

cal and numerical models with respect to ISO/TS 24817 / M.F. Köppl, S. Lauterbach, W. Wagner // Composite Structures. – 2013. – Vol. 95. – P. 173–178. 4. Альтенбах Х. Прогнозирование технологических напряжений в трубопроводе при его ремонте композитной накладкой / Х. Альтенбах, К. Науменко, Г. Львов, В. Сукиасов, А. Подгорный // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 2. – С. 197–222. 5. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 333 с. 6. Tuttle M.E. Structural Analysis of Polymeric Composite Materials / M.E. Tuttle. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2004. – 640 p. 7. Duell J.M. Analysis of a carbon composite overwrap pipeline repair system / J.M. Duell, J.M. Wilson, M.R. Kessler // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2008. – Vol. 85. – P. 782–788. 8. Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1974. – 544 с. 9. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М.: Мир, 1974. – 320 с. 10. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов / В.В. Москвитин. – М.: Наука, 1972. – 328 с. 11. Львов Г.И. Исследование вязкоупругого деформирования составного цилиндра / Г.И. Львов, В.Г. Сукиасов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 119–124.

Bibliography (transliterated): 1. Lukacs J., Nagy G., Torok I., Egert J., Pere B. Experimental and Numerical Investigations of Ex-

ternal Reinforced Damaged Pipelines. Procedia Engineering 2. 2010, vol. 2, pp. 1191–1200. 2. Costa-Mattos H.S., Reis J.M.L., Sampaio R.F., Perrut V.A. An alternative methodology to repair localized corrosion damage in metallic pipelines with epoxy resins. Materials and Design. 2009, vol. 30, pp. 3581–3591. 3. Köppl M.F., Lauterbach S., Wagner W. Composite repair of through-wall defects in pipework. Analytical and numerical models with respect to ISO/TS 24817. Composite Structures. 2013, vol. 95, pp. 173–178. 4. Altenbah H., Naumenko K., Lvov G., Sukiasov V., Podgorniy A. Prognozirovanie tehnologicheskikh napryazheniy v truboprovode pri ego remonte kompozitnoy nakladkoj. Mehanika kompozitnykh materialov. 2015, T. 51, No 2, pp. 197–222. 5. Kristensen R. Vvedenie v mehaniku kompozitov. Moscow: Mir, 1982. 333 p. 6. Tuttle M.E. Structural Analysis of Polymeric Composite Materials. New York: Marcel Dekker, Inc. 2004, 640 p. 7. Duell J.M., Wilson J.M., Kessler M.R. Analysis of a carbon composite overwrap pipeline repair system. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2008, vol. 85, pp. 782–788. 8. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integralnye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie. Moscow: Nauka, 1974, 544 p. 9. Meyz Dj. Teoriya i zadachi mehaniki sploshnykh sred. Moscow: Mir, 1974, 320 p. 10. Moskvitin V.V. Soprotivlenie vyazko-uprugih materialov. Moscow: Nauka, 1972, 328 p. 11. Lvov G.I., Sukiasov V.G. Issledovanie vyazkouprugogo deformirovaniya sostavnogo tsilindra. Visnik NTU "HPI". Seriya: Dinamika i mitsnist mashin. Kharkiv: NTU "HPI", 2013, No 58 (1031), pp. 119–124.

Поступила (received) 05.07.2016

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Сукиасов Владимир Георгиевич – кандидат технічних наук, доцент, доцент, кафедра динаміки і прочності машин, Національний технічний університет «ХПІ»; тел.: (057) 7076879; e-mail: dpm_161@mail.ru.

Sukiasov Vladimir Georgievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, National Technical University "KhPI"; tel.: (057) 7076879; e-mail: dpm_161@mail.ru.

УДК 539.3

С.Н.СКЛЕПУС, А.З. ГАЛИШИН

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ВРЕМЕНИ ДО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

*90-летію академіка НАН України
Ю.Н. Шевченко посвящается*

Рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния, повреждаемости и длительной прочности полых цилиндров и цилиндрических оболочек, работающих при ползучести. Решения для оболочек различной толщины, основанные на гипотезах прямолинейного элемента, сопоставляются с пространственными решениями для осесимметрично нагруженных полых цилиндров. Исследовано влияние соотношения геометрических размеров на точность оболочечного решения. Разработан способ прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке на основе данных о времени до разрушения полученных по оболочечной теории, и наоборот.

Ключевые слова: ползучесть, повреждаемость, время до разрушения, прогнозирование, полый цилиндр, цилиндрическая оболочка.

1. Введение. В современной технике находят широкое применение элементы конструкций в виде тел вращения, работающие в условиях ползучести. С целью снижения компьютерных затрат для таких объектов зачастую принимается расчетная схема в виде

оболочки вращения [1-8 и др.]. При этом привлекаются как классическая теория, так и различные уточненные теории оболочек, учитывающие деформации поперечного сдвига. Погрешность решения, полученного в рамках той или иной теории оболочек, зависит от

соотношения геометрических размеров, граничных условий, условий нагружения, механических характеристик материала и пр. Одновременно изучить влияние всех факторов является сложной задачей. Одним из возможных путей исследования погрешностей приближенных теорий оболочек является сопоставление полученных на их основе решений с результатами решения трехмерных задач [9]. Анализ применимости классической и уточненных теорий в задачах упругого деформирования оболочек дан в работах [9, 10 и др.]. В то же время, исследованию применимости оболочечных моделей в задачах ползучести, повреждаемости и длительной прочности цилиндрических оболочек посвящены единичные работы. Так, в статье [11], были исследованы ползучесть и повреждаемость вследствие ползучести полого цилиндра в рамках осесимметричной пространственной постановки и на базе гипотез Кирхгофа-Лява. В этой работе учитывалось различное поведение сплава АК4-1Т при растяжении и сжатии в условиях ползучести. В отличие от [11], в настоящей статье используется уточненная модель, основанная на гипотезах прямолинейного элемента. Свойства ползучести считаются независимыми от вида напряженного состояния. Результаты решения задачи ползучести и повреждаемости для оболочек различной толщины сопоставляются с результатами пространственного решения для осесимметрично нагруженных полых цилиндров.

В литературе также отсутствуют работы, посвященные прогнозированию времени до разрушения полых цилиндров вследствие ползучести.

Цели работы:

- сопоставить результаты решения задачи повреждаемости вследствие ползучести полых цилиндров в рамках пространственной и оболочечной постановок;
- разработать способ прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке на основе данных о времени до разрушения, полученных по оболочечной теории, и наоборот.

2. Постановка и метод решения начально-краевой задачи ползучести цилиндра в рамках пространственной модели. Рассмотрим круговой осесимметрично нагруженный полый изотропный цилиндр в цилиндрической системе координат $O\varphi z$. Ось Oz совпадает с осью вращения. Полагаем, что температура цилиндра $T(r, z, t)$ неизменна во времени t и выполняется условие $T(r, z, 0) = T_0$, где T_0 – начальная температура (температура естественного, ненапряженного и недеформированного состояния).

Задачу будем решать в геометрически линейной, квазистатической постановке и в предположении, что в процессе деформирования пластические деформации не возникают. Принимаем, что компоненты скоростей упругих деформаций $\dot{\varepsilon}_{kl}^e$ и скоростей необратимых деформаций ползучести \dot{p}_{kl} аддитивны:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{p}_{kl}, \quad (k, l = \overline{1,3}).$$

Для описания ползучести и повреждаемости воспользуемся уравнениями работы [12], которые представим в виде:

$$\dot{p}_{kl} = \frac{3}{2} A \frac{\sigma_i^m}{(1-\psi)^n} s_{kl}; \quad \dot{\psi} = B \frac{\sigma_i^k}{(1-\psi)^q}. \quad (1)$$

Здесь A, B, m, n, k, q – константы материала; σ_i – интенсивность напряжений; s_{kl} – компоненты девиатора напряжений; $\psi = \psi(r, z, t)$ – скалярный параметр повреждаемости: $\psi(r, z, 0) = 0, \psi(r, z, t_*) = 1$, где t_* – время до разрушения.

В цилиндрической системе координат имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{rr}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rr}(r, z, t); \\ \dot{\varepsilon}_{zz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{zz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{zz}(r, z, t); \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^e(r, z, t) + \dot{p}_{\varphi\varphi}(r, z, t); \\ \dot{\varepsilon}_{rz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{rz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rz}(r, z, t). \end{aligned}$$

Здесь и далее точка над символами означает полную производную по времени.

Основные неизвестные задачи ползучести и повреждаемости вследствие ползучести в произвольной точке цилиндра, в том числе в точках пространственной дискретизации краевой задачи, можно найти из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [7]

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= \dot{u}_r; \quad \frac{du_z}{dt} = \dot{u}_z; \\ \frac{d\varepsilon_{rr}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{r,r}; \quad \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{z,z}; \quad \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt} = \frac{\dot{u}_r}{r}; \\ \frac{d\gamma_{rz}}{dt} &= 2 \frac{d\varepsilon_{rz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{r,z} + \dot{\varepsilon}_{z,r}; \\ \frac{d\sigma_{rr}}{dt} &= \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr}) + \lambda(\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{zz} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dt} &= \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{zz}) + \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} &= \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{zz}); \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} &= G(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}); \\ \frac{dp_{rr}}{dt} &= \dot{p}_{rr}; \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = \dot{p}_{zz}; \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} &= \dot{p}_{\varphi\varphi}; \quad \frac{dp_{rz}}{dt} = \dot{p}_{rz}; \quad \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь $u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)$ – перемещения вдоль осей Or и Oz соответственно; $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rz}$ – компоненты тензора полных деформаций; $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rz}$ – компоненты тензора напряжений; $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$,

$\lambda_1 = \lambda + 2G, G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, где E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала; $p_{rr}, p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{rz}$ – компоненты тензора деформаций ползучести.

В начальный момент времени деформации ползучести и параметр повреждаемости равны нулю. Начальные условия для остальных неизвестных функций следуют из решения задачи упругого деформирования цилиндра.

Решение начальной задачи для системы уравнений (2) будем проводить методом Рунге-Кутты-Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага по времени. Правые части уравнений, в моменты времени, соответствующие схеме РКМ, будем находить из решения вариационной задачи для функционала в форме Лагранжа [7]

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{\mathbf{U}}) = & 0,5 \iint_{\Omega} \left[\lambda_1 \left(\dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + \frac{\dot{u}_r^2}{r^2} \right) + G(\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + \right. \\ & \left. + 2\lambda \left(\dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + \frac{\dot{u}_r(\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})}{r} \right) \right] r dr dz - \\ & - \iint_{\Omega} \left[\dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^c + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^c + \frac{\dot{u}_r \dot{N}_\theta^c}{r} + \dot{N}_{rz}^c (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \\ & - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n \dot{u}_n + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau) d\delta\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\dot{\mathbf{U}} = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$ – вектор скоростей перемещений; Ω – меридианное сечение цилиндра; $\partial\Omega_p$ – часть контура $\partial\Omega$, где приложены внешние силы, \dot{P}_n, \dot{P}_τ – скорости нормальной и касательной составляющих внешних сил, $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ – внешняя нормаль и касательная к контуру $\partial\Omega$; $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$; n_r, n_z – направляющие косинусы нормали \mathbf{n} . Скорости «фиктивных» сил, обусловленных деформациями ползучести, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \dot{N}_r^c &= [\lambda_1 \dot{p}_{rr} + \lambda(\dot{p}_{zz} + \dot{p}_{\varphi\varphi})]; \quad \dot{N}_z^c = [\lambda_1 \dot{p}_{zz} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\varphi\varphi})]; \\ \dot{N}_\theta^c &= [\lambda_1 \dot{p}_{\varphi\varphi} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{zz})]; \quad \dot{N}_{rz}^c = 2G\dot{p}_{rz}. \end{aligned}$$

Скорости деформаций ползучести в функционале (3) считаются известными и не варьируются.

Вариационные задачи для функционала (3) решаются методом Ритца в сочетании с методом R-функций [13].

3. Постановка и метод решения задачи на осевом оболочечной теории. Рассматривая осесимметрично нагруженный полый цилиндр в рамках уточненной теории оболочек, предполагаем, что выполняются гипотезы прямолинейного элемента [9]. В соответствии с данными гипотезами связь между осевым u_z и нормальным u_ζ перемещениями произвольной точки оболочки с соответствующими перемещениями точки срединной поверхности u, w имеет вид

$$u_z = u + \zeta \psi_z; \quad u_\zeta = w; \quad \psi_z = -w' + \gamma_z, \quad (4)$$

где ζ – координата, которая отсчитывается по нормали к срединной поверхности с радиусом $r = R$; ψ_z, γ_z – полный угол прямолинейного элемента и угол, обусловленный поперечным сдвигом, соответственно; штрих означает производную по координате z . Используя (4) и соотношения Коши, связь между компонентами тензора деформаций в произвольной точке оболочки $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{z\zeta}$ компонентами деформации срединной поверхности $\varepsilon_z, \varepsilon_\varphi$, параметром изменения ее кривизны κ_z и углом сдвига γ_z представим в виде

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z + \zeta \kappa_z; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_\varphi / a_\varphi; \quad 2\varepsilon_{z\zeta} = \gamma_z;$$

$$\varepsilon_z = u'; \quad \varepsilon_\varphi = w/R; \quad \kappa_z = \psi_z'; \quad a_\varphi = 1 + \zeta/R. \quad (5)$$

Компоненты напряжений определяются равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= B_{11} \varepsilon_{zz} + B_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}^a; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = B_{12} \varepsilon_{zz} + B_{11} \varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}^a; \\ \sigma_{z\zeta} &= B_{33} \varepsilon_{z\zeta} - \sigma_{z\zeta}^a, \end{aligned} \quad (6)$$

где B_{ij} – жесткостные коэффициенты

$$B_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad B_{12} = \nu B_{11}; \quad B_{33} = 2G.$$

Величины с индексом «а» означают дополнительные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^a &= B_{11}(p_{zz} + \nu p_{\varphi\varphi}); \quad \sigma_{\varphi\varphi}^a = B_{11}(p_{\varphi\varphi} + \nu p_{zz}); \\ \sigma_{z\zeta}^a &= B_{33} p_{z\zeta}, \end{aligned}$$

где $p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{z\zeta}$ – компоненты деформаций ползучести, которые зависят от напряжений, констант ползучести и параметра повреждаемости материала и определяются путем численного интегрирования физических уравнений. Как и в случае пространственной задачи, это интегрирование осуществляется методом РКМ.

Вводя в рассмотрение интегральные характеристики напряженного состояния – радиальное N_r , осевое N_z усилия и осевой изгибающий момент M_z , и, используя уравнения равновесия [9], кинематические (5) и физические (6) уравнения, решение задачи сведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка вида

$$\mathbf{Y}' = P(z)\mathbf{Y} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}, \quad (7)$$

где $P(z)$ – матрица системы, зависящая от упругих констант материала; \mathbf{f} – вектор свободных членов, который зависит еще и от деформаций ползучести, и параметра повреждаемости. Решение системы (7) должно удовлетворять граничным условиям на торцах цилиндра. Ненулевые элементы матрицы $P(z)$ и вектора \mathbf{f} определяются равенствами

$$\begin{aligned} p_{12} &= -p_{54} = -\mu_1/R; \quad p_{13} = -p_{64} = \mu_2/R; \\ p_{14} &= (C_{02} + \mu_1 C_{01} - \mu_2 C_{11})/R^2; \\ p_{31} &= -p_{46} = 1; \quad p_{41} = 1/C_{33}; \quad p_{52} = C_{20}/\delta; \\ p_{53} &= p_{62} = -C_{10}/\delta; \quad p_{63} = C_{00}/\delta; \\ f_1 &= -(\mu_1 N_z^a + N_\varphi^a - \mu_2 M_z^a)/R - q_\zeta; \\ f_2 &= -q_z; \quad f_3 = -m_z; \quad f_4 = Q_z^a/C_{33}; \\ f_5 &= (C_{20} N_z^a - C_{10} M_z^a)/\delta; \\ f_6 &= -(C_{10} N_z^a - C_{00} M_z^a)/\delta, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mu_1 = (C_{10} C_{11} - C_{01} C_{20})/\delta$; $\mu_2 = (C_{00} C_{11} - C_{01} C_{10})/\delta$;
 $\delta = C_{00} C_{20} - C_{10}^2$.

Входящие в (7) величины q_z, q_ζ, m_z означают приведенные к срединной поверхности распределенные поверхностные нагрузки и момент [9]. Интегральные жесткостные характеристики C_{pq}, C_{33} а также дополнительные усилия $N_z^a, N_\varphi^a, Q_z^a$ и момент M_z^a определяются равенствами

$$\begin{aligned} C_{pq} &= B_{11} F \{ b_q \zeta^p \} \quad (p, q = 0, 1, 2); \quad C_{33} = 2Gh; \\ b_0 &= a_\varphi; \quad b_1 = \nu; \quad b_2 = a_\varphi^{-1}; \quad F\{\dots\} = \int_{-h/2}^{h/2} (\dots) d\zeta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_z^a &= F\{\sigma_{zz}^a a_\varphi\}; & N_\varphi^a &= F\{\sigma_{\varphi\varphi}^a\}; \\ Q_z^a &= F\{\sigma_{z\zeta}^a a_\varphi\}; & M_z^a &= F\{\sigma_{zz}^a a_\varphi \zeta\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Входящие в (9) интегралы вычисляются численно на основании процедуры, сочетающей методы Симпсона и Ньютона. На каждом шаге по времени краевая задача (7) решается методом Рунге-Кутты с дискретной ортогонализацией по С. К. Годунову.

Здесь необходимо отметить следующее:

1. Приведенные выше уравнения предназначены для описания деформирования в условиях ползучести цилиндрических оболочек с учетом повреждаемости и при отсутствии тепловых воздействий. В уравнениях учитываются величины ζ/R . Удержание этих величин может оказаться целесообразным для оболочек средней толщины и бесполезным для тонких оболочек.

2. Независимо от того учитываются или не учитываются величины ζ/R , разрешающие уравнения, основанные на гипотезах Кирхгофа – Лява, могут быть получены с помощью (8), если в них положить $1/C_{33} = 0$, а в равенствах (4), (5) положить $\gamma_z = 0$ [4].

3. В работе [14] показано, что при наличии температурных деформаций учет величин ζ/R может привести к появлению значительных «фиктивных» напряжений. Поэтому в температурных задачах этими величинами следует пренебрегать по сравнению с единицей.

4. Численные результаты. В первом примере проведено сопоставление результатов решения задачи ползучести и повреждаемости для полого цилиндра и цилиндрической оболочки. В последующих примерах будет описана методика прогнозирования времени до разрушения при ползучести для таких объектов.

Пример 1. Рассмотрим ползучесть цилиндра, на наружной поверхности которого приложено давление, изменяющееся по закону

$$P_{out} = P(z) = \frac{1}{2} P_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{l}\right) \right]. \quad (10)$$

Геометрические размеры: длина $l = 0,1$ м; радиус срединной поверхности $R = 0,1$ м; толщина $h = 0,01$ м. Обозначим

$$\xi = h/R. \quad (11)$$

В данном случае $\xi = 1/10$. Для величины P_0 , определяющей максимальное значение нагрузки, принято, что $P_0 = 18,7$ МПа. Упругие константы материала: $E = 60$ ГПа, $\nu = 0,35$. Константы материала в уравнениях

$$(1): \quad A = 5,5 \cdot 10^{-23} \text{ МПа}^{-(m+1)} \text{ ч}^{-1}, \\ B = 5,5 \cdot 10^{-24} \text{ МПа}^{-k} \text{ ч}^{-1}, \quad m = 7, \quad k = 9, \quad n = q = 3.$$

Граничные условия для краевой задачи в рамках пространственной постановки задавались в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u}_r &= 0, \quad \dot{\sigma}_z = 0 \quad \text{для } z = \pm \frac{l}{2}; \\ \dot{\sigma}_r &= \dot{\sigma}_{zr} = 0 \quad \text{для } r = r_{inn} = R - \frac{h}{2}; \\ \dot{\sigma}_r &= -\dot{P}_{out} = 0, \quad \dot{\sigma}_{zr} = 0 \quad \text{для } r = r_{out} = R_0 + \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

Можно показать, что структура решения, удовле-

творяющая кинематическим граничным условиям для скоростей перемещений, имеет вид:

$$\dot{u}_r = \omega \Phi_1; \quad \dot{u}_z = z \Phi_2,$$

где Φ_1, Φ_2 – неопределенные компоненты структуры

решения; $\omega = \frac{1}{l} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right) \geq 0$ – полоса Ω , заключенная

между линиями $z = -l/2$ и $z = l/2$ ($\omega = 0$, $\omega_{,n} = -1$ на границе $\partial\Omega$, $\omega > 0$ внутри полосы). При численной реализации, неопределенные компоненты Φ_1, Φ_2 представлялись в виде конечных рядов вида:

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)}(t) f_n^{(1)}(r, z);$$

$$\Phi_2(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)}(t) f_n^{(2)}(r, z),$$

где $C_n^{(1)}(t), C_n^{(2)}(t)$ – неопределенные коэффициенты, которые на каждом временном шаге находятся методом Рунге; t – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета; $\{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\}$ – система линейно независимых базисных функций. Здесь в качестве $\{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\}$ использовались бикубические сплайны Шенберга. Системы сплайнов строились на регулярной сетке $K_r \times K_z$, где K_r, K_z – количество отрезков дискретизации вдоль осей Or и Oz , соответственно.

Решение задачи ползучести цилиндра, сформулированной в рамках пространственной постановки, было получено при следующих параметрах пространственной и временной дискретизации: $K_r = 10, K_z = 20$; начальный шаг по времени $\Delta_0 t = 10^{-3}$ ч; заданная погрешность вычислений в методе РКМ $\varepsilon = 10^{-4}$. При численных расчетах критерием окончания процесса решения и нахождения времени до разрушения было выполнение в какой-либо точке пространственной дискретизации условия $\psi \geq 0,9$.

При решении задачи в рамках теории оболочек рассматривалась правая симметричная половина оболочки $0 \leq z \leq l/2$. На меридианное сечение оболочки наносилась равномерная сетка, состоящая из 101 точки по z и 11 точек по толщине. Другие параметры дискретизации принимали значения: $\Delta_0 t = 10^{-5}$ ч, $\varepsilon = 10^{-6}$.

Граничные условия в рамках теории оболочек формулировались в виде

$$N_r = u_z = \psi_z = 0, \quad \text{при } z = 0;$$

$$N_z = M_z = u_r = 0, \quad \text{при } z = l/2.$$

Нагрузка на срединной поверхности оболочки определялась по формуле

$$q_\zeta = - \left(1 + \frac{h}{2R} \right) P(z).$$

Расчеты показали, что в пространственном и оболочечном решениях разрушение начинается в центре на внутренней поверхности цилиндра. Время до разрушения в пространственном решении $t_{3D} = 4266$ ч, а в оболочечном – $t_{SH} = 3305$ ч (символ «*» для простоты опущен). То есть отличие в определении време-

ни до разрушения составляет 22,5 %. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 1-5. На рис. 1 показаны графики изменения вдоль оси цилиндра радиальных перемещений срединной поверхности в различные моменты времени. Кривые 1 соответствуют моменту времени $t = 0$; 2 – $t = 2000$ ч; 3 – $t = t_*$. Здесь и далее линии с маркерами соответствуют результатам пространственного решения. На рис. 2 для тех же моментов времени показаны графики изменения параметра повреждаемости на внутренней поверхности

цилиндра, где начинается разрушение.

На рис. 3, а показаны аналогичные графики для окружных $\sigma_{\phi\phi}$, а на рис. 3, б осевых σ_{zz} напряжений. Такие же графики для окружных $p_{\phi\phi}$ и осевых p_{zz} деформаций ползучести приведены на рис. 4.

Рис. 5 иллюстрирует изменение во времени параметра повреждаемости ψ (кривые а) и окружных напряжений $\sigma_{\phi\phi}$ (кривые б) в центре на внутренней поверхности цилиндра.

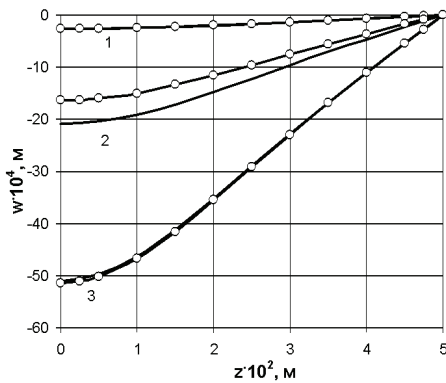


Рисунок 1 – Радиальные перемещения точек срединной поверхности цилиндра в различные моменты времени

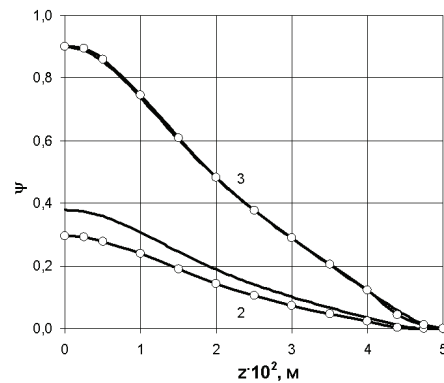


Рисунок 2 – Параметр повреждаемости на внутренней поверхности цилиндра в различные моменты времени

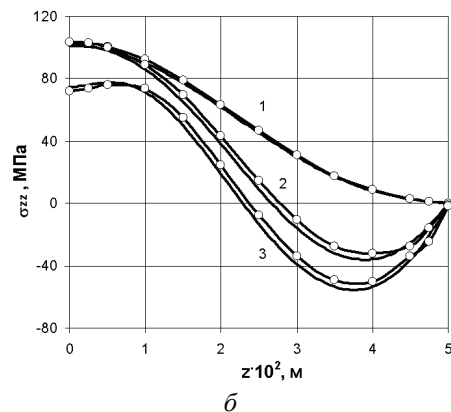
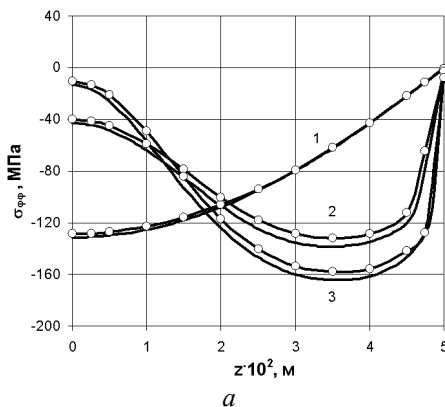


Рисунок 3 – Окружные (а) и осевые (б) напряжения на внутренней поверхности цилиндра в различные моменты времени

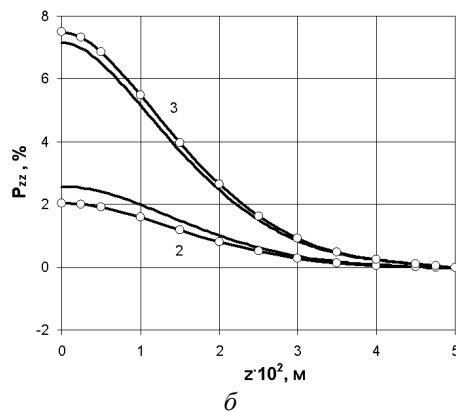
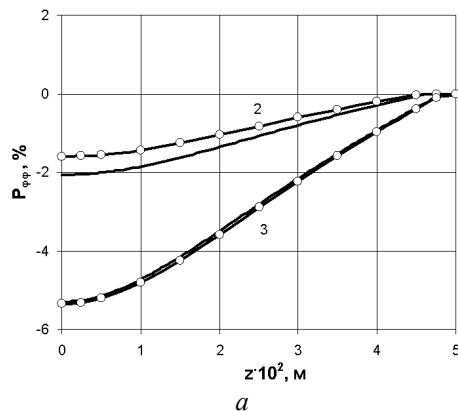


Рисунок 4 – Окружные (а) и осевые (б) деформации ползучести на внутренней поверхности цилиндра в различные моменты времени

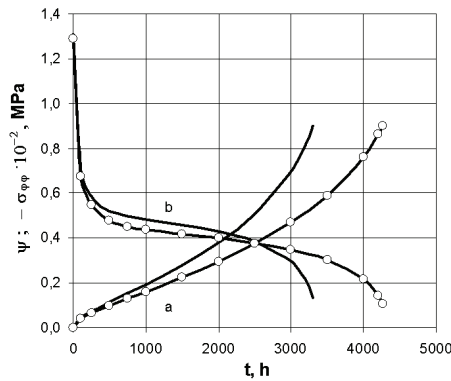


Рисунок 5 – Повреждаемость и окружные напряжения в центре на внутренней поверхности цилиндра

Из рисунков видно, что в начальный момент времени (в упругом решении) получено практически полное совпадение результатов для перемещений и напряжений. С ростом времени расхождение увеличивается.

Например, при $t = 2000$ ч, наблюдаются заметные (до 28 %) расхождения в перемещениях, деформациях ползучести и для параметра повреждаемости. В то же время напряжения в области максимальных значений отличаются лишь на 5%. В моменты времени, соответствующие завершению скрытого разрушения, результаты согласуются хорошо. В целом можно сделать вывод о достаточно хорошем совпадении результатов для характеристик напряженно-деформирован-

ного состояния, полученных с помощью пространственной и оболочечной теорий.

Следующие примеры посвящены разработке способа прогнозирования времени до разрушения полых цилиндров на основе данных о времени до разрушения, полученных по оболочечной теории, и наоборот.

Пример 2. Рассмотрим цилиндр из предыдущего примера, при тех же граничных условиях, свойствах материала и геометрических размерах, за исключением толщины. Значения ξ будем варьировать в пределах от 1/50 до 1/8. Величины P_0 (табл. 1) выбирались так, чтобы время до разрушения во всех вариантах расчета было близко. Как и ранее разрушение для всех значений ξ начинается в центре цилиндра, на внутренней поверхности. В табл. 1 приведены значения t_{3D} времени до разрушения, полученные в расчетах по пространственной модели, и значения t_{SH} времени до разрушения, полученные на основе оболочечной модели. В табл. 1 также помещены значения относительного отклонения для времени до разрушения

$$\Delta = \frac{t_{3D} - t_{SH}}{t_{3D}} \tag{12}$$

Видно, что во всех рассмотренных случаях $t_{3D} > t_{SH}$, поэтому отклонения (12) всюду положительны. Из таблицы также видно, что с ростом ξ относительное отклонение Δ возрастает.

Таблица 1 – Значения t_{3D} времени до разрушения, полученные в расчетах по пространственной модели, и значения t_{SH} времени до разрушения

ξ	1/50	1/25	1/20	1/16	1/10	1/8
P_0 , МПа	3,17	6,95	8,85	11,3	18,7	23,8
t_{SH} , ч	4096	3750	3806	3623	3305	3108
t_{3D} , ч	4245	4111	4291	4216	4266	4291
Δ	0,035	0,088	0,113	0,141	0,225	0,276
t_{SH}^{pr} , ч	4056	3744	3813	3628	3315	3095
t_{3D}^{pr} , ч	4287	4117	4284	4210	4254	4309

Анализируя зависимость приведенных отклонений Δ от величины ξ , приходим к выводу, что она близка к линейной и ее можно аппроксимировать зависимостью

$$\Delta(\xi) = k\xi \tag{13}$$

Угловой коэффициент k в (13) определялся методом наименьших квадратов и оказался равным $k = 2,23$.

При этом использовались данные для $\xi = 1/50; 1/25; 1/16; 1/10$.

Приняв для параметра Δ аппроксимацию (13), получим формулу для прогнозирования времени до разрушения по оболочечной теории на основе пространственного решения

$$t_{SH}^{pr} = t_{3D}(1 - k\xi) \tag{15}$$

Из (12), (13) также следует формула, позволяющая базе оболочечного решения прогнозировать время до разрушения в пространственной постановке

$$t_{3D}^{pr} = \frac{t_{SH}}{1 - k\xi} \tag{16}$$

Эта формула привлекательна тем, что для прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке необходимо знать лишь коэффициент k и значение времени до разрушения в оболочечной постановке. Учитывая, что затраченное время на получение пространственного решения может на несколько порядков превышать соответствующее время в оболочечной постановке, получаем несомненную выгоду.

На основе найденного коэффициента k (14) по формулам (15), (16) вычислены прогнозируемые значения времени до разрушения в оболочечной t_{SH}^{pr} и пространственной t_{3D}^{pr} постановках (см. табл. 1). Можно убедиться, что максимальное отличие расчетных и прогнозируемых значений составляет 1,3%. Следует отметить, что при определении коэффициента k не использовались данные для $\xi = 1/20$ и $1/8$, однако полученные расчетные и исходные значения также

хорошо согласуются между собой.

Очевидно, что для построения прямой, исходящей из начала координат на плоскости $\xi O\Delta$ достаточно знать одну точку. Пусть эта точка соответствует значению $\xi = 1/10$. Тогда угловой коэффициент будет равен $k_1 = 2,25$, что незначительно отличается от значения (14). Можно легко убедиться, что прогнозируемые в этом случае значения времени до разрушения будут мало отличаться от приведенных в табл. 1.

Пример 3. Рассмотрим цилиндр, нагруженный постоянным внутренним давлением

$$P_{inn} = \frac{PR}{r_{inn}} = P \left(1 - \frac{h}{2R} \right)^{-1},$$

где P – давление, отнесенное к срединной поверхности (табл. 2). Остальные условия совпадают с условиями предыдущего примера. В табл. 2 представлены расчетные t_{SH} , t_{3D} значения времени до разрушения и значения

отклонения Δ . Разрушение для всех значений ξ начинается в центре цилиндра, на внутренней поверхности. В отличие от примера 2 здесь все отклонения Δ (12) отрицательны. Зависимость $\Delta(\xi)$ также можно аппроксимировать выражением вида (13). При этом коэффициент аппроксимации отрицателен и равен

$$k = -2,21.$$

Прогнозируемые значения времени до разрушения t_{SH}^{pr} , t_{3D}^{pr} , найденные по формулам (15), (16), также помещены в табл. 2. Максимальное отклонение расчетных и прогнозируемых данных наблюдается при $\xi = 1/8$ и не превышает 1,3%. Линейная зависимость, построенная по одной точке (для $\xi = 1/10$) с коэффициентом $k_1 = 2,12$, дает максимальную погрешность 1,6%.

Очевидно, что для цилиндров, рассмотренных во 2-м и 3-м примерах, можно принять единый коэффициент с модулем, равным среднему арифметическому модулей коэффициентов k при внутреннем и внешнем давлении, то есть $|k| = 2,22$.

Таблица 2 – Расчетные t_{SH} , t_{3D} значения времени до разрушения и значения отклонения Δ

ξ	1/50	1/25	1/20	1/16	1/10	1/8
P , МПа	2,55	5,1	6,4	8,0	13,0	16,5
t_{SH} , ч	4594	4707	4688	4892	5200	5422
t_{3D} , ч	4360	4281	4172	4277	4291	4304
Δ	-0,054	-0,099	-0,124	-0,144	-0,212	-0,260
t_{SH}^{pr} , ч	4553	4659	4633	4868	5239	5493
t_{3D}^{pr} , ч	4400	4325	4222	4298	4259	4248

Пример 4. Для проверки работоспособности предложенной методики прогнозирования времени до разрушения рассмотрим цилиндр из примера 1, но вдвое большей длины, то есть с $l = 0,2$ м. В результате расчетов установлено, что $t_{3D} = 957$ ч и $t_{SH} = 768$ ч.

Учитывая, что вид нагрузки не изменился и, используя значение коэффициента k (14) найдем соответствующие прогнозируемые времена до разрушения: $t_{3D}^{pr} = 988$ ч и $t_{SH}^{pr} = 744$ ч. То есть расхождения с расчетными значениями составляют около 3,2%, что подтверждает эффективность предложенного подхода.

Пример 5. Исследуем применимость предложенного подхода для прогнозирования времени до разрушения толстостенных цилиндрических оболочек и цилиндров. Заметим, что для оболочек с $\xi > 1/8$ отклонение расчетного времени до разрушения t_{SH} от t_{3D} превышает 30%. В этих случаях, для получения более достоверного решения, нужно использовать более сложные теории оболочек, учитывающие, например, поперечное обжатие. Отметим также, что для толстостенных оболочек зависимость отклонения $\Delta(\xi)$, полученная на основе теории оболочек средней толщины, может сильно отклоняться от линейного закона.

Рассмотрим цилиндр под действием наружного давления, изменяющегося по закону (10) и цилиндр под действием постоянного внутреннего давления. Для обоих случаев отношение $h/R = 1/5$. Граничные условия и свойства материала – те же что и в приме-

рах 2, 3. Для наружного и внутреннего давлений примем: $P_0 = 40,4$ МПа, $P = 28,2$ МПа.

Для цилиндра под действием наружного давления получены следующие расчетные значения времени до разрушения: $t_{3D} = 4307$ ч, $t_{SH} = 2471$ ч. Используя формулы (15), (16), где $k = 2,22$, для прогнозируемых значений времени до разрушения получим: $t_{3D}^{pr} = 4444$ ч и $t_{SH}^{pr} = 2395$ ч. Отличие прогнозируемого и расчетного времени до разрушения в пространственном случае составляет 3,2%, а по теории оболочек – 3,1%.

Для цилиндра под внутренним давлением получено: $t_{3D} = 4203$ ч, $t_{SH} = 5562$ ч. Используя формулы (15), (16), где $k = -2,22$, для прогнозируемых значений времени до разрушения получим $t_{3D}^{pr} = 3852$ ч и $t_{SH}^{pr} = 6069$ ч. Соответствующие погрешности составляют 8,4% и 9,1%.

Таким образом, получено удовлетворительное совпадение расчетных и прогнозируемых значений времени до разрушения. Если принять во внимание большой разброс экспериментальных данных на третьей стадии ползучести, где значения времени до разрушения могут отличаться в 2 раза, то можно сделать вывод о применимости предложенного подхода для прогнозирования времени до разрушения толстостенных оболочек и цилиндров.

Предложенный способ прогнозирования времени

до разрушения, основанный на линейной аппроксимации вида (13), применим в широком диапазоне изменения относительной толщины цилиндра и для нахождения коэффициента k требует всего двух расчетов при каком-то фиксированном значении ζ . В этом заключается его несомненное достоинство. В других случаях (например, для других граничных условий или вида нагрузки) необходимо проверять приемлемость данной аппроксимации. Определение рамок применимости линейной или какой-либо другой аппроксимации требует дополнительных исследований.

5. Выводы. Разработан способ прогнозирования времени до разрушения в условиях ползучести полых цилиндров и цилиндрических оболочек, находящихся под действием поперечной нагрузки. Предложенный подход основан на анализе отклонения оболочечного решения от пространственного. Он позволяет достаточно точно прогнозировать время до разрушения в пространственной постановке, используя результаты оболочечного решения, и наоборот – прогнозировать время до разрушения в оболочечной постановке на основе пространственного решения.

Список литературы: 1. Бурлаков А.В. Длительная прочность оболочек / А.В. Бурлаков, Г.И. Львов Г.И., О.К. Морачковский. – Х.: Вища шк., 1981. – 104 с. 2. Локощенко А.М. Долговечность цилиндрических оболочек при чистом изгибе в условиях ползучести / А.М. Локощенко, Н.Е. Печенина, С.А. Шестериков // Прикл. математика и механика. – 1989. – 25, № 12. – С. 73–78. 3. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Ю.Н. Шевченко, М.Е. Бабешко, Р.Г. Терехов. – К.: Наук. думка, 1992. – 329 с. 4. Galishin A.Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of laminar orthotropic shells of revolution with a branched meridian / A.Z. Galishin // Int. Appl. Mech. – 1993. – Vol. 29, No. 1. – P. 61-69. 5. Altenbach H. Zum Kriechen dünner Rotationschalen unter Einbeziehung geometrischer Nichtlinearität sowie der Asymmetrie der Werkstoffeigenschaften / H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, A. Sychov // Forschung im Ingenieurwesen. – 1996. – 62, № 3. – S. 47-57. 6. Galishin A. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Numerical modeling / A. Galishin, A. Zolochevskiy, A. Kühhorn, M. Springmann // Techn. Mech. – 2009. – Vol. 29, №. 1. – P. 48-59. 7. Золочевский А.А. Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А.А. Золочевский, А.Н. Склепус, С.Н. Склепус. – Х.: «Бизнес Инвестор Групп», 2011. – 720 с. 8. Shevchenko Yu.N. Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material / Yu.N. Shevchenko, A.Z. Galishin, M.E. Babeshko // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, № 6. – P. 607-613. 9. Григоренко Я.М. Теория оболочек переменной жесткости / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – К.: Наук.

думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 4). 10. Сало В.А. Краевые задачи статки оболочек с отверстиями / В.А. Сало. – Х.: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с. 11. Zolochevsky A. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions / A. Zolochevsky, S. Sklepus, A. Galishin, A. Kühhorn, M. Kober // Techn. Mech. – 2014. – Vol. 34, № 2. – P. 104-113. 12. Dunne F.P.E. Representation of uniaxial creep curves using continuum damage mechanics / F.P.E. Dunne, A.M. Othman, F.R. Hall, D.R. Hayhurst // Int. J. Mech. Sci. – 1990. – 32, № 11. – P. 945-957. 13. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 14. Galishin A.Z. Calculating the thermoelastic stress state of medium-thickness shells of revolution / A.Z. Galishin, Yu.N. Shevchenko // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 5. – P. 526-533.

Bibliography (transliterated): 1. Burlakov A.V., Lvov G.I., Morachkovskij O.K. Dlitel'naja prochnost' obolochek. Kharkiv: Visha shk., 1981, 104 s. 2. Lokoshenko A.M., Pechenina N.E., Shesterikov S.A. Dolgovechnost' cilindricheskikh obolochek pri chistom izgibe v usloviyah polzuchesti. Prikl. matematika i mehanika. 25, No 12, 1989, p. 73-78. 3. Shevchenko Yu.N., Babeshko M.E., Terehov R.G. Termoviazkoplachesticheskie processi slozhnogo deformirovaniya elementov konstrukcij. Kyiv: Nauk. dumka, 1992, 329 s. 4. Galishin A.Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of laminar orthotropic shells of revolution with a branched meridian. Int. Appl. Mech. 1993, vol. 29, No. 1, p. 61-69. 5. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A. Zum Kriechen dünner Rotationschalen unter Einbeziehung geometrischer Nichtlinearität sowie der Asymmetrie der Werkstoffeigenschaften. Forschung im Ingenieurwesen. 1996, 62, № 3, p. 47-57. 6. Galishin A., Zolochevsky A., Kühhorn A., Springmann M. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Numerical modeling. Techn. Mech., 2009, vol. 29, No 1, p. 48-59. 7. Zolochevskij A.A., Sklepus A.N., Sklepus S.N. Nelinejnaja mehanika deformiruemogo tverdogo tela. Kharkiv: «Biznes Investor Grupp», 2011. 720 p. 8. Shevchenko Yu.N., Galishin A.Z., Babeshko M.E. Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material. Int. Appl. Mech, 2015, vol. 51, No 6, p. 607-613. 9. Grigorenko Ja.M., Vasilenko A.T. Teorija obolochek peremenoj zhestkosti. (Metodi rascheta obolochek v 5 T., T4). Kyiv: Nauk. dumka, 1981, 544 p. 10. Salo V.A. Kraevye zadachi statiki obolochek s otverstijami. Kharkiv: NTU «ХПИ», 2003, 203 p. 11. Zolochevsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A., Kober M. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions. Techn. Mech. 2014. vol. 34, No 2, p. 104-113. 12. Dunne F.P.E., Othman A.M., Hall F.R., Hayhurst D.R. Representation of uniaxial creep curves using continuum damage mechanics. Int. J. Mech. Sci. 1990, 32, No 11, p. 945-957. 13. Rvachev V.L. Teorija R-funkcij i nekotorie ee prilozhenija. Kyiv: Nauk. dumka, 1982, 552 p. 14. Galishin A.Z., Shevchenko Yu.N. Calculating the thermoelastic stress state of medium-thickness shells of revolution. International Applied Mechanics. 2008, vol. 44, No 5, p. 526-533.

Поступила (received) 10.07.2016.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Склепус Сергей Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ИПМаш НАН Украины, г. Харьков, тел. (050) 522-49-01 (моб.), (0572) 67-54-95 (д.), e-mail: ssklepus@rambler.ru

Sklepus Sergej Nikolaevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Officer, IPMach NAS of Ukraine, Kharkiv, tel.: (050) 522-49-01, (0572) 67-54-95, e-mail: ssklepus@rambler.ru

Галишин Александр Закирьянович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев, e-mail: galishin55@mail.ru

Galishin Aleksandr Zakir'yanovich – Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, e-mail: galishin55@mail.ru