

УДК 539.3

А. В. ВОРОПАЙ**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОПОРОЙ**

Приведены постановки и решение одной обратной нестационарной задачи для механической системы, состоящей из прямоугольной пластины средней толщины шарнирно-опертой по контуру и дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опоры при импульсном воздействии. В работе описана задача идентификации неизвестной нагрузки, вызывающей нестационарное деформирование пластины с дополнительной опорой. Пластина моделируется в рамках уточненной теории пластин типа С. П. Тимошенко. Исследования сводятся к анализу интегральных уравнений Вольтерра, которые решаются численно с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова.

Ключевые слова: пластина средней толщины, идентификация, нестационарное нагружение, вязкоупругая опора, интегральные уравнения Вольтерра, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова.

Введение. Зачастую конструкторы и расчетчики сталкиваются с проблемой недостаточной информации о действии нагрузок на механические системы. Особенно серьезные проблемы возникают при нестационарном деформировании элементов конструкций. В ряде случаев при анализе напряженно-деформированного состояния ударные и другие подобные нагружения моделируются приблизительно или вообще заменяются коэффициентами запаса, динамичности нагрузки и т.п. И только для особо ответственных элементов или конструкций в целом производится ряд дорогостоящих экспериментальных исследований. Решение обратных задач идентификации неизвестных нестационарных нагружений при обработке экспериментальных данных может существенно снизить стоимость и время исследований, а иногда частично или полностью заменить реальные исследования специальными вычислительными экспериментами.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с нестационарным деформированием шарнирно-опертых пластин с дополнительными опорами. Опоры принимаются вязкоупругими, так как в реальности редко встречаются чисто упругие или чисто вязкие опоры. Для рассматриваемой механической системы возможны следующие постановки обратных задач:

– идентификация параметров внешнего нагружения или зависимость изменения внешнего нестационарного нагружения пластины во времени при известной реакции между пластиной и дополнительной опорой;

– определение параметров дополнительной вязкоупругой опоры при известном (тарированном) нагружении;

– идентификация полной системы нагружения, как возмущающей силы, так и реакции между пластиной и дополнительной опорой;

– подбор требуемых характеристик вязкоупругой опоры (жесткости и коэффициента демпфирования) для обеспечения требуемых параметров напряженно-деформированного состояния или удовлетворения некоторым ограничениям,

– идентификация полной системы нагружения, как возмущающей силы, так и составляющих реакций между пластиной и дополнительной опорой, а также мест приложения возмущающей нагрузки и дополни-

тельной опоры.

В качестве исходных данных для перечисленных обратных задач используются изменения прогиба или деформации пластины во времени (они известны или могут быть измерены экспериментально), причем погрешность их задания (измерения) не превышает величины $\delta > 0$, то есть $\|w_\delta - \bar{w}\| \leq \delta$.

В работе [1] решается задача для прямоугольной пластины с дополнительной линейно-упругой опорой, а в работе [2] рассмотрены нестационарные колебания пластины с дополнительным амортизатором. Настоящая работа является логическим продолжением этих двух работ, и в целом опирается на работу [3], где описана методика решения прямой задачи для исследуемой механической системы с дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опорой.

Постановка задачи. На пластину в некоторой точке действует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины с дополнительной опорой. Деформирование пластины моделируется в рамках уточненной теории пластин средней толщины типа С. П. Тимошенко. Воздействие дополнительной опоры на пластину заменяется неизвестной нестационарной силой $R(t)$, приложенной к пластине в месте установки опоры.

Коэффициенты жесткости и демпфирования опоры считались постоянными, а сила сопротивления изменялась по формуле:

$$R(t) = c \cdot w_C(x_C, y_C, t) + \kappa \cdot \frac{dw_C(x_C, y_C, t)}{dt}, \quad (1)$$

где c – коэффициент жесткости дополнительной опоры, Н/м; κ – коэффициент демпфирования, Н·с/м.

Для прогиба пластины было получено следующее аналитическое выражение:

$$w(x, y, t) = \int_0^t K_P^W(x, y, t - \tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_P^W(x, y, t - \tau) R(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где $K_i^W(x, y, t)$ – соответствующие ядра интегралов, полученные после выполнения обратного преобразования Лапласа с использованием теоремы о свертке.

При решении обратной задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузки и координаты установки дополнительной опоры известны (рис. 1), а также известно изменение во времени прогиба пластины в одной из ее точек.

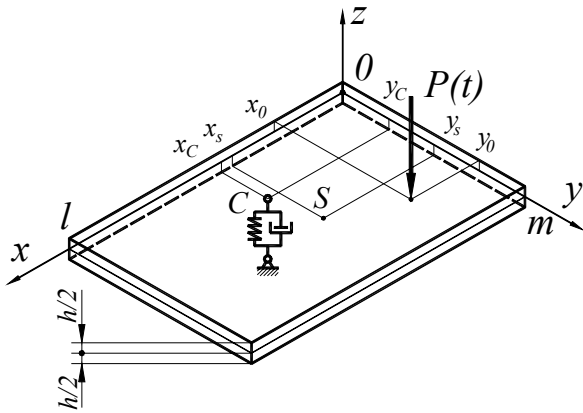


Рисунок 1 – Схема нагружения

В точке $S(x_s, y_s)$ (см. рис. 1) аналитическое выражение для определения прогиба пластины будет иметь следующий вид:

$$w(x_s, y_s, t) \equiv w_s(t) = \int_0^t K_P^W(x_s, y_s, t - \tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_P^W(x_s, y_s, t - \tau) R(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Если в выражении (3) неизвестно изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ и реакция между пластиной и дополнительной опорой $R(t)$, то это выражение является интегральным уравнением (ИУ) Вольтера с двумя неизвестными. Для решения обратной задачи интегральное уравнение (3) необходимо дополнить двумя выражениями для прогиба в точке контакта пластины и дополнительной опоры:

$$\begin{cases} R(t) = c \cdot w_C(x_C, y_C, t) + \kappa \cdot \frac{dw_C(x_C, y_C, t)}{dt}, \\ w(x_C, y_C, t) = \int_0^t P(\tau) K_P^W(x_C, y_C, t - \tau) d\tau - \int_0^t K_R^W(x_C, y_C, t - \tau) R(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (4)$$

Система интегро-дифференциальных уравнений (4) может быть преобразована к системе интегральных уравнений путем замены первого уравнения в (4) его интегральным аналогом:

$$w_C(x_C, y_C, t) = \int_0^t K_e(t - \tau) R(\tau) d\tau,$$

где $K_e(t) = \frac{1}{\kappa} \cdot e^{-\frac{c}{\kappa} t}$.

Тогда из (3) и (4) можно составить следующую систему ИУ:

$$\int_0^t K_{11}(t - \tau) P(\tau) d\tau + \int_0^t K_{12}(t - \tau) R(\tau) d\tau = w_s(t);$$

$$\int_0^t K_{21}(t - \tau) P(\tau) d\tau + \int_0^t K_{22}(t - \tau) R(\tau) d\tau = 0, \quad (5)$$

где ядра можно определить как $K_{11}(t) = K_P^W(x_s, y_s, t)$, $K_{12}(t) = K_P^W(x_s, y_s, t)$, $K_{21}(t) = K_P^W(x_C, y_C, t)$, $K_{22}(t) = K_R^W(x_C, y_C, t) + K_e(t)$.

Решение задачи. Решение системы ИУ Вольтера можно отнести к некорректным задачам математической физики (причем, как по Адамару, так и по Тихонову) и для решения системы (5) использовался регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова [4].

Дискретный аналог системы ИУ (5) имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

В матричной системе (6) вектор \mathbf{p}_1 соответствует неизвестной функции изменения во времени внешней нагрузки $P(t)$, вектор \mathbf{p}_2 – реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой $R(t)$, \mathbf{w}_s – исходным данным для идентификации (изменением прогиба) $w_s(t)$; матрицы \mathbf{A}_{11} , \mathbf{A}_{12} , \mathbf{A}_{21} и \mathbf{A}_{22} – соответствуют ядрам $K_{11}(t)$, $K_{12}(t)$, $K_{21}(t)$ и $K_{22}(t)$.

Матричная система (6) сводится к двум независимым матричным уравнениям на основе обобщения метода Крамера, то есть применения обобщенного алгоритма Крамера для блочных матриц:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{D}_j, \quad (7)$$

где \mathbf{D} – определитель блочной матрицы \mathbf{A} , а \mathbf{D}_j – определитель блочной матрицы \mathbf{A}_j , в которой j -й столбец заменялся столбцом правой части.

Каждое матричное уравнение (7) является независимой системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и согласно регуляризирующему алгоритму Тихонова здесь решались эквивалентные регуляризованные СЛАУ вида:

$$(\mathbf{D}^T \mathbf{D} + \alpha_j \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{D}^T \mathbf{D}_j, \quad (8)$$

где \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица, вид которой для безразмерной задачи приведен в [4], а в работе [5] указаны варианты обезразмеривания, $\alpha_j > 0$ – параметр регуляризации, оптимальный выбор которого в подобных задачах также описан в [5] и производится путем введения и минимизации функционалов типа невязки с учетом дополнительных условий и ограничений, базирующихся на априорной информации об искомых неизвестных силах.

В результате решения двух СЛАУ вида (8) находится сила взаимодействия между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой $R(t)$ и неизвестная возмущающая нагрузка $P(t)$.

Результаты расчетов. При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Численные расчеты производились при следующих значениях: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0,3$; $E = 2,07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h = 0,04 \text{ м}$; $l = 0,6 \text{ м}$, $m = 0,4 \text{ м}$. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0 = 0,4 \text{ м}$, $y_0 = 0,2 \text{ м}$. Коорди-

наты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_c = 0,2$ м, $y_c = 0,2$ м. Координаты точки, в которой изменение прогиба считается известным: $x_s = 0,3$ м, $y_s = 0,2$ м. Значение коэффициента жесткости дополнительной опоры $c = 10^8$ Н/м, а коэффициент демпфирования $\kappa = 4 \cdot 10^4$ Н·с/м; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

В настоящей работе описывается вычислительный эксперимент, в котором значения прогиба не измеряются на реальной пластине, а определяются из решения прямой (тестовой) задачи, в которой возмущающая нагрузка $\overline{P}(t)$ задается. В качестве исходных данных (рис. 2) брались значения прогиба в точке $S - \overline{w}(t)$, взятые из решения прямой задачи – толстая (незашумленная) кривая, а также использовались значения прогиба, на которые был наложен шум по зависимости:

$$w_\delta(t) = \overline{w}(t) + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t),$$

где w_{\max} – максимальное значение прогиба пластины в исследуемой точке при действии нагрузки $\overline{P}(t)$, $Rnd(t)$ – случайные числа в диапазоне $[-1;1]$, $\delta = 20\%$ – уровень накладываемого шума.

В случае правильного решения обратной задачи, идентифицированные силы $P(t)$ и $R(t)$ должны быть близки (или совпадать) с тестовой силой $\overline{P}(t)$ и определенной при решении прямой задачи реакцией $\overline{R}(t)$, что наглядно показывает достоверность полученных результатов. Также появляется возможность как качественной, так и количественной оценки решения обратной задачи.

На рис. 3 сплошными линиями показано изменение во времени возмущающей нагрузки $\overline{P}(t)$ (полуволна синусоиды) и определенная в результате решения прямой задачи реакция между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой $\overline{R}(t)$, а точками показаны идентифицированные значения сил $P(t)$ и $R(t)$ найденные из численно-аналитического решения обратной задачи по незашумленным исходным данным.

На рис. 4 показаны идентифицированные значения сил $P(t)$ и $R(t)$ найденные на основе численного решения интегральных уравнений Вольтера с неточно заданной правой частью (по зашумленным исходным данным).

На рис. 5 показаны функционалы, на основе которых выбирался параметр регуляризации α при решении регуляризованных СЛАУ вида (8), причем рис. 5, а соответствует невозмущенной правой части $\overline{w}(t)$, а рис. 5, б – зашумленным исходным данным $w_\delta(t)$.

Кривым 1 на рис. 5, а и 5, б соответствуют значения функционала «невязки» вида:

$$\|\mathbf{A}_P \cdot \mathbf{P}^\alpha + \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{R}^\alpha - \mathbf{w}\|_{l_2}^2.$$

Укажем, что в случае незашумленной правой части «невязка» должна стремиться к нулю и опти-

мальные значения параметра регуляризации соответствуют глобальному минимуму функционала, как видно на рис. 5, а кривая 1 – это значение параметра регуляризации $\alpha_{opt} = 10^{-51}$. Использование в качестве исходных данных зашумленных исходных данных (в тестовой задаче – случайное зашумление, при реальных измерениях – погрешности усиления, преобразования и пр.) влечет отсутствие механической обусловленности зашумления, Следовательно нас интересует не нахождение глобального минимума функционала «невязки» (которого может не существовать, или же параметр регуляризации может соответствовать не физическим значениям определяемых функций $P(t)$ и $R(t)$), а локального минимума или перегиба, что на рис. 5, б кривая 1 соответствует значениям параметра регуляризации $\alpha \leq 10^{-42}$.

Для дальнейшего выбора параметра регуляризации требуется используя априорную информацию об идентифицируемых нагрузках вводить дополнительные ограничения или функционалы, например, кривые 2 на рис. 5, а и 5, б соответствуют значениям функционала «суммарного воздействия» возмущающей нагрузки и реакции дополнительной опоры:

$$\|\mathbf{P}^\alpha\|_{l_2}^2 + \|\mathbf{R}^\alpha\|_{l_2}^2,$$

так как внешняя возмущающая нагрузка $\overline{P}(t)$ конечна (и ограничена определенной максимальной величиной), а величина реакции между пластиной и дополнительной опорой $\overline{R}(t)$ должна по возможности принимать минимальные значения, но не равные нулю (что соответствовало бы отсутствию реакции).

На рис. 5, а кривая 2 для незашумленных данных видно, что величина функционала «суммарного воздействия» практически не изменяется в диапазоне $\alpha \in [10^{-53}; 10^{-42}]$, что объясняется вычислительной устойчивостью алгоритма при невозмущенной правой части. В случае зашумленных исходных данных функционал «суммарного воздействия» оказывается очень чувствителен к возмущению, это позволяет нам выделить рациональную зону параметра регуляризации в диапазоне $\alpha \in [10^{-44}; 10^{-42}]$ (см. рис. 5, б кривая 2).

Так как решается тестовая обратная задача (известны точные значения искоемых функций $\overline{P}(t)$ и $\overline{R}(t)$), то имеется возможность «оценки» идентификации посредством анализа функционала вида:

$$\|\mathbf{P}^\alpha - \overline{\mathbf{P}}\|_{l_2}^2 + \|\mathbf{R}^\alpha - \overline{\mathbf{R}}\|_{l_2}^2,$$

значения которого представлены на рис. 6, где кривая 1 получена для решения обратной задачи с невозмущенными исходными данными, а кривая 2 – для зашумленных значений прогиба $w_\delta(t)$.

Отметим, что на рис. 5 и 6 значения вдоль оси абсцисс для наглядности отложены на логарифмической шкале, а на рис. 5, а и рис. 6 также на логарифмической шкале отложены и значения вдоль оси ординат (на рис. 5, а в левом нижнем углу показана кривая 2 с осью ординат отложенной на обычной шкале).

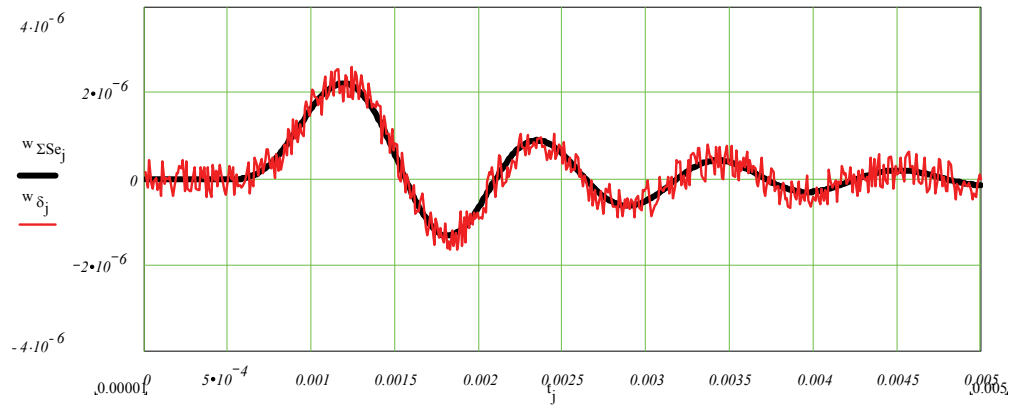


Рисунок 2 – Исходные данные для обратной задачи

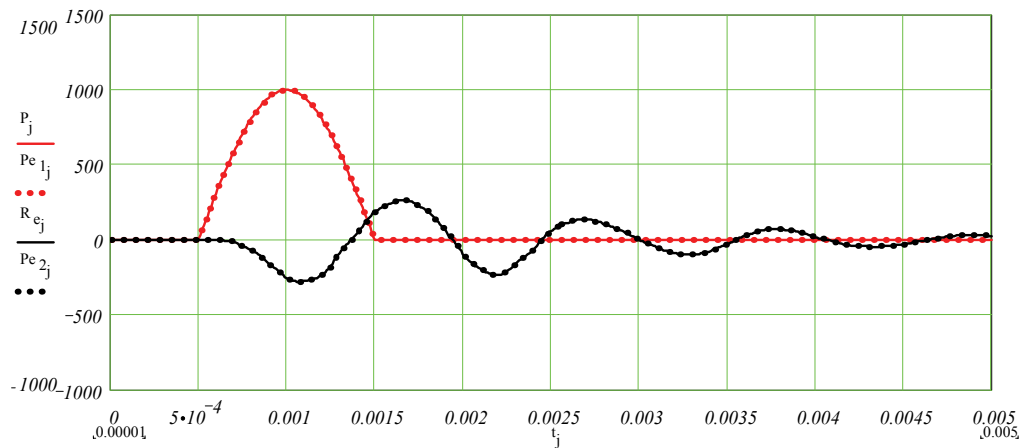


Рисунок 3 – Возмущающая нагрузка и реакция дополнительной вязкоупругой опоры

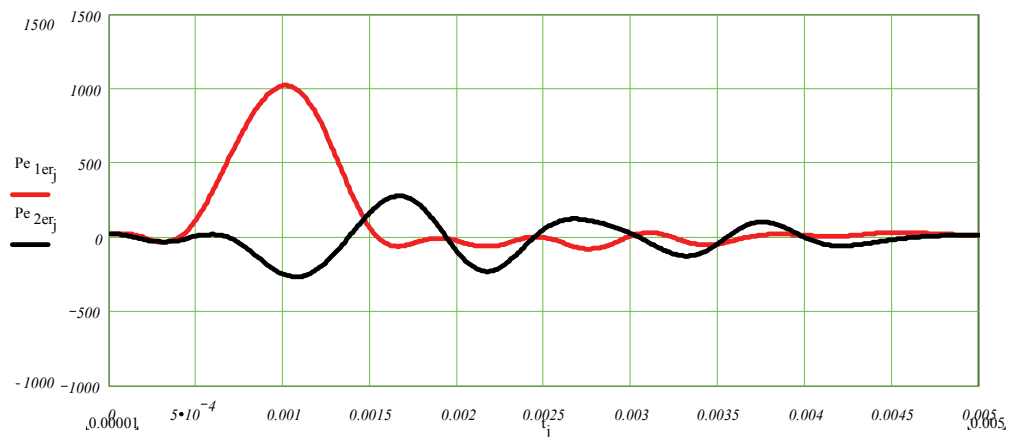


Рисунок 4 – Результаты решения задачи идентификации

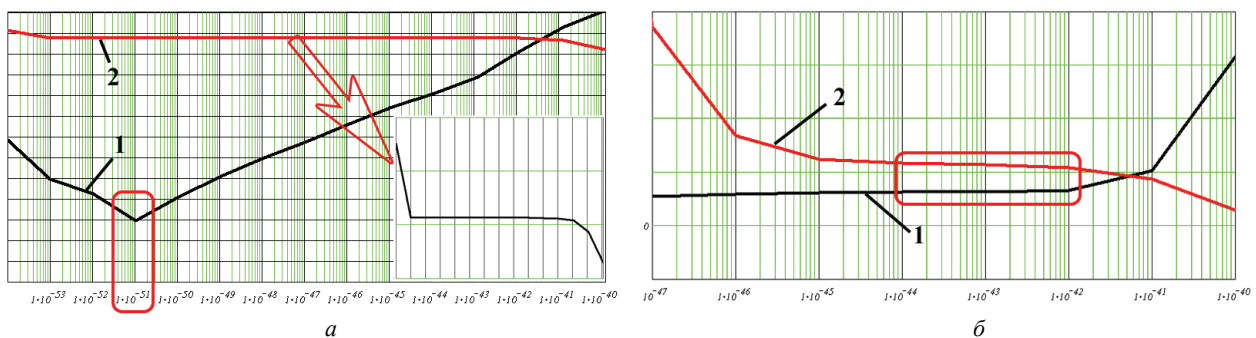


Рисунок 5 – Выбор параметра регуляризации: а – для точно заданной правой части; б – для зашумленной правой части

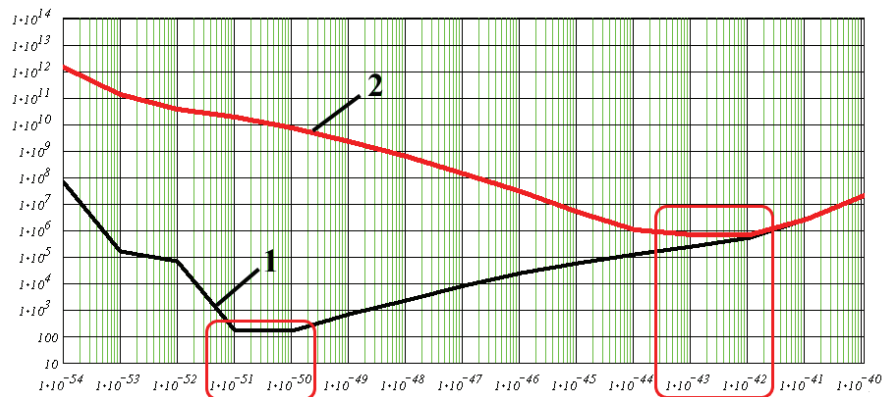


Рисунок 6 – Оценка идентификации

На рис. 6 можно четко выделить оптимальные значения параметра регуляризации для незашумленного случая $\alpha_{opt} \in [10^{-51}; 10^{-50}]$ (значение функционала немного меньше при $\alpha = 10^{-51}$) и для зашумленного – $\alpha_{opt} \in [10^{-43}; 10^{-42}]$ (значение функционала немного меньше при $\alpha = 10^{-43}$). Отметим, что не используя точные значения сил $\overline{P}(t)$ и $\overline{R}(t)$ (в реальной задаче они были бы неизвестны) удалось определить значения параметра регуляризации близкие к оптимальным. Идентифицированные нагрузки, приведенные на рис. 3 и рис. 4 посчитаны как раз при этих оптимальных значениях $\alpha = 10^{-51}$ и $\alpha = 10^{-43}$ соответственно.

Выводы. В работе описана методика решения обратной задачи идентификации неизвестной нагрузки вызывающей нестационарное деформирование пластины с дополнительной опорой, согласно которой получено устойчивое аналитико-численные решения без использования итерационных схем.

Список литературы: 1. Воронай А. В. Обратная задача для шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой опорой при нестационарном нагружении / А. В. Воронай, А. Н. Шутиков // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2013. – № 63 (1036). – С. 29-34. 2. Воронай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с амортизатором / А. В. Воронай // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2011. – № 52. – С. 42-48. 3. Воронай А. В. Нестационарные колебания пластины с дополнительной

вязкоупругой опорой / А. В. Воронай // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2015. – № 55 (1164). – С. 43-46. 4. Тихонов А. Н. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А. Н. Тихонов, А. В. Гончаровский и др. – М.: Наука, 1983. – 200 с. 5. Воронай А. В. Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов конструкции / А. В. Воронай // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. – Х.: НТУ «ХПИ», 2015. – № 55 (1097). – С. 17–22.

Bibliography (transliterated): 1. Voropaj A. V. Obratnaja zadacha dlja sharnirno-opertoj plastiny s dopolnitel'noj uprugoj oporoj pri nestacionarnom nagruženii. A. V. Voropaj, A. N. Shupikov. Vestnik NTU "KhPI". Seriya: Dinamika i prochnost' mashin. Kharkiv: NTU "KhPI", 2013. No 63 (1036). 29-34 Print. 2. Voropaj A. V. Nestacionarnye kolebanija prjamougol'noj plastiny s amortizatorom. A. V. Voropaj. Vestnik NTU "KhPI". Seriya: Dinamika i prochnost' mashin. Kharkiv: NTU "KhPI", 2011. No 52. 42-48 Print. 3. Voropaj A. V. Nestacionarnye kolebanija plastiny s dopolnitel'noj v'язkouprugoj oporoj. A. V. Voropaj. Vestnik NTU "KhPI". Seriya: Dinamika i prochnost' mashin. Kharkiv: NTU "KhPI", 2015. No 55 (1164). 43-46 Print. 4. Tihonov A. N. Reguljarizirujushhie algoritmy i apriornaja informacija. A. N. Tihonov, A. V. Goncharovskij i dr. Moscow: Nauka, 1983. 200 Print. 5. Voropaj A. V. Reguljarizirujushhij algoritm A. N. Tihonova v nekorrektnyh zadachah nestacionarnoj dinamiki uprugih jelementov konstrukcii. Vestnik NTU "KhPI". Seriya: Matematicheskoe modelirovanie v tehnikе i tehnologijah. Kharkiv: NTU "KhPI", 2015. No 55 (1097). 17–22 Print.

Поступила (received) 11.12.2015

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Воронай Алексей Валериевич – кандидат технических наук, доцент, докторант НТУ «ХПИ», тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropaj@mail.ru.

Voropaj Alexey Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Docent, Doctoral Candidate, NTU "KhPI", tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropaj@mail.ru.