

Ю.А.СИРОТИН, канд. тех. наук, доц., НТУ «ХПИ»

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ТРЕХФАЗНОЙ ТРЕХПРОВОДНОЙ ЦЕПИ

Для трехфазной сети в точке подключения несимметричной нагрузки рассмотрены неуравновешенный и несбалансированный режимы потребления электроэнергии. Показано, что при синусоидальных процессах эти режимы определяют разные уравнения мощности. Получены формулы для вычисления мощности небаланса и неуровновешенности для синусоидальных процессов в трехпроводной цепи при несимметричном напряжении.

Ключевые слова: трехфазная цепь, мгновенная мощность, активная мощность, реактивная мощность, комплексная мощность, мощность небаланса, мощность пульсаций

В многофазной цепи с симметричными синусоидальными напряжениями и токами (в симметричном режиме) *мгновенная мощность* (ММ) не имеет переменной (пульсирующей) компоненты - режим *уравновешен* [1-3]. В реальной ситуации нарушение, как симметрии напряжений, так и симметрии токов приводит к пульсации ММ. Режим (синусоидальный или несинусоидальный) *неуравновешен*, если ММ имеет колебательную (пульсирующую) компоненту.

Мгновенная мощность (*активная* ММ) равна скорости передачи энергии. Однако скорость передачи энергии не полностью характеризует качество потока энергии и режим многофазной цепи. В трехфазной цепи *векторная* ММ (векторное произведение векторов мгновенных значений (м.з.) фазных напряжений и токов) дополняет характеристику энергетических процессов. Векторная ММ интерпретируется как *неактивная мгновенная мощность* [4]. Если *неактивная* ММ имеет колебательную составляющую - режим *несбалансирован*. *Активная* и *неактивная* ММ связаны уравнением мощности.

В многофазной цепи процессы *синусоидального* режима определены векторами комплексных *действующих величин* (д.в.) тока и напряжения, которые определяют *комплексные мощности* (КМ) сбалансированного и несбалансированного режимов. Стандартная КМ определяется как комплексное скалярное произведение (СП) векторов комплексных д.в. напряжений и токов. *Векторное произведение* (ВП) векторов комплексных д.в. напряжений и токов определяет комплексный вектор несбалансированной мощности [5]. ВП комплексно-сопряженного вектора напряжений и вектора токов определяет - комплексный вектор неппульсирующей мощности [6-8].

© Ю. А.Сиротин, 2013

Покажем, что при синусоидальных процессах при несимметричном напряжении введенные режимы описываются не единственным уравнением мощности для комплексных векторов мощности небаланса и неппульсирующей мощности. Мощность небаланса и мощность пульсаций входят в различные уравнения мощностей, которые с разных сторон описывают энергетические процессы в трехфазной цепи.

Мгновенные мощности. Уравновешенный и сбалансированный режим.

В каждый момент времени состояние процессов в трехфазном сечении $\langle a, b, c \rangle$ характеризуется векторами мгновенных значений тока и напряжения

$$\mathbf{u}(t) = (u_a(t), u_b(t), u_c(t))^* , \quad \mathbf{i} = (i_a(t), i_b(t), i_c(t))^* . \quad (1)$$

где $*$ - знак транспонирования.

Стандартная мгновенная мощность (ММ) определена как

$$p(t) = u_a(t)i_a(t) + u_b(t)i_b(t) + u_c(t)i_c(t) = \frac{dW}{dt} \quad (2.a)$$

и характеризует скорость передачи энергии $W = W(t)$ в каждый момент времени. Стандартная ММ - скалярная величина (число) и в каждый момент времени она равна *скалярному произведению* векторов (1), которое вычисляется как произведение матрицы строки м.з. тока на матрицу столбец м.з. напряжений $p(t) = \mathbf{i}(t)^* \mathbf{u}(t)$.

Полагая, что процессы T -периодические, можно корректно определить среднее ММ и выделить переменную составляющую

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} p(t) dt , \quad p(t) = \bar{p} + \tilde{p}(t) . \quad (2.б)$$

Если ММ не имеет переменной (пульсирующей) компоненты $\tilde{p}(t) \equiv 0$, то режим *уравновешен* [1]. В общем случае $\tilde{p} = p(t) - \bar{p} \neq 0$ и режим *неуравновешен*. Симметричный режим *уравновешен*. Обратное утверждение не верно.

В несимметричном режиме стандартная ММ (скалярная величина) не единственная мгновенная характеристика наблюдаемого энергетического процесса. Уточняющую характеристику энергетических процессов дает *векторная* ММ (ВП векторов мгновенных фазных напряжений и токов) [4]:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{i} \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_c i_b - u_b i_c \\ u_a i_c - u_c i_a \\ u_b i_a - u_a i_b \end{bmatrix} . \quad (3)$$

(Для сокращения записи зависимость от времени явно не указывается).

Подобно (2.6) можно выделить векторные составляющие: постоянную и переменную

$$\bar{q} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} q(t) dt; \quad \tilde{q}(t) = q(t) - \bar{q}. \quad (4)$$

Режим, при котором векторная ММ не имеет переменной составляющей $\tilde{q} = \tilde{q}(t) \equiv 0$ (тождественно равна нулю $q(t) \equiv 0$) будем называть сбалансированным (реально сбалансированным) режимом.

Векторная ММ интерпретируется как неактивная ММ. Чтобы подчеркнуть это скалярную ММ называют активной ММ.

В каждый момент времени справедливо тождество векторной алгебры [9]

$$[\mathbf{i} \times \mathbf{u}] \cdot [\mathbf{i} \times \mathbf{u}] = \begin{vmatrix} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) & (\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}) \\ (\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}) & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Тождество (4) для мгновенных величин (1) дает мгновенное уравнение мощности

$$s^2(t) = p^2(t) + q^2(t). \quad (6)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для: скалярных квадратов векторов м.з. напряжений и токов

$$u^2(t) = |\mathbf{u}(t)|^2 = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t), \quad i^2(t) = |\mathbf{i}(t)|^2 = \mathbf{i}(t) \cdot \mathbf{i}(t); \quad (7)$$

квадратов мгновенных мощностей: активной, неактивной, и полной

$$p^2(t) = |\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}(t))|^2, \quad q^2(t) = \mathbf{q}(t) \cdot \mathbf{q}(t), \quad s^2(t) = u^2(t) i^2(t). \quad (8)$$

Если режим симметричен, то стандартная ММ не имеет переменной компоненты (режим уравновешен), а векторная ММ тождественно равна нулю.

3-проводная схема и неактивная ММ

В трехпроводной цепи напряжение можно измерять относительно искусственной точки заземления, что совместно с 1 законом Кирхгофа дает [3]

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) \equiv 0, \quad u_a(t) + u_b(t) + u_c(t) \equiv 0 \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{e}_0 = (1, 1, 1) \cdot / \sqrt{3}$ - нормализованный вектор (орт $|\mathbf{e}_0| = 1$) 0-последовательности. Тем самым, в трехпроводной цепи энергетические процессы ортогональны орту \mathbf{e}_0 (не содержат 0-последовательность)

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_0 \equiv 0 \Leftrightarrow \mathbf{i} \perp \mathbf{e}_0; \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_0 \equiv 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{e}_0. \quad (10)$$

Если вектора ортогональны \mathbf{e}_0 , то их векторное произведение коллинеарно \mathbf{e}_0 (в каждый момент времени) и совпадает со своей проекцией на орт \mathbf{e}_0 .

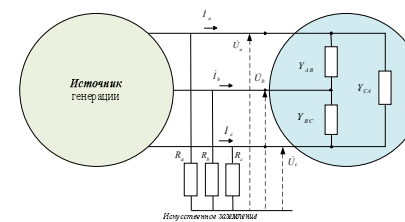


Рис. – Трехфазная трехпроводная цепь

Поэтому, для вектора неактивной ММ имеем

$$\mathbf{q} = \mathbf{i} \times \mathbf{u} = (\mathbf{i} \times \mathbf{u})_0 = \underbrace{[\mathbf{i} \mathbf{u} \mathbf{e}_0]}_{q_0} \mathbf{e}_0 = q_0 \mathbf{e}_0. \quad (11)$$

Вектор неактивной ММ полностью определен скалярной неактивной ММ $q_0 = q_0(t) = [\mathbf{i} \times \mathbf{u}] \cdot \mathbf{e}_0$ - алгебраической проекцией вектора $\mathbf{q} = \mathbf{i} \times \mathbf{u}$ на орт \mathbf{e}_0 . Алгебраическая проекция равна смешанному произведению векторов м.з. тока, м.з. напряжения и орта 0- последовательности

$$q_0 = \mathbf{e}_0 \cdot [\mathbf{i} \times \mathbf{u}] = \mathbf{i} \cdot [\mathbf{u} \times \mathbf{e}_0] = [\mathbf{i} \mathbf{u} \mathbf{e}_0] \quad (12)$$

Так как $q = |\mathbf{q}| = |q_0|$, то мгновенное уравнение мощности (8) запишется как

$$s^2(t) = p^2(t) + q_0^2(t). \quad (13)$$

Синусоидальный режим и 3-комплексы

Мгновенные значения синусоидальных процессов напряжения и тока

$$\mathbf{u}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} [\mathbf{U} e^{j\omega t}], \quad \mathbf{i}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} [\mathbf{I} e^{j\omega t}] \quad (14)$$

однозначно определены трехмерными комплексными векторами (3-комплексами) напряжения $\mathbf{U} = (\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c) \cdot$ и тока $\mathbf{I} = (\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c) \cdot$ - векторами комплексных д.в.:

$$\mathbf{U} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T \mathbf{u}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \mathbf{I} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T \mathbf{i}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (15)$$

где T - период ($T\omega = 2\pi$).

Комплексное скалярное произведение 3-комплексов (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) определено как произведение матрицы-строки $\mathbf{X}^* = (\mathcal{X}_a^*, \mathcal{X}_b^*, \mathcal{X}_c^*)$ на комплексно сопряженную (КС) матрицу-столбец $\mathbf{Y}^* = (Y_a^*, Y_b^*, Y_c^*) \cdot$

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^* \mathbf{Y}^* = \mathcal{X}_a^* Y_a^* + \mathcal{X}_b^* Y_b^* + \mathcal{X}_c^* Y_c^*, \quad (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{Y}, \mathbf{X})^*. \quad (16)$$

Скалярный квадрат 3-комплекса X равен

$$X^2 = |X|^2 = (X, X) = X \cdot X^* = \mathcal{X}_a \mathcal{X}_a^* + \mathcal{X}_b \mathcal{X}_b^* + \mathcal{X}_c \mathcal{X}_c^* . \quad (17)$$

3-комплексы X и Y ортогональны, если их комплексное скалярное произведение равно нулю

$$X \perp Y \Leftrightarrow (X, Y) = X \cdot Y^* = 0 . \quad (18)$$

Активная мгновенная мощность синусоидального режима

Представляя (м.з.) синусоидальных процессов (14) как

$$u(t) = [Ue^{j\omega t} + U^* e^{-j\omega t}] / \sqrt{2}, \quad i(t) = [Ie^{j\omega t} + I^* e^{-j\omega t}] / \sqrt{2}, \quad (19)$$

для стандартной ММ будем иметь

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \Re e[U \cdot I^* + I \cdot Ue^{j2\omega t}]. \quad (20)$$

Комплексная величина $U \cdot I^* = P + jQ$ равна стандартной

комплексной мощности (КМ)

$$\mathcal{S} = \mathcal{U}_a \mathcal{I}_a^* + \mathcal{U}_b \mathcal{I}_b^* + \mathcal{U}_c \mathcal{I}_c^* = U \cdot I^* . \quad (21)$$

Реальная часть стандартной КМ равна средней мощности за интервал наблюдения $[\tau, \tau + T]$

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} p(t) dt, \quad \bar{p} = \Re e \mathcal{S} = P . \quad (22)$$

Мнимая часть КМ $\Im m \mathcal{S} = Q$ определяет реактивную мощность синусоидального режима.

Комплексная величина

$$I \cdot U = \mathcal{I}_a \mathcal{U}_a + \mathcal{I}_b \mathcal{U}_b + \mathcal{I}_c \mathcal{U}_c = \mathcal{N} = N e^{j \arg \mathcal{N}} \quad (23.a)$$

определяет комплексную амплитуду пульсаций ММ (комплексную мощность пульсаций) переменной составляющей активной ММ

$$\tilde{p} = \Re e[\dot{N} e^{j2\omega t}] = N \cos(2\omega t + \arg \dot{N}) . \quad (23.б)$$

Отметим, что стандартная КМ равна комплексному СП 3-комплексов напряжения U и тока I [3]. Комплексная мощность пульсаций (МП) равна комплексному СП 3-комплекса тока и (КС) 3-комплекса напряжения

$$U^* = [U_a^* U_b^* U_c^*] \quad [5]$$

$$\mathcal{S} = U \cdot I^* = (U, I), \quad \mathcal{N} = I \cdot (U^*)^* = (I, U^*) . \quad (24)$$

Тем самым для ММ справедливо

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = u(t) \cdot i(t) = P + N \cos(2\omega t + \arg \mathcal{N}), \quad (25)$$

и синусоидальный режим уравновешен $\tilde{p} = \Re e[\dot{N} e^{j2\omega t}] \equiv 0$, если выполняется одно из эквивалентных утверждений

$$N = 0 \Leftrightarrow U^* \perp I . \quad (26)$$

Так, при симметричном напряжении прямой последовательности, режим уравновешен, если ток не содержит обратную последовательность. (Наличие тока 0-последовательности не приводит к пульсациям ММ.)

Векторная мгновенная мощность синусоидального режима.

ВП 3-комплексов X и Y определяется также как ВП для вещественных 3-векторов.

$$X \times Y = \begin{bmatrix} \dot{X}_b \dot{Y}_c - \dot{X}_c \dot{Y}_b \\ \dot{X}_c \dot{Y}_a - \dot{X}_a \dot{Y}_c \\ \dot{X}_a \dot{Y}_b - \dot{X}_b \dot{Y}_a \end{bmatrix} . \quad (27)$$

3-комплексы X and Y параллельны (коллинеарны $X \parallel Y$), если их координаты комплексно пропорциональны или ВП равно нулю

$$X \parallel Y \Leftrightarrow X = \mathcal{K} Y (\mathcal{K} \neq 0) \Leftrightarrow X \times Y = 0 . \quad (28)$$

Используя представление (19) для м.з. напряжений и токов можно показать, что в синусоидальном режиме векторная ММ (3) равна

$$q = i \times u = \Re e[I \times U^* + (I \times U) e^{j2\omega t}] , \quad (29)$$

и представляется двумя векторными комплексными мощностями: ВП 3-комплексов напряжения и тока и ВП 3-комплекса напряжения и КС 3-комплекса тока

$$D = I \times U , \quad K = I \times U^* . \quad (30)$$

Тем самым, векторная ММ может быть записана как

$$q = \underbrace{\Re e[K]}_{\bar{q}} + \underbrace{\Re e[D e^{j2\omega t}]}_{\tilde{q}} . \quad (31)$$

Выражение (31) дает явное представление для постоянной и переменной составляющих в синусоидальном режиме

$$\bar{q} = \Re e[K], \quad \tilde{q}(t) = \Re e[D e^{j2\omega t}]. \quad (32)$$

Из (28- 32) следует, что синусоидальный режим сбалансирован

$$\tilde{q}(t) = \Re e[D e^{j2\omega t}] \equiv 0, \quad (33)$$

если выполняется одно из эквивалентных утверждений

$$D = 0 \Leftrightarrow U \parallel I \Leftrightarrow I = \mathcal{K} U . \quad (34)$$

3-комплекс $\mathbf{D} = \mathbf{I} \times \mathbf{U}$ в [6] был назван 3-комплексом (вектором) мощности *небаланса*. 3-комплекс $\mathbf{K} = \mathbf{I} \times \mathbf{U}^*$ можно назвать вектором *непульсирующей* мощности.

Уравнения мощности несбалансированного и неуровновешенного синусоидального режимов

Операции сложения и умножения для вещественных и комплексных чисел обладают одинаковыми свойствами. Поэтому тождество векторной алгебры (4) остается справедливым и для комплексных векторов. Следует только вместо вещественного скалярного произведения использовать комплексное СП. Можно показать, что для 3-комплексов справедливо тождество подобное (5)

$$[\mathbf{X} \times \mathbf{Y}] \cdot [\mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^*] = \begin{vmatrix} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^*) & (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}^*) \\ (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}^*) & (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^*) \end{vmatrix}. \quad (35.a)$$

Откуда имеем

$$|\mathbf{X} \times \mathbf{Y}|^2 = |\mathbf{X}|^2 |\mathbf{Y}|^2 - |\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}^*|^2. \quad (35.6)$$

Здесь и дальше использованы стандартные обозначения для скалярных квадратов комплексного СП (16)

$$\mathbf{X}^2 = |\mathbf{X}|^2 = \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^*, \quad \mathbf{Y}^2 = |\mathbf{Y}|^2 = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^*, \quad (36)$$

и очевидные свойства операции комплексного сопряжения

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}^* = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}^*)^*, \quad |\mathbf{X} \times \mathbf{Y}|^2 = (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})^*. \quad (37)$$

Полагая $\mathbf{X} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{U}$ и используя $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^*$ и $\mathbf{S}^* = \mathbf{I} \cdot \mathbf{U}^*$ из (37) получим

$$|\mathbf{I}|^2 |\mathbf{U}|^2 = \dot{\mathbf{S}} \mathbf{S}^* + \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^*. \quad (38)$$

Тождество (38) дает квадратичное разложение [5,6] полной (кажущейся) мощности по Бухгольцу $S_B = \mathbf{I} \times \mathbf{U} \parallel \mathbf{I} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}$ на две компоненты

$$S_B^2 = S_G^2 + D_u^2. \quad (39)$$

Здесь и дальше:

- $S_G = |\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^*| = \sqrt{\dot{\mathbf{S}} \mathbf{S}^*} = |\dot{\mathbf{S}}|$ – геометрическая мощность, равная модулю стандартной КМ;

- $D_u = |\mathbf{D}| = \sqrt{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^*}$ – норма 3- комплекса небаланса.

Так как $S_G^2 = P^2 + Q^2$, из (27) имеем уравнение мощности для оценки дополнительных потерь в несбалансированном режиме

$$S_B^2 = P^2 + \underbrace{Q^2 + D_u^2}_{\text{дополнительные потери}}. \quad (40)$$

В синусоидальном режиме дополнительные потери обусловлены не только реактивной мощностью, но и небалансом режима, который определен 3-комплексом $\mathbf{D} = \mathbf{I} \times \mathbf{U}$. Коэффициент мощности при этом равен

$$\lambda = \frac{P}{S_B} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D_u^2}}. \quad (41)$$

Если в (34) проводимость $\mathbf{Y} = G + jB$ вещественное число ($B = 0$), то режим *реально сбалансирован* [6]. В этом случае полная мощность равна активной мощности, а коэффициент мощности равен 1.

Из (35), полагая $\mathbf{X} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{U}^*$ и используя $\mathbf{N} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{U} = (\mathbf{I}, \mathbf{U}^*)$, имеем другое *квадратичное разложение полной мощности для оценки неуровновешенности режима* [6]

$$|\mathbf{I}|^2 |\mathbf{U}|^2 = \dot{\mathbf{N}} \mathbf{N}^* + \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*, \quad S_B^2 = N^2 + K^2. \quad (42)$$

Положительная скалярная величина $K^2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ характеризует неппульсирующие процессы синусоидального режима и дополняет положительную величину $N^2 = \dot{\mathbf{N}} \mathbf{N}^*$ в уравнении мощности (42) неуровновешенного режима. Степень неуровновешенности режима можно определить коэффициентом пульсаций

$$\lambda_N = \frac{N}{S_B} = \frac{N}{\sqrt{N^2 + K^2}}. \quad (43)$$

Если режим *реально сбалансирован* ($\mathbf{I} = G\mathbf{U}$, $G > 0$), то

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} \times \mathbf{U}^* = G\mathbf{U} \times \mathbf{U}^* \Rightarrow \mathbf{K}^* = -\mathbf{K},$$

и вектор неппульсирующей мощности (30) имеет чисто мнимые координаты, что дает

$$\mathbf{K} = jG \Im m[\mathbf{U} \times \mathbf{U}^*] \quad \bar{q} = \Re e[\mathbf{K}] = 0 \quad (44.a)$$

Таким образом, векторная ММ *реально сбалансированного* синусоидального режима равна нулю $\mathbf{q}(t) \equiv 0$. Справедливо и обратное утверждение. Если векторная ММ равна нулю, то режим *реально сбалансирован* и коэффициент мощности равен 1.

$$\mathbf{q} \equiv 0 \Leftrightarrow \mathbf{I} = G\mathbf{U}, \quad G > 0. \quad (44.6)$$

Однако мощность пульсаций при этом $\mathbf{N} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{U} = G\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \neq 0$ отлична от нуля (если напряжение несимметрично [6]). Тем самым, уравновешенный и сбалансированный режим – различные энергетические понятия. Сбалансированный режим может быть неуровновешенным и наоборот. Однако введенные мощности разложения (42) связаны с мощностями разложения (39) [6].

3-проводная схема с синусоидальными процессами

Проведем анализ рассматриваемых синусоидальных режимов для трехпроводной цепи. Из (10) следует, что в синусоидальном режиме для 3-комплексов напряжения $\mathbf{U} = (\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c)'$ и тока $\mathbf{I} = (\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c)'$ выполнено

$$\mathbf{U}' \mathbf{e}_0 = 0, \quad \mathbf{I}' \mathbf{e}_0 = 0. \quad (45)$$

Можно показать, что если 3-комплексы ортогональны орту \mathbf{e}_0 , то их ВП коллинеарно \mathbf{e}_0 и совпадает со своей проекцией на орт \mathbf{e}_0 :

$$\mathbf{X} \perp \mathbf{e}_0 \text{ и } \mathbf{Y} \perp \mathbf{e}_0 \Rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{Y} = ([\mathbf{X} \times \mathbf{Y}]' \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_0. \quad (46)$$

Утверждение (46) для 3-комплексов мощностей (30) дает

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 = \dot{D}_0 \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \dot{K}_0 \mathbf{e}_0. \quad (47)$$

Алгебраические проекции 3-комплексов мощностей на орт \mathbf{e}_0

$$\dot{D}_0 = (\mathbf{I} \times \mathbf{U})' \mathbf{e}_0, \quad \dot{K}_0 = (\mathbf{I} \times \mathbf{U}^*)' \mathbf{e}_0 \quad (48)$$

- комплексные величины, (равные смешанным произведениям) названы фазором *мощности небаланса* и фазором *непульсирующей мощности*, соответственно [6].

Дуальные уравнения мощности (42) и (40) записываются как

$$(49) \quad S_B^2 = P^2 + Q^2 + D_0^2, \quad S_B^2 = K_0^2 + N^2.$$

Для векторной ММ (11) справедливо

$$q_0 = \mathbf{q}' \mathbf{e}_0 = \Re[\dot{K}_0 + \dot{D}_0 e^{j2\omega t}], \quad \bar{q}_0 = \Re[\dot{K}_0], \quad \tilde{q}_0 = \Re[\dot{D}_0 e^{j2\omega t}]. \quad (50)$$

Синусоидальный режим и симметричные координаты

Дальнейший анализ проведем, используя модифицированный метод симметричных координат [6], который использует ортонормированный базис прямой и обратной последовательностей

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^* \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^* \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Здесь $\alpha = e^{j2\pi/3}$ ($\alpha^2 = \alpha^*$, $\alpha\alpha^* = 1$). Орты 1- и 2- последовательностей связаны операцией комплексного сопряжения $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1)^*$.

Для ортов (51) справедливы равенства

$$\mathbf{e}_k \mathbf{e}_m^* = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases} \quad \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m = \begin{cases} 1, & k \neq m \\ 0, & k = m \end{cases} \quad k, m = 1, 2. \quad (52)$$

3-комплексы тока и напряжения в базисе (51) имеют разложения

$$\mathbf{I} = \dot{I}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{I}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \dot{U}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{U}_2 \mathbf{e}_2. \quad (53)$$

Коэффициенты разложения (53) определяют симметричные координаты, которые вычисляются как [6]

$$\dot{I}_1 = (\mathbf{I}, \mathbf{e}_1) = \mathbf{I}' \mathbf{e}_1^* = \mathbf{I}' \mathbf{e}_2, \quad \dot{I}_2 = (\mathbf{I}, \mathbf{e}_2) = \mathbf{I}' \mathbf{e}_2^* = \mathbf{I}' \mathbf{e}_1; \quad (54.a)$$

$$\dot{U}_1 = (\mathbf{U}, \mathbf{e}_1) = \mathbf{U}' \mathbf{e}_1^* = \mathbf{U}' \mathbf{e}_2, \quad \dot{U}_2 = (\mathbf{U}, \mathbf{e}_2) = \mathbf{U}' \mathbf{e}_2^* = \mathbf{U}' \mathbf{e}_1. \quad (54.b)$$

Для комплексно-сопряженного 3-комплекса тока имеем

$$\mathbf{I}^* = (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* = \mathbf{I}_1^* + \mathbf{I}_2^* = (\dot{I}_1)^* (\mathbf{e}_1)^* + (\dot{I}_2)^* (\mathbf{e}_2)^* = (\dot{I}_2)^* \mathbf{e}_1 + (\dot{I}_1)^* \mathbf{e}_2 \quad (55)$$

В базисе симметричных координат получим

$$\mathbf{U}' \mathbf{I}^* = (\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2)' (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* = (\mathbf{U}_1)' (\mathbf{I}_1)^* + (\mathbf{U}_2)' (\mathbf{I}_2)^* \quad (56)$$

$$\mathbf{I}' \mathbf{U} = (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)' (\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2) = \mathbf{I}_1' \mathbf{U}_2 + \mathbf{I}_2' \mathbf{U}_1 \quad (57)$$

Тождества (56-57) дают выражения для стандартной комплексной мощности и комплексной мощности пульсаций

$$\dot{S} = \mathbf{U}' \mathbf{I}^* = \dot{U}_1 \dot{I}_1^* + \dot{U}_2 \dot{I}_2^*, \quad \dot{N} = \mathbf{I}' \mathbf{U} = \dot{I}_1 \dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{U}_1. \quad (58)$$

Прямыми вычислениями можно проверить, что для векторных произведений ортов (49) справедливы равенства

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_m = \begin{cases} (m-k) \mathbf{e}_0, & k \neq m \\ 0, & k = m \end{cases} \quad k, m = 1, 2 \quad (59)$$

Кроме того можно проверить, что

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_0 = -j \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_0 = j \mathbf{e}_2 \quad (60)$$

3-комплекс мощности небаланса в симметричных координатах

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{I} \times \mathbf{U} &= (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \times (\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2) = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{U}_2 + \mathbf{I}_2 \times \mathbf{U}_1 \\ &= (\dot{U}_2 \dot{I}_1 - \dot{U}_1 \dot{I}_2) \underbrace{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]}_{j \mathbf{e}_0} = j (\dot{U}_2 \dot{I}_1 - \dot{U}_1 \dot{I}_2) \mathbf{e}_0 = \dot{D}_0 \mathbf{e}_0 \end{aligned}$$

имеет только 0-последовательность. Фазор (1-комплекс) мощности небаланса равен

$$\dot{D}_0 = j (\dot{U}_2 \dot{I}_1 - \dot{U}_1 \dot{I}_2). \quad (61)$$

Цепочка преобразований 3-комплекса неппульсирующей мощности $\mathbf{K} = \mathbf{U} \times \mathbf{I}^*$ в симметричных координатах с учетом (59-60) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \mathbf{U} \times \mathbf{I}^* &= (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \times (\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2)^* = [\dot{I}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{I}_2 \mathbf{e}_2] \times [(\dot{U}_1)^* \mathbf{e}_2 + (\dot{U}_2)^* \mathbf{e}_1] \\ &= (\dot{I}_1 \mathbf{U}_1^* - \dot{I}_2 \mathbf{U}_2^*) \underbrace{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]}_{j \mathbf{e}_0} = j (\dot{S}_1^* - \dot{S}_2^*) \mathbf{e}_0 = \dot{K}_0 \mathbf{e}_0 \end{aligned}$$

Здесь $\dot{S}_1 = \dot{U}_1 \dot{I}_1^*$, $\dot{S}_2 = \dot{U}_2 \dot{I}_2^*$ комплексные мощности 1-, 2-последователь-

ностей. Фазор (1-комплекс) ненульсирующей мощности равен

$$\dot{K}_0 = j(\dot{I}_1 U_1^* - \dot{I}_2 U_2^*) = (Q_1 - Q_2) + j(P_1 - P_2). \quad (62)$$

Симметричное напряжение

Если напряжение симметрично $U = \dot{U}_1 e_1$ ($\dot{U}_2 = 0$), то для рассматриваемых выше комплексных мощностей имеем:

$$\dot{K}_0 = j(\dot{I}_1 U_1^*) = Q_1 + jP_1, \quad \dot{D}_0 = -j\dot{U}_1 \dot{I}_2; \quad (63.a)$$

$$\dot{N} = \dot{U}_1 \dot{I}_2, \quad \dot{S} = \dot{U}_1 I_1^* = \dot{S}_1. \quad (63.б)$$

Справедливы равенства между введенными комплексными мощностями

$$\dot{D}_0 = -j\dot{U}_1 \dot{I}_2 = -j\dot{N}; \quad \dot{K}_0 = jU_1 I_1^* = jS_1^* = Q_1 + jP_1. \quad (64)$$

В этом режиме имеем

$$q_0 = \mathbf{q}^* \mathbf{e}_\theta = \Re[\dot{K}_0 + \dot{D}_0 e^{j2\omega t}] = Q_1 + \Re[\dot{D}_0 e^{j2\omega t}]. \quad (65)$$

Таким образом, в трехпроводной цепи при симметричном напряжении:

- комплексная мощность пульсаций \dot{N} отличается от комплексной мощности небаланса \dot{D}_0 лишь фазовым множителем ($\dot{D}_0 = -j\dot{N}$).

Если режим уравновешен, то он и сбалансирован и наоборот.

- комплекс ненульсирующей мощности \dot{K}_0 отличается от стандартной КС комплексной мощности S^* лишь фазовым множителем ($\dot{K}_0 = jS^*$).

Для активной и неактивной ММ справедливы формулы

$$p(t) = P_1 + \Re[\dot{D}_0 e^{j(2\omega t - \pi/2)}], \quad q_0(t) = Q_1 + \Re[\dot{D}_0 e^{j2\omega t}]. \quad (66)$$

В 3-проводной цепи при симметричном напряжении сбалансированность и уравновешенность режимов – эквивалентные понятия. Амплитуды пульсаций активной ММ и скалярной неактивной ММ совпадают ($N = D_0$).

Режим реально сбалансирован, если он сбалансирован и реактивная мощность равна нулю. Если напряжение симметрично, то симметричные координаты тока

$$\dot{I}_1 = \dot{Y}_1 \dot{U}_1, \quad \dot{I}_2 = \dot{Y}_2 \dot{U}_1. \quad (67)$$

вычисляются с помощью проводимостей прямой и обратной последовательности по межфазным проводимостям

$$\dot{Y}_1 = G_1 + jB_1 = \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{BC} + \dot{Y}_{CA}, \quad (68.a)$$

$$\dot{Y}_2 = G_2 + jB_2 = -(\alpha \dot{Y}_{AB} + \alpha^* \dot{Y}_{BC} + \dot{Y}_{CA}). \quad (68.a)$$

Коэффициент мощности и коэффициент пульсации при симметричном напряжении вычисляются через эти проводимости

$$\lambda^2 = \frac{P^2}{S_B^2} = \frac{(\Re \dot{Y}_1)^2}{Y_1^2 + Y_2^2}, \quad \lambda_N^2 = \frac{N^2}{S_B^2} = \frac{Y_2^2}{Y_1^2 + Y_2^2}. \quad (69)$$

Примеры неуровновешенного и несбалансированного режимов при симметричном напряжении

В 3-проводной схеме (Рис.) с несимметричной линейной нагрузкой типа треугольник и симметричным напряжением источника генерации 3-комплекс прямой последовательности определен базовой величиной напряжения на одну фазу $\tilde{U} = |U|/\sqrt{3}$ ($\dot{U}_1 = \sqrt{3}\tilde{U}$). Базовые величины на одну фазу: проводимость \tilde{Y} , напряжение \tilde{U} , ток \tilde{I} , мощность \tilde{W} удовлетворяют соотношениям $\tilde{W} = \tilde{U} \tilde{I} = \tilde{Y} \tilde{U}^2$ и $\tilde{I} = \tilde{Y} \tilde{U}$.

Нагрузка задана проводимостями фаз (Табл.1).

Таблица 1–Проводимости нагрузки

	1	2	3	4
\dot{Y}_{AB}	\tilde{Y}	\tilde{Y}	$e^{j\pi/6} \tilde{Y}$	$e^{-j\pi/6} \tilde{Y}$
\dot{Y}_{BC}	0	$j \tilde{Y}/\sqrt{3}$	$e^{j\pi/2} \tilde{Y}$	$e^{j\pi/6} \tilde{Y}$
\dot{Y}_{CA}	0	$-j \tilde{Y}/\sqrt{3}$	0	0
λ	$1/\sqrt{2}$	1	0.5	1

Результаты расчета сведены в Табл.2.

Пример 1. Одноплечевая нагрузка с активной проводимостью $G_{AB} = \tilde{Y}$. Режим несбалансирован и неуровновешен. $p(t) = 3\tilde{W}[1 + \cos(2\omega t - \pi/3)]$.

Пример 2. Симметризатор-компенсатор Штейнметца. Схема Штейнметца симметризует одноплечевую нагрузку примера 1 путем добавления в два остальных плеча индуктивности и емкости, так что D – нагрузка определена межфазными проводимостями: $\dot{Y}_{AB} = \tilde{Y}$, $\dot{Y}_{BC} = j \tilde{Y}/\sqrt{3}$, $\dot{Y}_{CA} = -j \tilde{Y}/\sqrt{3}$. Проводимость тока прямой последовательности чисто активная и совпадает с активной проводимостью плеча AB $\dot{Y}_1 = \tilde{Y} = G_{AB}$. Проводимость тока 2-последовательности равна нулю. Нагрузка схемы Штейнметца активно сбалансирована.

Пример 3. Комплексно сбалансированная нагрузка. Межфазные проводимости равны $\dot{Y}_{AB} = e^{j30^\circ}$, $\dot{Y}_{BC} = j = e^{j90^\circ}$, $\dot{Y}_{AC} = 0$. Проводимость тока 1-последовательности комплексная и равна: $\dot{Y}_1 = \sqrt{3}e^{j60^\circ}$, $G_1 = \sqrt{3}/2$, $B_1 = 3/2$. Проводимость 2-последовательности равна нулю, тем самым

отсутствует ток 2-последовательности. Полный ток совпадает с током 1-последовательности. Нагрузка комплексно-сбалансирована $I = I_1 = \dot{Y}_1 U$, однако реально не сбалансирована ($B_1 = 3/2 \neq 0$). Полная мощность равна геометрической мощности $S_B = S_G$. Между полным (1-последовательности) током и напряжением имеется фазовый сдвиг $\varphi = \arccos(P/S_G) = 60^\circ$, который оценивается коэффициентом мощности $\lambda = P/S_G = G_1/Y_1 = 0.5$. ММ пульсирует $p(t) = 3\tilde{W}[2 + \cos(2\omega t)]$. Коэффициент пульсации равен $1/\sqrt{5}$.

Пример 4. 2-плечевая реально сбалансированная нагрузка. Схема уравнивает режим чисто активной несимметричной 2-плечевой нагрузки $\dot{Y}_{AB} = \sqrt{3}\dot{Y}/2$, $\dot{Y}_{BC} = \sqrt{3}\dot{Y}/2$, $\dot{Y}_{AC} = 0$ включением в те же плечи реактивной нагрузки: $\dot{Y}_{AB} = -j\dot{Y}/2$, $\dot{Y}_{BC} = j\dot{Y}/2$, $\dot{Y}_{AC} = 0$. Также как и в схеме Штейнметца отсутствует ток 2-последовательности и реактивная составляющая тока 1-последовательности.

Полный ток совпадает с активной составляющей тока 1-последовательности. Не смотря на то, что суммарная нагрузка несимметрична и имеет реактивные элементы, она со стороны источника видна как чисто активная и симметричная (режим сбалансирован и уравновешен). Полная мощность равна активной мощности.

Таблица 2–Результаты расчетов

№	1	2	3	4
\dot{Y}_1	\dot{Y}	\dot{Y}	$2\dot{Y}$	\dot{Y}
\dot{Y}_2	$e^{-j\pi/3}\dot{Y}$	0	$-\dot{Y}$	0
$\dot{I}_1 = \dot{Y}_1 U $	$\sqrt{3}\tilde{I}$	$\sqrt{3}\tilde{I}$	$2\sqrt{3}\tilde{I}$	$\sqrt{3}\tilde{I}$
$\dot{I}_2 = \dot{Y}_2 U $	$\sqrt{3}e^{-j\pi/3}\tilde{I}$	0	$-\sqrt{3}\tilde{I}$	0
$ I = \sqrt{ \dot{I}_1 ^2 + \dot{I}_2 ^2}$	$\sqrt{6}\tilde{I}$	$\sqrt{3}\tilde{I}$	$\sqrt{15}\tilde{I}$	$(3/\sqrt{2})\tilde{I}$
$P = \Re(\dot{I}_1) U $	$3\tilde{W}$	$3\tilde{W}$	$6\tilde{W}$	$3\tilde{W}$
$\dot{D}_0 = j\dot{I}_2 U $	$e^{-j\pi/3}3\tilde{W}$	0	$-j3\tilde{W}$	0
$S_B = I U $	$3\sqrt{2}\tilde{W}$	$3\tilde{W}$	$3\sqrt{5}\tilde{W}$	$3\tilde{W}$
$\dot{N} = \dot{I}_2 U $	$e^{-j\pi/3}3\tilde{W}$	0	$3\tilde{W}$	0
$\dot{K}_0 = -j\dot{I}_1 U $	$-j3\tilde{W}$	0	$-j6\tilde{W}$	0
$\lambda = P/S_B$	$1/\sqrt{2}$	1	$2/\sqrt{5}$	1
$\lambda_N = N/S_B$	$1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{5}$	0

Выводы. Для классификации режимов потребления электроэнергии дополнительно к активной мгновенной мощности использована неактивная (векторная) ММ. Эти ММ удовлетворяют уравнению мгновенных мощностей. Показано, что в трехпроводной цепи векторная ММ полностью определена своей 0-составляющей. При синусоидальных процессах введенные режимы описываются двумя различными уравнениями мощности для комплексных векторов: мощности небаланса и неппульсирующей мощности. В синусоидальном режиме для трехпроводной цепи получены формулы для расчета мощности небаланса и неппульсирующей мощности. Показано, что при симметричном напряжении мощность пульсаций совпадает с мощностью небаланса. Режим в такой цепи может быть описан одним уравнением мощности.

Список литературы: 1. Зевеке Г.В. Основы теории цепей / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин. – М. - Л. : «Госэнергоиздат», 1955.–216 с. 2. Кузнецов В.Г. Схемы симметрирования однофазных нагрузок в трехфазных цепях / А.Н.Милях, А.К.Шидловский, В.Г. Кузнецов. – К.: Наукова думка, 1973. –218с. 3. Кузнецов В. Г. Повышение качества энергии в электрических сетях / А. К Шидловский., В. Г. Кузнецов. – К.: Наукова думка, 1985. – 266 с. 4. F. Z. Peng Generalized Instantaneous Reactive Power Theory for Three-Phase Power Systems / F. Z. Peng, J. S. Lai // IEEE Trans. Instrum. Meas. –1996.– vol. 45, no.1. – pp. 293-297. 5. Сиротин Ю. А. Сбалансированная и разбалансированная составляющие тока в трехфазной несимметричной системе //Ю. А. Сиротин //Вісник ПДТУ.– 2008. – Вип. №18. – С. 81-87. 6. Сиротин Ю. А. Ток, мощность и уравнение пульсаций в трехфазной системе / Ю. А. Сиротин // Вісник НТУ «ХП». –2012. – №. 23. –С. 146-159 7. Sirotin. Iu. A. Fryze’s compensator and Fortescue transformation / Iu. A. Sirotin // “Przegląd Elektrotechniczny” (Electrical Review). –2011.–vol. 1. – pp.101-106. 8. Сиротин Ю. А. Δ–симметризатор - компенсатор Фризе / Ю. А. Сиротин // Вісник НТУ «ХП». – 2010. – №. 45. – С. 145-157. 9. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г.Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. –832 с.

Поступила в редколлегию 12.12.12

УДК 621.31

Энергетические режимы трехфазной трехпроводной цепи / Сиротин Ю.А. // Вісник НТУ «ХП». Серія: Енергетика: надійність та енергоефективність. –Харків: НТУ «ХП». – 2013. –№.17 (990). –С.128-141. Бібліогр.:9 назв. Табл.: 2. Лл.: 1.

Для трёхфазной сети в точке підключення несимметричного навантаження розглянуті неврвноважений і незбалансований режими споживання електроенергії. Показано, що при синусоїдальних процесах ці режими визначають різні рівняння потужності. Отримано формули для обчислення потужності небалансу і неврвноваженості для синусоїдальних процесів в трипровідному ланцюгу при несимметричній напрузі.

Ключові слова: трифазний ланцюг, миттєва потужність, активна потужність, реактивна потужність, комплексна потужність, потужність небалансу, потужність пульсацій

Pulsed and unbalanced modes of power consumption are considered in connection point of asymmetrical load to three-phase network. It is shown that these modes define different power equations with sinusoidal processes. The formulas for calculating the pulsed power and unbalanced power are obtained for sinusoidal processes with asymmetric voltage in a three-wire circuit.

Keywords: three-phase circuit, instantaneous power, active power, reactive power, complex power, power unbalance

