l , де $l = 1..L$, L – число проведених вимірювань.

Очевидно, що для досягнення певного рівня точності можливо провести L вимірювань деформацій $(\varepsilon_x)_l$ або ж $L/2$ деформацій $(\varepsilon_x)_l$ та $L/2$ деформацій $(\varepsilon_y)_l$, тобто час проведення вимірювань можна скоротити вдвічі.

Якщо число вимірювань співпадає з подвоєним числом членів ряду Проні, тобто $L = 2K$, то можливе досягнення повного співпадіння експериментальних результатів із апроксимуючою кривою повзучості шляхом розв'язання нелінійної системи алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^K c_k \exp(-b_k t_l) = 1 - (\varepsilon_x)_l / S_{11}P, l = 1..L \quad (28)$$

або ж системи:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^K c_k \exp(-b_k t_l) = 1 - (\varepsilon_x)_l / S_{11}P; \\ \sum_{k=1}^K c_k \exp(-b_k t_l) = 1 - (\varepsilon_y)_l / S_{21}P, \end{cases} l = 1..L/2. \quad (29)$$

Для апроксимації кривої повзучості за допомогою ряду Проні, подвоєне число членів ряду якого менше за число вимірювань, тобто $L > 2K$, може використовуватись метод найменших квадратів [24]. Для його застосування проводиться побудова квадратичної похибки [25] у випадку вимірювань лише однієї або двох деформацій відповідно:

$$\Delta_1 = \sum_{l=1}^L [\sum_{k=1}^K c_k \exp(-b_k t_l) - 1 + (\varepsilon_x)_l / S_{11}P]^2, \quad (30)$$

$$\Delta_2 = \sum_{l=1}^{L/2} \{ [\sum_{k=1}^K c_k \exp(-b_k t_l) - 1 + (\varepsilon_x)_l / S_{11}P]^2 + [\sum_{k=1}^K c_k \exp(-b_k t_l) - 1 + (\varepsilon_y)_l / S_{21}P]^2 \}. \quad (31)$$

Тоді, мінімізуючи цю похибку, можемо отримати систему $2K$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів b_k та c_k :

$$\begin{cases} \partial \Delta_p / \partial b_k = 0; \\ \partial \Delta_p / \partial c_k = 0, \end{cases} k = 1..K, \quad (32)$$

де $p = 1$ або 2 в залежності від способу вимірювань деформацій (в одному або в двох напрямках відповідно).

Таким чином можемо отримати значення всіх коефіцієнтів апроксимації $a_k = c_k/b_k$ та b_k й аналітично повністю описати в'язкопружну поведінку ортотропного матеріалу для певного рівня температури.

Оскільки пружні та в'язкопружні властивості матеріалу залежать від його температури, коефіцієнти апроксимації, як і коефіцієнти тензору податливості в загальному випадку є залежними від температури T :

$$\begin{cases} a_k = a_k(T); \\ b_k = b_k(T); \\ S_{ij} = S_{ij}(T). \end{cases} \quad (33)$$

В такому випадку доцільно задатись певним апроксимуючим виглядом функцій (33) та, провівши замірювання для різних рівнів температур, також апроксимувати їх за допомогою методу найменших квадратів [23].

Нехай $(a_k)_r, (b_k)_r$ та $(S_{ij})_r$ – відповідно коефіцієнти ряду Проні та тензор податливості матеріалу, визначені за описаною вище схемою для певної температурної точки із індексом r .

Загальний вигляд апроксимуючих форм для виразів (33) можна записати наступним чином:

$$\begin{cases} a_k = \sum_{m=1}^M a_{km} \xi_m(T); \\ b_k = \sum_{n=1}^N b_{kn} \psi_n(T); \\ S_{ij} = \sum_{q=1}^Q S_{ij}^q \zeta_q(T), \end{cases} \quad (34)$$

де M, N, Q – число членів для відповідних апроксимуючих рядів.

Квадратичні похибки для відповідних коефіцієнтів запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} \Delta a_k = \sum_{r=1}^R [\sum_{m=1}^M a_{km} \xi_m(T_r) - (a_k)_r]^2; \\ \Delta b_k = \sum_{r=1}^R [\sum_{n=1}^N b_{kn} \psi_n(T_r) - (b_k)_r]^2; \\ \Delta S_{ij} = \sum_{r=1}^R [\sum_{q=1}^Q S_{ij}^q \zeta_q(T_r) - (S_{ij})_r]^2. \end{cases} \quad (35)$$

Тоді для визначення коефіцієнтів a_{km}, b_{kn} та S_{ij}^q маємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \partial \Delta a_k / \partial a_{km} = 0, \quad m = 1..M; \\ \partial \Delta b_k / \partial b_{kn} = 0, \quad n = 1..N; \\ \partial \Delta S_{ij} / \partial S_{ij}^q = 0, \quad q = 1..Q, \\ k = 1..K, ij = 11,12,22,66. \end{cases} \quad (36)$$

В загальному випадку система (36) представляє собою систему $[K*(M+N) + 4Q]$ алгебраїчних рівнянь

відносно невідомих коефіцієнтів апроксимації. Її розмірність можна знизити на $3Q$, якщо врахувати, що усі пружні константи при зміні температури змінюються пропорційно, що характерно для великого числа композитних матеріалів [22].

В такому випадку потрібно провести три експерименти, що описуються системами (19), (21) та (23), для визначення компонентів тензору податливості для однієї температурної точки – наприклад, для першої: $(S_{11})_1, (S_{12})_1, (S_{22})_1, (S_{66})_1$. Для інших температурних точок $r = 2 \dots R$ проводимо експеримент, що описується, наприклад, системою (19), для визначення пружної константи $(S_{11})_r$, а інші пружні константи визначаємо з умов пропорції:

$$\begin{cases} (S_{12})_r = (S_{11})_r \frac{(S_{12})_1}{(S_{11})_1}; \\ (S_{22})_r = (S_{11})_r \frac{(S_{22})_1}{(S_{11})_1}; \\ (S_{66})_r = (S_{11})_r \frac{(S_{66})_1}{(S_{11})_1}. \end{cases} \quad (37)$$

Неважко визначити, що залежність між апроксимуючими коефіцієнтами буде аналогічною системі (37):

$$\begin{cases} {}^q S_{12} = {}^q S_{11} \frac{(S_{12})_1}{(S_{11})_1}; \\ {}^q S_{22} = {}^q S_{11} \frac{(S_{22})_1}{(S_{11})_1}; \quad q = 1 \dots Q. \\ {}^q S_{66} = {}^q S_{11} \frac{(S_{66})_1}{(S_{11})_1}, \end{cases} \quad (38)$$

Тоді система (36) буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \partial \Delta a_k / \partial a_{km} = 0, & m = 1 \dots M; \\ \partial \Delta b_k / \partial b_{kn} = 0, & n = 1 \dots N; \quad k = 1 \dots K. \\ \partial \Delta S_{11} / \partial {}^q S_{11} = 0, & q = 1 \dots Q, \end{cases} \quad (39)$$

Отже з врахуванням зазначених припущень щодо залежності в'язкопружних властивостей матеріалу від пружних та пружних властивостей від температури потрібно провести три експерименти з визначення пружних властивостей матеріалу та $R-1$ експеримент для визначення залежності пружних та в'язкопружних властивостей матеріалу від температури. При цьому число вимірювань деформацій становить $[2+R*(L+1)]$.

В загальному випадку для перевірки обраних припущень та усереднення апроксимованих результатів доцільно при збереженні числа експериментів $R+2$ провести $3R*(L+1)$ вимірювань, тобто по три вимірювання для початкового моменту й подальших моментів часу на кожній температурній точці.

Висновки. В рамках підготовки теоретичної бази для проведення експериментального дослідження пружних та в'язкопружних властивостей ортотропного матеріалу була розв'язана задача про плоский напружений стан ортотропної в'язкопружної пластини. Аналітичний нестационарний вигляд лінійних та зсувної деформацій пластини дозволив визначити схему проведення експериментів з її навантаження та вста-

новити необхідну їхню кількість. На основі методу найменших квадратів розроблена методика апроксимації залежностей пружних констант ортотропного матеріалу та його ядра релаксації від температури. Наведена процедура експериментальних досліджень може бути використана при проведенні емпіричних дослідів пружних та в'язкопружних властивостей композитного матеріалу.

Список літератури: 1. *Нарусаева И. И.* Прочность полимерных материалов / *И. И. Нарусаева.* – М.: Химия, 1987. – 400 с. 2. *Bruno L.* Elastic characterization of orthotropic plates of any shape via static testing / *L. Bruno, G. Felice, L. Pagnotta* // International Journal of Solids and Structures, 2008. – Vol. 45. – P. 908-920. 3. *Lasn K.* Experimental determination of elastic constants of an orthotropic composite plate by using lamb waves / *K. Lasn, A. Klauson, F. Chati* // Mechanics of Composite Materials, 2011. – Vol. 47, No. 4. – P. 435-446. 4. *Rickards R.* Method for identification of elastic properties of laminates based on experiment design / *R. Rickards, A. Chate, W. Steinchen* // Composites: Part B, 1999. – Vol. 30. – P. 279-289. 5. *Kolsky H.* Experimental studies of the mechanical behavior of linear viscoelastic solids / *H. Kolsky* // Proc. of the 4th Symposium on Naval Structural Mechanics, 1965. – P. 357-379. 6. *Nakao T.* Experimental study of flexural vibration of orthotropic, viscoelastic plates / *T. Nakao, C. Tanaka, A. Takahashi* // Journal of Sound and Vibration, 1987. – Vol. 116, No. 3. – P. 465-473. 7. *Nguyen H. V.* Mechanical behavior of linear viscoelastic composites. A prediction method and experimental testing / *H. V. Nguen, J. Pastor* // Mechanics Research Communications, 1994. – Vol. 21, No.6. – P. 565-574. 8. *Nettles A. T.* Basic Mechanics of Laminated Plates / *A. T. Nettles.* – NASA Reference Publication 1351, 1994. – 97 p. 9. *Reddy J. N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis / *J. N. Reddy.* – Florida: CRC Press, 2004. – 831 p. 10. *Самуль В. И.* Основы теории упругости и пластичности / *В. И. Самуль.* – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с. 11. *Тимошенко С. П.* Теория упругости / *С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер.* – М.: Наука, 1975. – 575 с. 12. *Roylance D.* Laminated composite plates / *D. Roylance.* – Massachusetts Institute of Technology, 2000. – 17 p. 13. *Bakhshandeh K.* Investigation of stress concentration for finite-width orthotropic plate / *K. Bakhshandeh, I. Rajabi, F. Rahimi* // Journal of Mechanical Engineering, 2008. – Vol. 54, No. 2. – P. 140-147. 14. *Jong Th.* Stresses around a pin-loaded hole in an elastically orthotropic or isotropic plate / *Th. Jong, A. Beukers.* – The Netherlands: Delft University of Technology, 1977. – 44 p. 15. *Bert Ch. W.* Displacement in a polar-orthotropic disk of varying thickness / *Ch. W. Bert* // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 1963. – Vol. 14. – P. 101-111. 16. *Mansfield E. H.* The bending and stretching of plates / *E. H. Mansfield.* – Cambridge University Press, 1989. – 228 p. 17. *Margetson J.* Circular inclusion in a viscoelastic plate subjected to uniaxial tension / *J. Margetson* // International Journal of Engineering Science, 1971. – Vol. 9. – 639-650 p. 18. *Kiasat M. S.* On transient response of viscoelastic beams and plates on viscoelastic medium / *M. S. Kiasat, H. A. Zamani, M. M. Aghdam* // International Journal of Mechanical Sciences, 2014. – Vol. 83. – 133-145 p. 19. *Аришинов Г. А.* Эволюционное уравнение продольных уединенных волн в вязкоупругой бесконечной пластине и его точное решение / *Г. А. Аришинов* // Краснодар: Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета, 2003. – № 2 – С. 102-110. 20. *Адамов А. А.* Методы прикладной вязкоупругости / *А. А. Адамов, В. П. Матвеевко, Н. А. Труфанов.* – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с. 21. *Уорд И.* Механические свойства твердых полимеров / *И. Уорд.* – М.: Химия, 1975. – 357 с. 22. *Капитонов А. М.* Физико-механические свойства композиционных материалов. Упругие свойства / *А. М. Капитонов, В. Е. Редькин.* – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2013. – 532 с. 23. *Кравчук А. С.* Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы / *А. С. Кравчук, В. П. Майборода, Ю. С. Уржумцев.* – М.: Наука, 1985. – 304 с. 24. *Полилов А. Н.* Экспериментальная механика композитов / *А. Н. Полилов.* – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. – 375 с. 25. *Калиткин Н. Н.* Численные методы / *Н. Н. Калиткин.* – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Bibliography (transliterated): 1. Narisaeva, I. I. Prochnost' polimernyh materialov. Moscow: Himija, 1987. Print. 2. Bruno, L., G. Felice and L. Pagnotta Elastic characterization of orthotropic plates of any shape via static testing. International Journal of Solids and Structures. Vol. 45. 2008. 908-920. Print. 3. Lasn, K., A. Klauson and F. Chati Experimental determination of elastic constants of an orthotropic composite plate by using lamb waves. Mechanics of Composite Materials. Vol. 47, No. 4. 2011. 435-446. Print. 4. Rickards, R., A. Chate and W. Steinchen Method for identification of elastic properties of laminates based on experiment design. Composites: Part B. Vol. 30. 1999. 279-289. Print. 5. Kolsky, H. Experimental studies of the mechanical behavior of linear viscoelastic solids. Proc. of the 4th Symposium on Naval Structural Mechanics. 1965. 357-379. Print. 6. Nakao, T., C. Tanaka and A. Takahashi Experimental study of flexural vibration of orthotropic, viscoelastic plates. Journal of Sound and Vibration. Vol. 116, No. 3. 1987. 465-473. Print. 7. Nguyen, H. V. and J. Pastor Mechanical behavior of linear viscoelastic composites. A prediction method and experimental testing. Mechanics Research Communications. Vol. 21, No.6. 1994. 565-574. Print. 8. Nettles, A. T. Basic Mechanics of Laminated Plates NASA Reference Publication 1351, 1994. Print. 9. Reddy, J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Florida: CRC Press, 2004. Print. 10. Samul', V. I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti. Moscow: Vysshaja shkola, 1982. Print. 11. Timoshenko, S. P. and J. Gud'er. Teorija uprugosti. Moscow: Nauka, 1975. Print. 12. Roylance, D. Laminated composite plates. Massachusetts Institute of Technology, 2000. Print. 13. Bakhshandeh, K., I. Rajabi and F. Rahimi. Investigation of stress concentration for finite-width orthotropic plate. Journal of Mechanical Engineering. Vol. 54, No. 2.

2008. 140-147. Print. 14. Jong, Th. and A. Beukers Stresses around a pin-loaded hole in an elastically orthotropic or isotropic plate. The Netherlands: Delft University of Technology, 1977. Print. 15. Bert, Ch. W. Displacement in a polar-orthotropic disk of varying thickness. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. Vol. 14. 1963. 101-111. Print. 16. Mansfield, E. H. The bending and stretching of plates. Cambridge University Press, 1989. Print. 17. Margetson, J. Circular inclusion in a viscoelastic plate subjected to uniaxial tension. International Journal of Engineering Science. Vol. 9. 1971. 639-650. Print. 18. Kiasat, M. S., H. A. Zamani and M. M. Aghdam. On transient response of viscoelastic beams and plates on viscoelastic medium. International Journal of Mechanical Sciences. Vol. 83. 2014. 133-145. Print. 19. Arshinov, G. A. Jevoljucionnoe uravnenie prodol'nyh uedinjonnyh voln v vjzskouprugoj beskonechnoj plastine i ego tochnoe reshenie. Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. No. 2. 2003. 102-110. Print. 20. Adamov, A. A., V. P. Matveenko and N. A. Trufanov Metody prikladnoj vjzskouprugosti. Ekaterinburg: UrO RAN, 2003. Print. 21. Uord, I. Mehaničeskie svojstva tvjordyh polimerov. Moscow: Himija, 1975. Print. 22. Kapitonov, A. M. and V. E. Red'kin Fiziko-mehaničeskie svojstva kompozicionnyh materialov. Uprugie svojstva. Krasnojarsk: Sib. feder. un-t, 2013. Print. 23. Kravchuk, A. S., V. P. Majboroda and Yu. S. Urzhumcev Mehanika polimernyh i kompozicionnyh materialov. Jeksperimental'nye i chislennye metody. Moscow: Nauka, 1985. Print. 24. Polilov, A. N. Jeksperimental'naja mehanika kompozitov. Moscow: Izd. MG TU im. N. Je. Bauman, 2015. Print. 25. Kalitkin, N. N. Chislennye metody. Moscow: Nauka, 1978. Print.

Надійшла (received) 15.12.2015

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Мартиненко Володимир Геннадійович – Національний технічний університет «ХПІ», аспірант кафедри Динаміки та міцності машин, тел.: (099) 624-72-45, e-mail: martynenko.volodymyr@gmail.com.

Martynenko Volodymyr Gennadijovich – National Technical University "KhPI", postgraduate of the Dynamic and Strength of Machines department, phone: (099) 624-72-45, e-mail: martynenko.volodymyr@gmail.com.

УДК 539.3

С. А. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПІ»

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ТЕЛ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ

Проанализированы этапы оптимизации многокомпонентных тел неоднородной структуры: выбор моделей динамического анализа, варьируемых переменных, функционалов цели и ограничений. Методы оптимизации классифицированы, как прямые; первого и второго порядка; стохастические; линейного и нелинейного программирования. Рассмотрено применение разных видов оптимизации Super Computer Simulation and Optimization Based Design / Engineering (многомерной, структурной, топологической, параметрической, многокритериальной и т. д.).

Ключевые слова: оптимизация, механика, неоднородные структуры, метод, CAE, SPDM.

Актуальность задачи оптимизации многокомпонентных тел неоднородной структуры обусловлена многочисленными важными научными и практическими проблемами, появляющимися при исследовании жизненного цикла новой техники в аэрокосмической, энергетической, транспортной и других отраслях промышленности [1-20 и др.].

Анализ исследований показал, что оптимальное проектирование начинают с процесса формулировки задачи. Вначале необходимо определить объект оптимизации и выбрать математические модели его анали-

за, описываемые уравнениями состояния. Многокомпонентные тела функционируют в условиях тепловых, механических, электромагнитных, аэро- и гидродинамических, акустических и радиационных нагрузений с учетом факторов контактных взаимодействий и разрушений, мало- и многоциклового усталости, концентрации напряжений, многообразных разновидностей изнашивания. При решении задач оптимизации многокомпонентных тел необходимо теоретическое исследование проблем динамического контактного взаимодействия, повреждения и разрушения; трения, износа и смазки, надежности (долговечности, безот-