УДК 621.311.014

Ю.Н. ВЕПРИК, д-р техн наук, проф., НТУ "ХПИ";
О.А. ГАНУС, инж. АК «ХОЕ», асп., НТУ "ХПИ"

ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ УЗЛОВ ДВИГАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В статье рассматриваются математические модели переходных процессов в электрических системах с узлами двигательной нагрузки в фазных переменных. Данные модели требуют выполнения на каждом шаге интегрирования вычисления и обращения матриц индуктивностей электрических машин. Предложен алгоритм получения прямых и обратных матриц индуктивностей электрических машин в аналитической форме.

Ключевые слова: энергосистема, переходные процессы, математическая модель, электрические машины, двигательная нагрузка

Вступление. Узлы двигательной нагрузки являются одним из наиболее чувствительных к нарушениям электроснабжения элементов, для предотвращения отрицательных последствий таких нарушений совершенствуются средства противоаварийного управления и защиты, растет насыщенность коммутационным оборудованием. Все внешние, управляющие и защитные воздействия сопровождаются переходными процессами, поэтому возрастает доля переходных процессов и степень их влияния на режимы функционирования как узлов двигательной нагрузки, так и внешней энергосистемы. Возрастают и требования к качеству моделирования переходных аварийных режимов, так как упрощенные модели не обеспечивают требуемой точности решения, имеют ограниченный круг решаемых задач. Чтобы обеспечить точность моделирования представляется целесообразным применение уравнений в фазных переменных и неявных методов численного интегрирования.

Постановка задачи и анализ публикаций. Уравнения вращающихся электрических машин в фазных переменных из научной и учебной литературы известны, однако приводятся они, как правило, лишь для обоснования перехода к другим системам координат, после чего необходимость в определении параметров в фазных координатах отпадает. Поэтому в настоящее время параметров электрических машин в фазных переменных в справочной литературе нет и методики их определения отсутствуют, что является одним из факторов, ограничивающих применение уравнений в фазных переменных. задачах моделирования переходных процессов в синхронных и

асинхронных электрических машинах (ЭМ) в настоящее время широко используются уравнения Парка-Горева. Однако почти исключительное их применение для решения этих задач было связано сначала с ограниченными возможностями вычислительной техники, а затем – со сложившейся традицией [1]. Переход к уравнениям Парка-Горева основан на линейном преобразовании, в результате которого получаются уравнения с постоянными коэффициентами. Однако постоянство коэффициентов обеспечивается лишь при условиях, когда:
- симметричны параметры ЭМ;
- отсутствуют несимметричные элементы в сети;
- сохраняется неизменной скорость вращения ЭМ.

При невыполнении хотя бы одного из этих условий переменные коэффициенты сохраняются и в преобразованных уравнениях, поэтому переход к уравнениям Парка-Горева не дает каких-либо преимуществ. Однако само преобразование Парка-Горева полезно при решении целого ряда вопросов теории электрических систем, в частности, может быть использовано для получения матриц индуктивностей (прямых и обратных) электрических машин в аналитической форме.

Основная часть. Получение прямых и обратных матриц индуктивностей в аналитической форме ниже показано на примере асинхронных двигателей (АД). равнения электромагнитных переходных процессов АД в дифференциальной форме имеют вид:

$$\begin{bmatrix} L_S & L_{SR}\\ L_{RS} & L_R\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_S\\ i_R\end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix}0 & \dfrac{dL_{SR}(\gamma)}{d\gamma}\\ \dfrac{dL_{RS}(\gamma)}{d\gamma} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_S\\ i_R\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} r_S & \\ & r_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_S\\ i_R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_S\\ 0\end{bmatrix}; \tag{1}$$

где

$$L_S=\begin{bmatrix} L_{11} & & \\ & L_{11} & \\ & & L_{11}\end{bmatrix};\ L_R=\begin{bmatrix} L_{22} & & \\ & L_{22} & \\ & & L_{22}\end{bmatrix};\ \left[L_{SR}\right]=L_{12}\left[C_\gamma\right];\ \left[L_{RS}\right]=L_{21}\left[C_\gamma\right]^{\mathrm{T}}$$

– индуктивности (собственные и взаимные) обмоток статора и ротора,

$$\left[C_\gamma\right]=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \cos\left(\gamma+\dfrac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma-\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ \cos\left(\gamma-\dfrac{2\pi}{3}\right) & \cos\gamma & \cos\left(\gamma+\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ \cos\left(\gamma+\dfrac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma-\dfrac{2\pi}{3}\right) & \cos\gamma\end{bmatrix}.$$

Или в более компактной форме:

$$\left[L_{AD}\right]\frac{d}{dt}[i]+\left(\omega\left[\frac{dL}{d\gamma}\right]+[R]\right)[i]=\begin{bmatrix}u_S\\0\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Для перехода к конечно-разностным уравнениям, уравнения (2) нужно разрешить относительно производных:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}=-\left[L(\gamma)\right]^{-1}\left(\omega\left[\frac{dL(\gamma)}{d\gamma}\right]+\begin{bmatrix}r_S & \\ & r_R\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}+\left[L(\gamma)\right]^{-1}\begin{bmatrix}U_S\\0\end{bmatrix},$$

и перейти к разностной аппроксимации в соответствии с формулой Эйлера:

$$\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}^{(k+1)}=\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}^{(k)}-h\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\left(\omega\left[\frac{dL(\gamma)}{d\gamma}^{(k+1)}\right]+\begin{bmatrix}r_S & \\ & r_R\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}^{(k+1)}+h\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\begin{bmatrix}u_S\\0\end{bmatrix}^{(k+1)}.$$

Если перенести элементы, содержащие токи обмоток статора i_s и ротора i_R на $(k+1)$ - м шаге, в левую часть и ввести обозначение

$$\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]=[E]+h\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\left(\omega\left[\frac{dL(\gamma)}{d\gamma}^{(k+1)}\right]+\begin{bmatrix}r_S & \\ & r_R\end{bmatrix}\right),$$

то уравнения приймут вид:

$$\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}^{(k+1)}=h\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\begin{bmatrix}u_S\\0\end{bmatrix}^{(k+1)}+\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}^{(k)}. \qquad (3)$$

Умножив обе части уравнения (3) на обратную матрицу $\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]$, получим окончательно:

$$\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}^{(k+1)}=h\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\begin{bmatrix}u_S\\0\end{bmatrix}^{(k+1)}+\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}^{(k)},$$

или в более краткой форме:

$$\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}^{(k+1)}=\left[Y(\gamma)^{(k+1)}\right]\begin{bmatrix}u_S\\0\end{bmatrix}^{(k+1)}+\begin{bmatrix}j_S\\j_R\end{bmatrix}^{(k)},$$

где $\left[Y(\gamma)^{(k+1)}\right]=h\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}$; $\begin{bmatrix}j_S\\j_R\end{bmatrix}^{(k)}=\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\begin{bmatrix}i_S\\i_R\end{bmatrix}^{(k)}$.

Мгновенные значения скорости ω и угла ротора γ на шаге интегрирования определяются из уравнения движения привода:

$$M_{EM}+M_{MEX}=T_j\frac{d\omega}{dt},$$

где M_{EM} - электромагнитный момент, M_{MEX} - механический момент.

При наличии периодически изменяющихся индуктивностей в (1)-(2), матрицы параметров *L(γ), Y(γ), A(γ)* необходимо вычислять и обращать на аждом шаге численного интегрирования. Для повышения эффективности вычислительных процедур, матрицы индуктивностей (прямые и обратные) обмоток АД можно представить в аналитической форме с помощью формул преобразования Парка-Горева. Матрицы статорного и роторного преобразований Парка для АД имеют вид:

$$\Pi_S=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}\cos\gamma_t & \cos\left(\gamma_t-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma_t+\frac{2\pi}{3}\right)\\ -\sin\gamma_t & -\sin\left(\gamma_t-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma_t+\frac{2\pi}{3}\right)\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Pi_R=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}\cos(\gamma_t-\gamma) & \cos\left(\gamma_t-\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma_t-\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)\\ -\sin(\gamma_t-\gamma) & -\sin\left(\gamma_t-\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma_t-\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Матрицы Π_S и Π_R обеспечивают приведение переменных статора и ротора к координатным осям, вращающимся с произвольной скоростью ω_t. При этом $\gamma_t=\int_0^t\omega_t dt+\gamma_{t0}$; $\gamma=\int_0^t\omega_r dt+\gamma_0$.

Обратные матрицы Π_S^{-1} и Π_R^{-1} имеют вид:

$$\Pi_S^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\gamma_t & -\sin\gamma_t & 1\\ \cos\left(\gamma_t-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma_t-\frac{2\pi}{3}\right) & 1\\ \cos\left(\gamma_t+\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma_t+\frac{2\pi}{3}\right) & 1\end{bmatrix}$$

$$\Pi_R^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(\gamma_t-\gamma) & -\sin(\gamma_t-\gamma) & 1\\ \cos\left(\gamma_t-\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma_t-\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & 1\\ \cos\left(\gamma_t-\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma_t-\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & 1\end{bmatrix}$$

Переход от исходной матрицы индуктивностей обмоток АД в фазных координатах $\left[L^F\right]=\begin{bmatrix}L_S & L_{SR}\\ L_{RS} & L_R\end{bmatrix}$, где

$$\left[L_s\right]=\begin{bmatrix}L_1 & M_1 & M_1\\ M_1 & L_1 & M_1\\ M_1 & M_1 & L_1\end{bmatrix},\quad \left[L_{SR}\right]=L_{12}\begin{bmatrix}\cos\gamma & \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)\\ \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\gamma & \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)\\ \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\gamma\end{bmatrix},$$

$$\left[L_R\right]=\begin{bmatrix}L_2 & M_2 & M_2\\ M_2 & L_2 & M_2\\ M_2 & M_2 & L_2\end{bmatrix},\quad \left[L_{RS}\right]=L_{12}\begin{bmatrix}\cos\gamma & \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)\\ \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\gamma & \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)\\ \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\gamma\end{bmatrix},$$

выполняется с помощью прямой и обратной матриц преобразования Парка:

$$[\Pi]=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}\cos\gamma & \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0\\ -\sin\gamma & -\sin\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\gamma & \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\gamma & -\sin\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$[\Pi]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 1 & 0 & 0 & 0\\ cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & 1 & 0 & 0 & 0\\ \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos(\gamma_e-\gamma) & -\sin(\gamma_e-\gamma) & 1\\ 0 & 0 & 0 & cos\left(\gamma_e-\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma_e-\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(\gamma_e-\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\gamma_e-\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & 1\end{bmatrix}.$$

Для получения матрицы индуктивностей во вращающейся системе координат $[L]^{\Pi}$ нужно исходную матрицу $[L]^F$ умножить слева на матрицу $[\Pi]$, а справа – на $[\Pi]^{-1}$:

$$\left[L^{\Pi}\right]=[\Pi]\left[L^F\right][\Pi]^{-1}. \qquad (4)$$

Умножение матрицы $\left[L^F\right]$ на матрицу $[\Pi]$ слева и на $[\Pi]^{-1}$ справа дает матрицу

$$\left[L^{\Pi}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}L_{11} & & & L_{12} & & \\ & L_{11} & & & L_{12} & \\ & & L_{11} & & & \\ \hline L_{21} & & & L_{22} & & \\ & L_{21} & & & L_{22} & \\ & & & & & L_{22}\end{array}\right]$$

При известной матрице $\left[L^{\Pi}\right]$ из (4) можно найти матрицу $\left[L^F\right]$:

$$\left[L^F\right]=[\Pi]^{-1}\left[L^{\Pi}\right][\Pi] \qquad (5)$$

и ей обратную:

$$\left[L^F\right]^{-1}=[\Pi]^{-1}\left[L^{\Pi}\right]^{-1}[\Pi]. \qquad (6)$$

Аналогично определяются матрицы (прямая и обратная) индуктивностей для синхронных двигателей (СД). При расчетах переходных процессов как в электрических машинах, так и в электрических системах обращение матриц индуктивностей $\left[L^F\right]$ выполняется при приведении исходной системы дифференциальных уравнений (1) к форме Коши, а также на каждом шаге расчета переходных процессов методами численного интегрирования. Пользуясь формулами (5)-(6), можно исключить операцию многократного обращения матрицы $\left[L^F(\gamma)\right]$ при изменениях угла γ в ходе переходных процессов, так как эти выражения позволяют непосредственно определять все элементы обратной матрицы в функции угла γ. Использование аналитических выражений (5)-(6) для элементов обратных матриц СМ позволяет, во-первых, уменьшить объем вычислений при моделировании переходных процессов уравнениями в фазных переменных и, во-вторых, что более существенно, уменьшить погрешности вычислений, возникающих при многократном повторении операции обращения матриц индуктивностей.

Выводы. Дискретизация и алгебраизация компонентных уравнений позволяет перейти от задачи решения нелинейных интегро-дифференциальных систем уравнений к многократному решению линеаризованной системы алгебраических уравнений, что соответствует дискретизации математической модели анализируемой системы в отдельных точках рассматриваемой временной области. Полученные с использованием преобразования Парка-Горева аналитические выражения для элементов обратных матриц индуктивностей синхронных и асинхронных двигателей позволяют исключить операции многократного их обращения в ходе численного интегрирования и уменьшить погрешности вычислений.

Список литературы: 1. *Ульянов С.А.* Электромагнитные переходные процессы в электрических системах. / *С.А. Ульянов* - М.: Энергия, 1970. 2. *Гамазин С. И.* Переходные процессы в системах электроснабжения с двигательной нагрузкой. / *С.И. Гамазин, Г.А. Садыкбеков.* – Алма-Ата: Гылым, 1991, С. 301. 3. *Веприк Ю.Н.* Математическое моделирование переходных процессов в электрических сетях с изолированной нейтралью в фазных координатах. / *Ю.Н. Веприк, С.Н. Лебедка, В.Ю. Веприк* - Электротехника и электромеханика. - 2005. № 3. С. 74-77. 4. *Коськин Ю.П.* Расчёт переходных процессов в автономных электроэнергетических системах. / *Ю.П. Коськин, Н.Н. Смирнова* – Электричество - 1987, № 4. 5. *Рудевіч Н.В.* Математична модель синхронного генератора в фазних координатах для дослідження електромагнітних перехідних процесів в середовищі Matlab. / *Н.В. Рудевіч, М.Ф. Піскурьов.* – Вісник НТУ «ХПІ» - 2013. - № 17. С. 115-119.

Надійшла до редколегії 03.10.2013

УДК 621.311.014

Параметры электрических машин в математических моделях узлов двигательной нагрузки / Веприк Ю.Н., Ганус О.А. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетика: надійність та енергоефективність. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – № 59 (1032). – С. 40–46. – Бібліогр.: 5 назв.

У статті розглядаються математичні моделі перехідних процесів в електричних системах з вузлами двигунного навантаження в фазних змінних. Дані моделі вимагають виконання на кожному кроці інтегрування обчислення та звернення матриць індуктивностей електричних машин. Запропоновано алгоритм отримання прямих і зворотних матриць індуктивностей електричних машин в аналітичній формі.

Ключові слова: енергосистема, перехідні процеси, математична модель, електричні машини, двигунне навантаження

Mathematical models of transients in electrical systems with nodes of motor load in the phase variables are discussed. These models require the performance computation and inversion of inductance matrix of electrical machines at each step of the integration. The algorithm for obtaining the direct and inverse inductance matrices of electrical machines in the analytical form is proposed.

Keywords: power system, transients, mathematical model, electrical machines, motor load