

**П. Я. ПРИДУБКОВ**, канд. техн. наук, доц. «Українська державна академія залізничного транспорту», Харків;  
**І. В. ХОМЕНКО**, канд. техн. наук, доц. НТУ«ХПІ»

### ПРО МАГНІТНІ ПАРАМЕТРИ МАСИВНИХ ФЕРОМАГНІТНИХ ТІЛ

Досліджені й уточнені аналітичні залежності, що описують вплив струму, що протікає по матеріальних металевих тілах, на їхню намагніченість і на магнітні параметри поля, що утвориться навколо, а також встановлено вплив геометричних розмірів даних тіл на ці параметри.

**Ключові слова:** векторний потенціал, намагніченість, магнітні параметри поля, щільність струму.

**Вступ.** Параметри магнітного поля масивних феромагнітних тіл (заземлювачів, рейкових ниток) визначаються як намагніченістю (магнітним станом) феромагнітного матеріалу, з якого вони виготовлені, так і струмами, що протікають через дані тіла (тяговими струмами, струмами рейкових кіл, струмами заземлювачів).

У формуванні магнітного стану, а відповідно і магнітного поля струмопровідних об'ємних тіл поряд з молекулярними струмами беруть участь і струми провідності, що протікають через дані тіла. Молекулярні струми створюють магнітні моменти магнітних диполів, з яких утворюються спонтанно намагнічені області, що спричиняють залишкову намагніченість об'ємних тіл. Струми провідності формують своє магнітне поле, що впливає, у тому числі й на орієнтацію спонтанно намагнічених областей, що у свою чергу міняє магнітне поле об'ємних тіл.

Параметри магнітного поля, формованого навколо об'ємних струмопровідних тіл при використанні електромагнітних методів дефектоскопії, дозволяють виявити такі дефекти як злами без видимих вад, тріщини у вигляді світлої й темної плям, що перебувають під поверхнею масивного металевого тіла на глибині 4 мм і менш. А також тріщини й злами, які утворюються внаслідок внутрішніх надливів, через газові міхури й інші вади, у результаті недостатньої міцності металу, внаслідок утворення гартівних тріщин.

Таким чином, дослідження магнітного стану об'ємних магнітних струмоведучих тіл, уточнення аналітичних залежностей, що описують вплив молекулярних струмів і струмів провідності на параметри магнітного поля даних тіл, є актуальною проблемою, оскільки рішення даної проблеми дозволить забезпечити теоретичною базою розробку

© П. Я. Придубков, І. В. Хоменко, 2013

(проекування) нових пристроїв (систем) дефектоскопії.

**Основна частина.** Всі матеріальні тіла володіють тією чи іншою мірою магнітними властивостями, тобто є магнетиками. Присутність даних тіл здатне й змінити існуюче магнітне поле, і збуджувати своє магнітне поле. Внесення магнетиків (наприклад, заліза) у магнітне поле струмів викликає зміну (посилення) цього поля, зумовлену намагнічуванням магнетиків.

Магнітні властивості речовинних тіл обумовлені тим, що елементарні частки, що входять до складу атомів речовини, перебувають у безперервному русі. Електрони електронної оболонки обертаються по замкнутих орбітах. Крім того, і електрони і ядро атома володіють спином. У результаті кожна частка, що входить до складу атома, проявляє себе як елементарний замкнутий струм, магнітні властивості якого можуть бути охарактеризовані його магнітним моментом.

У магнетиках, що відносяться до провідників (метали), варто розрізнити дві складові мікроскопічної щільності струму  $\delta_{\text{мікро}}$ . По-перше, це струми провідності  $\delta_{\text{пр}}$ , що відповідають руху електричних зарядів, які переносять макроскопічний струм (вільні електрони в металах), а по-друге, молекулярні струми  $\delta_{\text{мол}}$  в нейтральних молекулах, що утворюють тверду кристалічну решітку металів і т.п.:

$$\delta_{\text{мікро}} = \delta_{\text{пр}} + \delta_{\text{мол}} \quad (1)$$

Основними рівняннями магнітного поля є рівняння закону Ампера або закону повного струму:

$$\text{rot}H = \delta \quad (2)$$

і рівняння, що описує принцип безперервності силових ліній магнітного поля, тобто відсутність вільних магнітних зарядів:

$$\text{div}B = 0 \quad (3)$$

Рівняння (2) і (3) представлені в диференціальній формі. Вектори магнітної індукції  $B$  й напруженості  $H$  магнітного поля для однорідних середовищ зв'язані співвідношенням:

$$B = \mu_a H = \mu_0 (H + J) \quad (4)$$

Порівняння рівнянь (2), (3) і (4) показує, що магнітна рівновага встановлюється лише в тому випадку, якщо вектор магнітної індукції  $B$  одночасно підкоряється рівнянням:

$$\text{div}B = 0, \quad \text{rot}B = \mu_a \delta \quad (5)$$

Рішенням рівнянь (5) є співвідношення:

$$B = \text{rot}A, \quad (6)$$

у якому вектор  $A$  підкоряється рівнянням [1]:

$$\nabla^2 A = -\mu_a \delta, \quad \text{div}A = 0 \quad (7)$$

З рішенням у вигляді (6) перше з рівнянь (5) виконується автоматично, тому що дивергенція ротора дорівнює нулю. Друге з рівнянь (5) записується у вигляді:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \nabla^2 A = \mu_a \delta$$

звідки й випливає умова (7).

Загальним рішенням рівнянь (7), що вказують на можливість магнітної рівноваги, є вираз:

$$A = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta}{R} dV, \quad (8)$$

де  $R$  – відстань від точки, у якій визначається векторний потенціал, до елемента об'єму  $dV$ , на які розбитий весь об'єм  $V$ ,  $\delta$  – щільність струму.

Векторний потенціал магнітного поля магнетиків повної щільності струмів  $\delta_{\text{мікро}}$ , що складається із щільності струмів провідності  $\delta_{\text{пр}}$  й щільності струмів молекулярних  $\delta_{\text{мол}}$ , описується наступною формулою [2]:

$$A = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_{\text{мікро}} dV}{R} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_{\text{пр}} dV}{R} + \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_{\text{мол}} dV}{R}$$

Перший доданок у правій частині останнього рівняння являє собою векторний потенціал  $A_{\text{пр}}$  струмів провідності:

$$A_{\text{пр}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_{\text{пр}} dV}{R}, \quad (9)$$

у той час як її другий доданок це не що інше, як векторний потенціал  $A_{\text{мол}}$  молекулярних струмів:

$$A_{\text{мол}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_{\text{мол}} dV}{R} \quad (10)$$

Таким чином, векторний потенціал  $A$  магнітного поля при наявності магнетиків складається із двох доданків:

$$A_{\text{мікро}} = A_{\text{пр}} + A_{\text{мол}} \quad (11)$$

У вирази (9) і (10) входять дійсні мікроскопічні щільності струмів, тоді як у макроскопічній теорії поля оперують середніми значеннями мікроскопічних величин, отже, необхідно відповідно перетворити й ці вираження.

Середнє значення  $\delta_{\text{пр}}$  по фізично нескінченно малому об'єму є та щільність струмів  $\delta$ , з якою тільки й оперує макроскопічна теорія, що не вводить явно в розгляд молекулярних струмів, тому:

$$\delta = \delta_{\text{пр}} \quad (12)$$

Таким чином, у макроскопічній теорії поля у вираженні для векторного потенціалу струмів провідності  $A_{\text{пр}}$  необхідно замінити  $\delta_{\text{пр}}$  на  $\delta$ :

$$A_{\text{пр}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta dV}{R} \quad (13)$$

Для знаходження вектора магнітної індукції  $B$  в будь-якій точці магнітного поля, створюваного струмами провідності, необхідно визначити ротор від векторного потенціалу  $A_{\text{пр}}$  відповідно до рівняння (6).

$$B = \operatorname{rot} A_{\text{пр}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \operatorname{rot} \frac{\delta}{R} dV \quad (14)$$

Але відповідно до диференціальних операцій над скалярами й векторами векторного аналізу [3]:

$$\operatorname{rot} \frac{\delta}{R} = -\frac{[\delta R]}{R^3} \quad (15)$$

тому:

$$B = \operatorname{rot} A_{\text{пр}} = -\frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \operatorname{rot} \frac{[\delta R]}{R^3} dV, \quad (16)$$

Таким чином, вектор напруженості  $H$  магнітного поля струмів провідності описується виразом:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\delta R]}{R^3} dV \quad (17)$$

Вектору напруженості  $H$  магнітного поля, створюваного струмом провідності елемента об'єму  $dV$ , тобто струмом, що змінює магнітний стан магнетика, відповідає вираз:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\delta R]}{R^3} dV \quad (18)$$

Тому що для більшості магнітних середовищ вектори намагніченості  $J$  й напруженості  $H$  магнітного поля зв'язані співвідношенням:

$$J = kH, \quad (19)$$

тут коефіцієнт  $k$  – магнітна сприйнятливості середовища, то вираз:

$$J = -k \frac{1}{4\pi} \frac{[\delta R]}{R^3} dV \quad (20)$$

є формулою визначення намагніченості  $J$  середовища, обумовленої струмом провідності, що протікає через це середовище.

Векторний потенціал  $A$  поля, порушеного елементом об'єму  $dV$  магнітного середовища, визначається рівнянням [2]:

$$A = \frac{[JR]}{R^3} dV \quad (21)$$

Тому з урахуванням співвідношення (11) вектору  $A$  відповідає вираження, яке після елементарних математичних перетворень здобуває наступний вид:

$$A = \frac{[JR]}{R^3} dV = -\frac{k}{4\pi} \left[ \frac{[\delta R]}{R^6} R \right] dV \quad (22)$$

очевидно, що:

$$-\frac{k}{4\pi} \left[ \frac{[\delta R]}{R^6} R \right] = -\frac{k}{4\pi} \frac{[[\delta R]R]}{R^6} \quad (23)$$

При розкритті подвійного векторного добутку [4] останнє вираження перетвориться в співвідношення:

$$-\frac{k}{4\pi} \left[ \frac{[\delta R]}{R^6} R \right] = -\frac{k}{4\pi} \frac{R(\delta R)}{R^6} + \frac{k}{4\pi} \frac{\delta(RR)}{R^6} \quad (24)$$

Таким чином, векторний потенціал  $A$  поля, порушеного елементом об'єму  $dV$  магнітного середовища, через який протікає струм щільністю  $\delta$ , може бути описаний наступною формулою:

$$A = -\frac{k}{4\pi} \frac{R(\delta R)}{R^6} + \frac{k}{4\pi} \frac{\delta}{R^4} \quad (25)$$

або:

$$A = \frac{k}{4\pi} \left( \frac{\delta}{R^4} - \frac{R(\delta R)}{R^6} \right) \quad (26)$$

Для знаходження вектора магнітної індукції  $dB$  в будь-якій точці магнітного поля, створюваного й струмами провідності і намагніченістю елементарного об'єму  $dV$  необхідно визначити ротор від векторного потенціалу  $A$  відповідно до рівняння (6)

$$dB = rot A = rot \frac{k}{4\pi} \left( \frac{\delta}{R^4} - \frac{R(\delta R)}{R^6} \right) dV \quad (27)$$

Щоб визначити параметри магнітного поля (вектори  $B$  й  $H$ ), формованого деяким об'ємом  $V$  електропровідного середовища, що володіє магнітними властивостями, необхідно проінтегрувати останній вираз, тобто:

$$B = \int_V rot \frac{k}{4\pi} \left( \frac{\delta}{R^4} - \frac{R(\delta R)}{R^6} \right) dV \quad (28)$$

Тому що величини  $k$  і  $\pi$  є величинами постійними, то їх можна винести з під знака інтеграла, тоді:

$$B = \frac{k}{4\pi} \int_V rot \left( \frac{\delta}{R^4} - \frac{R(\delta R)}{R^6} \right) dV \quad (29)$$

Крім того, виконання просторово диференціальної операції  $rot$  над добутком вільного вектора  $\delta$  й скаляра  $1/R^6$  приводить до наступного результату:

$$rot \frac{\delta}{R^4} = \frac{4[R\delta]}{R^6} \quad (30)$$

У той час як узяттю аналогічної операції над скалярним добутком радіуса – вектора  $R$  й вільного вектора  $\delta$ , що помножено на скаляр  $1/R^6$ , відповідає вираз:

$$rot \frac{R(\delta R)}{R^6} = \frac{[\delta R]}{R^6} - \frac{6[RR](\delta R)}{R^8} \quad (31)$$

Тому що векторний добуток двох однакових векторів  $[RR]$  дорівнює нулю [4] ( $[RR]=0$ ), вираз (14) спрощується:

$$rot \frac{R(\delta R)}{R^6} = \frac{[\delta R]}{R^6} \quad (32)$$

Таким чином, формула (29), що виражає визначення вектора  $B$  за допомогою векторного потенціалу  $A$ , описується співвідношенням:

$$B = \frac{k}{4\pi} \int_V \left( \frac{4[R\delta]}{R^6} - \frac{[\delta R]}{R^6} \right) dV \quad (33)$$

Зміна місця знаходження векторів векторного добутку міняє знак даного добутку:

$$\frac{[R\delta]}{R^6} = -\frac{[\delta R]}{R^6} \quad (34)$$

отже, вектору магнітної індукції  $B$  відповідає вираз:

$$B = \frac{k}{4\pi} \int_V \left( \frac{5[R\delta]}{R^6} \right) dV \quad (35)$$

Таким чином, напруженість  $H$  магнітного поля, створюваного намагніченим тілом, по якому протікає струм щільністю  $\delta$ , може бути визначена формулою:

$$H = \frac{k}{4\pi\mu_a} \int_V \left( \frac{5[R\delta]}{R^6} \right) dV \quad (36)$$

З огляду на, що  $R = r_0 R$ , тому:

$$H = \frac{k}{4\pi\mu_a} \int_V \left( \frac{5[r_0\delta]}{R^5} \right) dV, \quad (37)$$

де  $r_0$  – одиничний вектор у напрямку  $R$ .

**Висновки.** Таким чином, отримані вирази (35) і (37) показують, що параметри (вектори  $B$  й  $H$ ) магнітного поля, формованого навколо електропровідних металевих (ферромагнітних) тіл, визначаються їхніми геометричними розмірами, залежать від магнітних властивостей

матеріалу цих тіл і щільності струму, що протікає. Дані формули (35) і (37) можуть бути використані, наприклад, при розробці пристроїв діагностики й контролю справності рейкових ниток та заземлювачів.

**Список літератури:** 1. *Тоннела М. А.* Основы электромагнетизма и теории относительности / *М. А. Тоннела.* – М. :Издательство иностранной литературы, 1962. – 483 с. 2. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества / *И. Е. Тамм.* – М. :Издательство физико - математической литературы, 2006 . – 616 с. 3. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики / *Э. Маделунг.* – М. : Государственное издательство физико – математической литературы, 1960. – 618 с. 4. *Анго А.* Математика для электро – и радиоинженеров / *А. Анго.* – М. : Наука, 1964. – 772 с.

*Надійшла до редколегії 10.10.2013*

УДК 621.3.01

**Про магнітні параметри масивних феромагнітних тіл / П. Я. Придубков, І. В. Хоменко // Вісник НТУ «ХП».** Серія: Енергетика: надійність та енергоефективність. – Х. : НТУ «ХП», 2013. – № 59 (1032). – С. 147–153. – Бібліогр.: 4 назв.

Исследованы и уточнены аналитические зависимости, описывающие влияние тока, протекающего по материальным металлическим телам, на их намагниченность, и на магнитные параметры поля, образующегося вокруг, а также установлено влияния геометрических размеров данных тел на эти параметры

**Ключевые слова:** векторный потенциал, намагниченность, магнитные параметры поля, плотность тока.

Analytical dependences, describing influencing of current flowing on material metallic bodies, are explored and specified, on their magnetized, and on the magnetic parameters of the field appearing around, and also influences of geometrical sizes of the given bodies are set on these parameters.

**Keywords:** vector potential, magnetization, magnetic field properties, current density.