

В. Г. СОЛОДОВ

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Обсуждается современное состояние проблемы моделирования турбулентности. При этом существенное внимание уделяется проблеме расчета крупномасштабной турбулентности (LES). Подход основан на осреднении уравнений Навье-Стокса со специальным фильтром, настроенным на выделение вихрей не менее определенного размера. Представлены некоторые методические аспекты моделирования и проблематика подхода к моделированию.

Ключевые слова: турбулентность, моделирование больших вихрей, фильтрование уравнений Навье-Стокса.

Введение. Турбулентность – всеохватывающее свойство жидкого, газообразного и плазменного состояния вещества. Закономерности турбулентности проявляются в космосе, атмосфере, гидросфере, в разнообразных технических устройствах и биологических системах.

Общей теории турбулентности нет до сих пор, несмотря на старания выдающихся ученых за последние сто лет. В последние десятилетия некоторое развитие получило прямое моделирование турбулентности на крупных вычислительных системах, аккуратная реализация которого, однако, сопряжена с трудно преодолимыми вычислительными затратами сейчас и в ближайшей перспективе.

Наряду с прямым моделированием, развитие также получило менее трудоемкое моделирование турбулентности на основе упрощенного подхода, направленное на выделение основных особенностей турбулентности, так называемое моделирование больших вихрей (*Large Eddy Simulation – LES*).

В настоящее время библиография по *LES* в мировой научной литературе насчитывает несколько тысяч источников. Данное направление развивается и дает конкретные практические результаты, как в предсказании погоды, так и в совершенствовании процессов и машин.

Данная работа является кратким обзором основополагающих результатов по моделированию больших вихрей в турбулентности на основании доступных автору публикаций.

1. Уравнения движения и модели турбулентности. Общие свойства турбулентного режима у Хинце, Монина, Колмогорова, Pope, Sagaut, Berselli, Shlaetter [1, 4, 13, 14, 15, 18, 20] представляются следующим образом.

- Турбулентность в измерениях проявляется в виде случайных пульсаций параметров течения в широком диапазоне частот и масштабов.
- Турбулентность возникает при доминировании инерционных свойств течения над вязкими и представляет собой каскад неустойчивостей ламинарных фрагментов течения.
- Турбулентным течениям присущи свойства диффузности и диссипативности.
- Капельность при возникновении турбулентности не является определяющим свойством.
- Турбулентное течение является вращательным в принципе и представляет иерархию вихрей, состоящих в прямом/обратном каскадном процессе обмена энергией пульсаций; поэтому турбулентность трехмерна и нестационарна.
- Турбулентность является свойством течения и не распространяется до молекулярных масштабов, проявляется как свойство именно сплошной среды, но не ее молекулярных свойств.

На рис. 1 показаны отличия актуальной картины турбулентного течения вокруг профиля и осредненного течения. На первом снимке представлена мгновенная картина колеблющегося следа за профилем при числе Маха $M = 0,6$ и числе $Re = 220000$ с применением высокоскоростной съемки, и волны, движущиеся вверх по потоку вдоль каждой из поверхностей профиля. На втором снимке экспозиция в $1/400$ с осредняет это течение по двенадцати циклам, создавая иное представление о движении [21].

Турбулентность обыкновенно изучается на основе уравнений Навье-Стокса (NSE), т. е. на макроуровне, однако существуют работы по турбулентности на основе уравнения Больцмана.

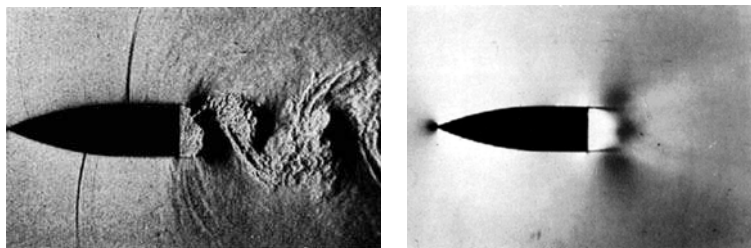


Рис. 1 – Нестационарное и осредненное во времени обтекание профиля [21]

Система уравнений гидродинамики состоит из уравнения неразрывности, уравнения движения и уравнения энергии. Ниже записано уравнение движения при простейших предположениях несжимаемой ньютоновой среды, которое обычно представляется как уравнение Навье-Стокса,

$$u_t + \nabla \cdot (u \otimes u) - \nu \nabla^2 u + \nabla p^* = f, \\ \nabla \cdot u = 0; \quad \Omega \times (0, T), \quad \Omega \in \mathbb{R}^3.$$

Область применимости NSE определяется критериальными условиями, среди которых условие Кнудсена (на основе максвелловского закона распределения нейтральных молекул по скоростям): $Kn \equiv \lambda/L < 0,1$, ($\lambda \sim 6_{10} - 8$ м), и условие Труделла [16]: $Tr \equiv \mu \varepsilon / \rho = 1,5 Kn \cdot M < 1$. Таким образом, уравнения NS неприменимы: а) для разреженных газов, на больших скоростях; б) для несжимаемых жидкостей с большой вязкостью при высоких скоростях деформаций.

По уровню приближения в классификации доминирует прямое моделирование турбулентности (DNS) на основе уравнений Навье-Стокса и подходящей разностной сетки (рис. 2). Оно иногда называется численным экспериментом в связи с высокой степенью достоверности.

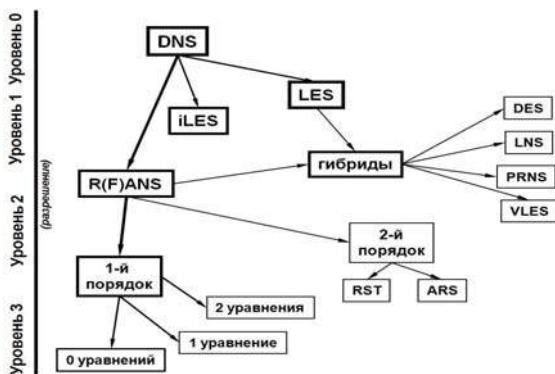


Рис. 2 – Иерархия основных моделей турбулентности, по [3] (Blazek, 2001)

При прямом моделировании турбулентности подразумевается разрешение всех масштабов в объеме L^3 с числом степеней свободы $N = O(Re^{9/4})$ [19] (Landau, 1950). Количество точек для разрешения течения в канале $N \sim (0,1Re)^{9/4}$ [9] (Moin, 1982). Временной шаг для разрешения течения в канале $\Delta t \sim 0,1L/(U \cdot Re^{1/2})$ [5] (Kim, et al., 1987). В технических приложениях преобладает высокорейнольдсова турбулентность. Учет основных характеристик DNS приводит к выводу большинства ведущих ученых – в ближайших 20–30 лет DNS для практически важных инженерных приложений будет недоступно.

Внизу схемы (рис. 2) находятся модели низкой степени приближения для осредненных уравнений NS, как по времени, так и по пространству. Осреднение проводится обыкновенно весьма упрощенно, однако вызывает необходимость замыкания NSE в силу нелинейности конвективного оператора. Эти

замыкания в нижней части схемы, как правило, стационарны и имеют отношение к частным течениям.

Таблица 1 – Употребительные сокращения в теории моделирования турбулентности

| | |
|---------|---|
| ARS | Алгебраическая модель реинольдсовых напряжений |
| DES | Моделирование отсоединенных вихрей (Detached Eddy Simulation) |
| DNS | Прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation) |
| ILES | Неявное моделирование крупных вихрей |
| LES | Моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation) |
| LNS | Моделирование ограниченных численных масштабов (Limited Numerical Scales) |
| MILES | Монотонное интегрирование LES (Monotone Integrated LES) |
| PRNS | Частично разрешаемые уравнения Навье-Стокса |
| R(F)ANS | Моделирование на основе уравнений NS, осредненных по Рейнольдсу (Фавру) |
| RSM | Модель реинольдсовых напряжений (Reynolds Stress Model) |

2. Осреднение уравнений NS. С целью упрощения моделирования турбулентности уравнения NS осредняются а) по Рейнольдсу, б) по Фавру (с весовой плотностью).

Осреднение уравнений NS по Рейнольдсу (URANS):

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \psi dt; \quad \psi = \bar{\psi} + \psi';$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}'u_i') = 0.$$

При этом возникает проблема замыкания для $\bar{\rho}'u_i'$ уже в уравнении неразрывности, а также в уравнениях движения и в уравнении энергии.

Осреднение уравнений NS по Фавру (UFANS):

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\bar{\rho}\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \rho \psi dt \equiv \frac{\bar{\rho}\psi}{\bar{\rho}}; \quad \psi = \tilde{\psi} + \psi'';$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\tilde{u}_i) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}[\tilde{\tau}_{ji} - \bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_i''];$$

Осреднение по Фавру дает более простой вид осредненных уравнений NS. Для несжимаемой среды осреднение по Фавру превращается в осреднение по Рейнольдсу.

Оба типа осреднения действуют сразу на все масштабы турбулентных структур. Осредненные уравнения не замкнуты из-за нелинейности конвективного оператора, замыкание обеспечивается моделями турбулентности (см. например, [22]).

3. Фильтрованные (FNS) уравнения NS.

Подход к моделированию больших вихрей (LES) является промежуточным по степени разрешения турбулентных структур между DNS и решением осредненных уравнений Навье-Стокса. Концепция

фільтрування основана на осередненні уравнений NS с применением фильтра.

Осредненные величины представляются операторами $\bar{\psi}(x) = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} \psi(\xi) G(x, \xi) d\xi$ – в физическом пространстве; операторами $\bar{\psi}^\Phi(k, t) = G^\Phi(k) \psi^\Phi(k, t)$ – в спектральном пространстве. Актуальная величина представляется в виде $\psi = \bar{\psi} + \psi'$, ядро оператора осереднения $G(x, \xi) = f(\Delta, |x - \xi|)$; его условие нормировки $\int_{\Omega} G(x, \xi) d\Omega = 1$. При этом обеспечивается сходимость к актуальному решению $\bar{\psi} \rightarrow \psi : L^2(\Omega)$, if $\Delta \rightarrow 0$ и $\|\bar{\psi}\| \leq C\|\psi\|$.

Существует разнообразие фильтров с различными ядрами (см. например, [22]). Наиболее употребительны классические фильтры:

а) прямоугольный или «коробчатый» фильтр с представлением ядра в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 1/\Delta, & |x - \xi| < \Delta/2; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$G^\Phi(k) = \prod_{j=1}^3 \frac{\sin(0,5\Delta k_j)}{0,5\Delta k_j}.$$

б) гауссов фильтр:

$$G(x, \xi) = \left(\frac{6}{\pi\Delta^2} \right)^{3/2} \exp \left[-6 \frac{(x - \xi)^2}{\Delta^2} \right];$$

$$G^\Phi(k) = \exp(-\Delta^2 k^2 / 24)$$

в) спектральный фильтр:

$$G(x, \xi) = \frac{\sin(\pi(x - \xi)/\Delta)}{\pi(x - \xi)};$$

$$G^\Phi(k) = 0; 1, \text{ if } |k_j| \leq \pi/\Delta, j = 1...3.$$

Их графические представления можно встретить в [14, 22].

Гауссов фильтр (как и фильтры на его основе) как в физическом, так и в спектральном пространствах локален, остальные этим важным свойством не обладают.

Спектральный фильтр уничтожает Фурье моды волнового числа большие, чем волновое число отсечения (рис. 3, а); фильтр не локален в физическом пространстве. Позволяет рассчитывать разрешение турбулентных пульсаций не выше частоты отсечения по фильтру.

Невыделенные фильтром особенности должны моделироваться. Если фильтр является оператором Рейнольдса, то $G(x, \xi) = 1$. При наличии анизотропии турбулентности предложены обобщения фильтров.

Осреднение уравнений Навье-Стокса с использованием фильтра приводит к осреднению конвективного оператора, в котором появляется среднее от произведения компонент скорости:

$$u_i u_j = (\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j) = \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j + u'_i u'_j.$$

Применение операции фильтрования к нелинейному конвективному члену NSE исторически

было двухступенчатым. Вначале оператор представлялся в виде суммы тензоров перекрестных и рейнольдсовых напряжений.

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + C_{ij} + R_{ij}.$$

В 1974 г. Leonard [8] привел конвективный оператор к современному виду.

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}.$$

Здесь $L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ – разрешаемые леонардовы напряжения; $C_{ij} = \overline{(\bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j)}$ – перекрестные напряжения; $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ – подсеточные (SGS) рейнольдсовы напряжения. Если фильтр является оператором Рейнольдса, то $\bar{u} = \bar{u}$, $\bar{u}' = 0$, $\bar{u} u = \bar{u} \cdot \bar{u}$ и $C_{ij} \equiv L_{ij} \equiv 0$. Таким образом, для оператора фильтра по Рейнольдсу остаются только рейнольдсовы напряжения.

Концепция сеточного фильтрования численных решений уравнений NS состоит в специальном ограничении решений, связанном с размером сетки. Невыделенные фильтром свойства решения моделируются дополнительной приближенной моделью на основе разрешаемых масштабов.

В спектральном пространстве кривая-образ кинетической энергии показывает разрешение низких частот до частоты отсечения (рис. 3, а). На рис. 3, б схематически показаны структуры, которые разрешаются в рамках фильтрованных уравнений. Частотный спектр плотности кинетической энергии турбулентных пульсаций в каверне (рис. 4) показывает насколько DNS богаче RANS.

Система RANS не позволяет явно управлять моделированием, так как отрезающая частота не специфицирована в осредняющем операторе. LES принципиально основана на разделении масштабов. Наименьшие масштабы моделируются статистической моделью подфильтровых/подсеточных масштабов (SFS/SGS). Отрезание высших частот обосновано гипотезой локальной изотропии Колмогорова. LES, использующая фильтрующий оператор, ведет к нестационарному явному 3D моделированию. LES, основанная на специальной аппроксимации схемы, ведет к нестационарному неявному 3D моделированию (iLES).

4. Определение масштабов. Большие масштабы описывают динамику турбулентности, ее физический механизм, перенос турбулентности, и производство турбулентной кинетической энергии вихрей больших масштабов. Большие масштабы чувствительны к граничным условиям, т.е. анизотропны; содержат основную часть (80–90 %) турбулентной кинетической энергии. Малые масштабы универсальны и изотропны по Колмогорову; ответственны только за вязкую диссипацию; содержат лишь несколько процентов полной кинетической энергии.

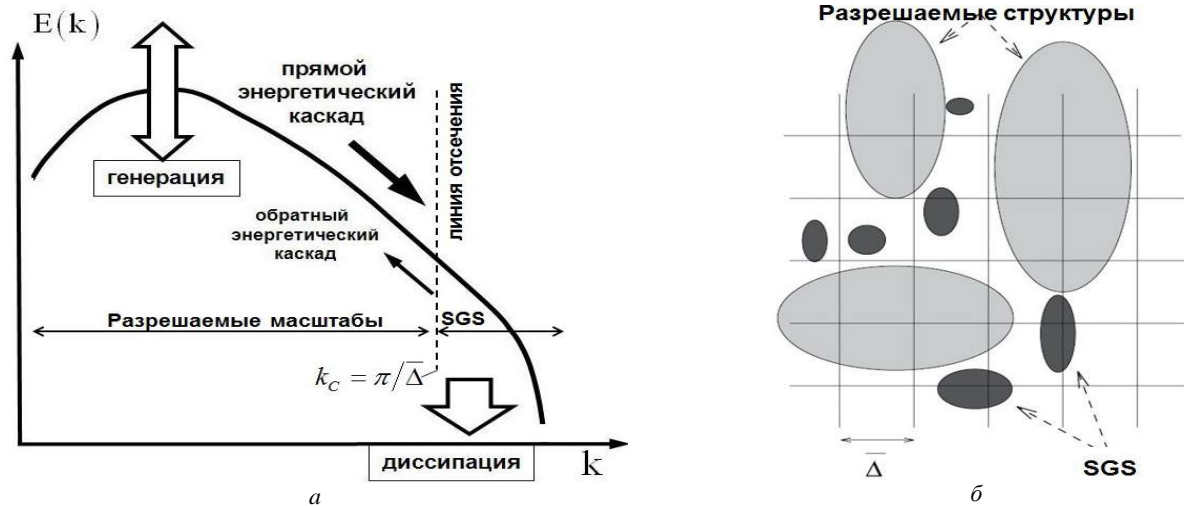


Рис. 3 – Энергетический каскад и разрешаемые турбулентные структуры:
 а – спектральное представление турбулентности: кинетическая энергия турбулентных пульсаций – интеграл от турбулентного спектра по волновым числам; б – разрешаемые и подсеточные турбулентные структуры [14]

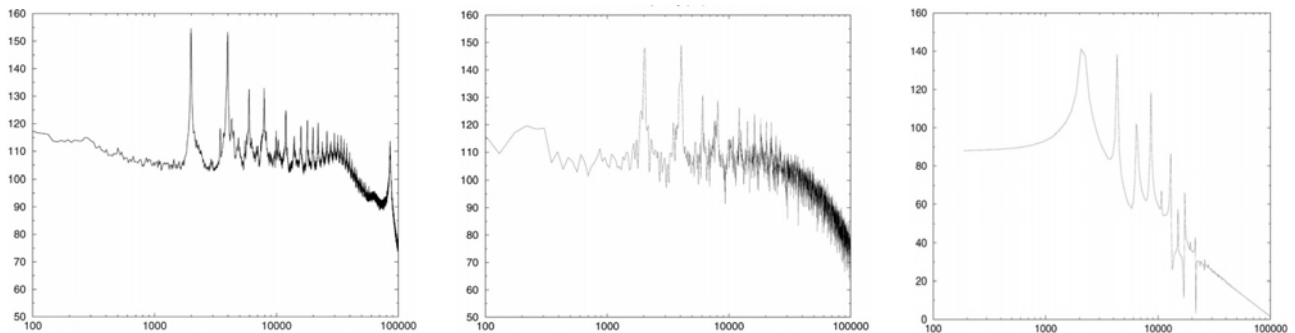


Рис. 4 – Спектральная плотность кинетической энергии турбулентных пульсаций в каверне в функции частоты, Гц [14]:
 слева DNS (L. Jacquin), в центре LES (L. Larcheveque), справа URANS (V. Gleize, ONERA)

Физические ограничения для подсеточных моделей [1, 10, 12, 13, 14, 15]. Подсеточные (SGS) модели должны отражать свойства симметрии, присущие истинным масштабам; SGS модели должны быть совместимы с DNS моделями. SGS модели должны иметь то же воздействие на разрешаемые масштабы, что и истинные подфильтровые (SFS) масштабы (дисперсия, диссипация, диффузия).

Вычислительные ограничения для подсеточных моделей. SGS модели должны быть экономичны, локальны во времени и пространстве; SGS модели не должны индуцировать численные неустойчивости и ложные эффекты.

Ниже приводятся оценки по вычислительным требованиям к разрешению. Колмогоровский масштаб

$$\text{длины} - \eta = (v^3 / \varepsilon)^{1/4}, \text{ где } \varepsilon = \frac{1}{2} v \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 -$$

скорость диссипации энергии. Вязкая диссипация кинетической энергии доминирует в диапазоне $0,1 < k\eta < 1$, где k – волновые числа, иначе $6\eta < L < 60\eta$; при этом диаметр червеобразных ("wormlike") структур турбулентности составляет $4\eta - 10\eta$.

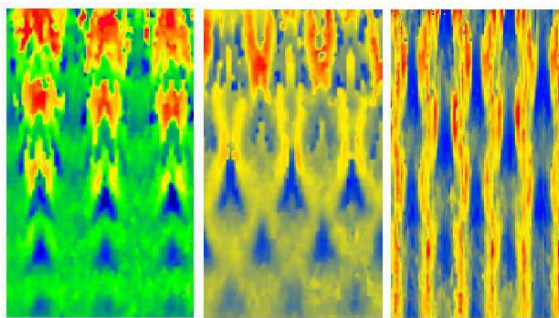
DNS разрешение изотропной турбулентности и сдвигового течения (табл. 2). При DNS подразумевается разрешение всех масштабов в объеме L^3 с числом степеней свободы $N = O(Re_L^{9/4})$, где $Re_L = LU / \nu$, $U = \sqrt{0,5 u'_i u'_j}$, $L / \eta \cong Re_L^{3/4}$, и таким образом, $N \Delta x \sim Re_L^{9/4}$ [19] (Landau, 1950). Количество точек для разрешения течения в канале $N \sim (0,1 Re)^{9/4}$ [9] (Moin, 1982). Временной шаг для разрешения течения в канале $\Delta t \sim T_\eta = \sqrt{\nu / \varepsilon}$, $n(\Delta t) \sim T_L / T_\eta \cong Re_L^{1/2}$, поэтому $\Delta t \sim 0,1 L / (U \cdot Re^{1/2})$, и количество требуемых временных шагов для получения представительной картины турбулентности $\sim Re_L^{1/4}$ [36] (Sagaut, 2007). К этому следует добавить необходимость применения численной схемы интегрирования уравнений NS высокого порядка аппроксимации как по времени, так по пространству, проблему формирования граничных условий и длительное время интегрирования для выхода течения на развитый турбулентный режим. Нетривиальным также является постпроцессинг, т. е. обработка результатов DNS моделирования.

Таблица 2 – Характерные размеры шага интегрирования DNS в продольном, поперечном и нормальном направлениях по данным [24, 36]

| [24], Moin, Mahesh (1998) | по потоку | по нормали к стенке | поперек потока |
|---------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| однородный сдвиг | $\Delta X \sim 8\eta$ | $\Delta Y \sim 4\eta$ | $\Delta Z \sim 4\eta$ |
| изотропная турбулентность | $\Delta X \sim 4,5\eta$ | $\Delta Y \sim 4,5\eta$ | $\Delta Z \sim 4,5\eta$ |

LES разрешение турбулентности. Вычислительная сетка LES может быть грубее, для изотропной турбулентности должна обеспечивать прямое разрешение ламинарно-турбулентного перехода и генерации турбулентности. Для LES в ядре квазиизотропного потока параметры сетки примерно те же. Для сдвиговых течений требования сеточного разрешения слабее, так как генерация турбулентности ассоциируется с толщиной сдвигового слоя δ , поэтому $\delta/100 < \Delta X < \delta/10$ независимо от числа Рейнольдса [13, 36].

Требования к разрешению для пристенных течений (табл. 3).



Klebanoff [6] Herbert [25] Kachanov [33]

Рис. 5 – Различные типы переходных ("streaky") структур во внутреннем слое [26] (Berlin et al., 1999, эксперимент)

В целом нужно заметить, что сетки для LES сильно анизотропны. Улучшение аппроксимации по нормали к стенке возможно благодаря совершенствованию моделей пристенных напряжений.

Разрешение для акустики. Типичные длины акустических волн существенно больше колмогоровского масштаба. Период гидродинамических флуктуаций $T_f = L_t / u_t$, масштаб гидродинамической турбулентной флуктуации (в инерционном диапазоне) составляет

$L_t = T_f u_t = \left(T_f \sqrt{2\pi E (2\pi / L_t)} \right)^{2/3}$, масштаб акустической турбулентной флуктуации составляет $L_a = T_f (u + c)$,

их отношение $\frac{L_a}{L_t} = \frac{(u + c)}{u_t} > 1$, поэтому акустические волны разрешаются в LES на применяемых или более грубых сетках (см. подробнее [36]).

Разрешение (выделение) ударной волны для

Таблица 3 – Рекомендуемые значения размеров сетки в пограничном слое для DNS и LES [11]

| (Piomelli, Balaras) [11] | DNS | wall-LES |
|---|-------|----------|
| $\Delta X+$ | 10–15 | 50–100 |
| $\Delta Y+$ | 5 | 10–20 |
| $\Delta Z+$ (нормаль) | 1 | 1 |
| число точек в слое $0 < \Delta Z+ < 10$ | 3 | 3 |

DNS и LES разрешение пограничного слоя определяется разрешением стриков ("streaky"). Крупные масштабы имеют порядок толщины внешнего подслоя пограничного слоя. Масштаб генерации турбулентности во внутреннем подслое – вязкая длина

$$L = \nu / u_\tau, \quad u_\tau \sim u \sqrt{C_f}, \quad C_f \sim \text{Re}_L^{0,2}.$$

Количество точек в каждом измерении определяется возможностью разрешения "streaky" структур (рис. 5, рис. 6), которые в переменных стенке имеют постоянные размеры $N_{BL} \sim \text{Re}_L^{0,9}$. Физически необходимое количество временных шагов $\sim \text{Re}_L^{0,6}$ (в пристенных областях масштаб событий зависит от Re [36]).

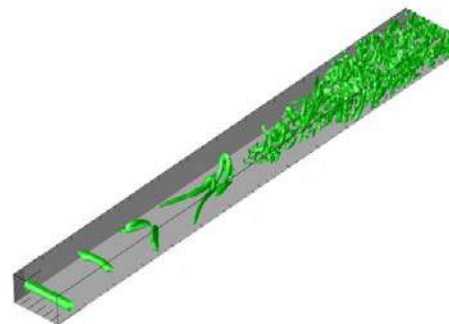


Рис. 6 – LES, Λ_2 -критерий завихренности [27] (Jeong&Hussein, 1995)

чисел Маха $1,2 < M < 1,5$ (табл. 4). По оценкам [24] колмогоровский размер на порядок больше толщины ударной волны $\delta_{\text{шОК}}$

$$\frac{\eta}{\delta_{\text{шОК}}} \sim 0,13 \frac{M-1}{M_t} \sqrt{\text{Re}_\lambda},$$

здесь $\lambda = \sqrt{2\nu \langle u'^2 \rangle / \varepsilon}$ – тейлоровский масштаб, в котором осреднение проводится по Рейнольдсу $\text{Re}_\lambda \left(\sqrt{2\nu \langle u'^2 \rangle / \varepsilon} \right)$; $M_t = f(\sqrt{K})$; K – турбулентная кинетическая энергия.

Отсюда следуют условия разрешения и выделения скачка уплотнения.

Требования к аппроксимации вычислительной схемы для DNS. Количество сеточных точек для разрешения события масштаба L является функцией численного метода. Оценка минимального отношения $L/\Delta X$, требуемого для

получения заданной точности на волновом тестовом решении $f(x) = e^{ikx}$, дана в табл. 5.

Численная схема модифицирует решение преобразованием $k \Rightarrow k'(k, \Delta x)$. По данным табл. 5 удовлетворительным выглядит 4–6 порядок аппроксимации численной схемы.

О требованиях к аппроксимации вычислительной схемы для LES. Требования к управлению ошибкой в LES более строгие из-за необходимости оценки энергии отсечения. Численные схемы вносят заметную искусственную диссипацию вследствие применения процедур противоточности, фильтрации, криволинейности сетки.

Центрально-разностные схемы для LES предпочтительны, т. к. имеют относительно малую диссипативную ошибку, вносят в решение в основном дисперсионную ошибку, которая явно не влияет на энергетический баланс SGS напряжений, что позволяет выделить более широкий диапазон масштабов. Вместе с тем, центрально-разностные схемы имеют узкий диапазон устойчивости и требуют применения процедуры искусственной стабилизации и применения неявных схем.

Табл. 6 иллюстрирует диапазон доминирования физически обоснованных моделей SGS напряжений, который возникает при малой численной погрешности схемы. Для неявных LES, в которых остаточные члены разностной схемы имеют структуру SGS тензора и доминируют над физической моделью SGS, последняя не применяется. Данное направление развивается, хотя имеет критиков.

5. Две стратегии моделирования SGS напряжений. В литературе существуют две основные

стратегии моделирования подсеточных рейнولدсовых напряжений – функциональное моделирование и структурное моделирование.

Функциональное моделирование состоит в моделировании действия SGS напряжений на поле скоростей, но не на SGS тензор напряжений.

Структурное моделирование состоит в наилучшей аппроксимации тензора SGS напряжений по оценке разрешаемого поля скоростей или с помощью формального разложения в ряды.

Данная классификация не устоялась, ей несколько лет. Другие подходы к классификации [1, 10, 12, 15, 23] характеризуются: а) уровнем сложности и точности аппроксимации SGS тензора; б) качеством описания каскадных процессов прямого и обратного рассеяния энергии; в) применением многоуровневого фильтрации; г) использованием стохастических методов в моделировании SGS; д) применением соображений, основанных на подобии масштабов.

Остановимся подробнее на функциональном моделировании для простейшего случая изотропной турбулентности. В основном это модели, основанные на разрешаемых масштабах.

Таблица 4 – Сеточные размеры для DNS и LES [28] (Ducros et al. 1999); [29] (Garnier, Sagaut, Deville 2001)

| | | |
|------------------------------------|-------------------|-----|
| $\Delta x < \delta_{SHOCK} < \eta$ | Разрешение скачка | DNS |
| $\delta_{SHOCK} < \Delta x < \eta$ | Выделение скачка | DNS |
| $\delta_{SHOCK} < \eta < \Delta x$ | Выделение скачка | LES |

Таблица 5 – Количество сеточных точек для разрешения события на длине волны [7] (Lele, 1992)

| $\epsilon = 1 - k' / k$ | 2-й порядок, явная схема | 4-й порядок, явная схема | 6-й порядок, явная схема | 4-й порядок, неявная схема | 6-й порядок, неявная схема |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0,1 | 8 | 4,54 | 3,70 | 3,38 | 2,85 |
| 0,01 | 25 | 8,69 | 5,71 | 5,71 | 4 |
| 0,001 | 100 | 16,38 | 8,69 | 10 | 5,71 |

Таблица 6 – Диапазоны доминирования моделей SGS напряжений [7] (Lele, 1992)

| | |
|--------------------------|--|
| Управляемая LES | $\epsilon_{num} \ll \epsilon_{sgs}$; физическая модель доминирует; явное SGS моделирование необходимо |
| Промежуточный случай | $\epsilon_{num} \sim \epsilon_{sgs}$; некоторые численные схемы (типа MiLES [30] (Boris, 1992), работают как SGS модель; явное SGS моделирование не оправдано |
| Неуправляемая LES = iLES | $\epsilon_{num} \gg \epsilon_{sgs}$; SGS моделирование не имеет смысла; результаты моделирования зависят от задачи |

Некоторые модели вихревой вязкости.

Линейная модель [37] (Smagorinsky, 1963).

$\nu_t = (C_s \Delta)^2 (2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2}$, в которую заложена гипотеза локального равновесия или автоадаптации SGS к разрешаемым масштабам. Константа $C_s = 0,18$ определяется из гипотезы Колмогорова. Модель основана на идее Буссинеска о вихревой вязкости, успешно и давно используемой в теории турбулентных замыканий. Вихревая вязкость $\hat{\tau} = \nu_t \cdot \hat{S}$ применяется в упрощенном виде, ибо

показано, что она может быть тензором ([17], Yoshisava, 1989). Это простейшая модель, явно не зависящая от фильтра, имеет много недостатков: не универсальна, демонстрирует нефизичность колмогоровского спектра, не обеспечивает переход к DNS, не содержит обратного каскада.

WALE-модель [31] (Nikoud, 1993), является усовершенствованием предыдущей модели с вихревой

вязкостью в виде $\nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{(\bar{S}_{ij}^d \bar{S}_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (\bar{S}_{ij}^d \bar{S}_{ij}^d)^5}$,

$\bar{S}^d = f(\bar{S}, \bar{\Omega})$, забезпечує коректне асимптотичне описання вблизи стінки при безградієнтному погранслоє.

Модель смішаних масштабів [32] (Sagaut, 2002). Вихрева вязкість має вигляд $\nu_t = (C_M \Delta)^{3/2} q_c^{1/4} (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}$, заснована на змішенні масштабів, застосовує повторний (неявний «тестовий») фільтр у вигляді рішення рівняння Лапласа $q_c = 0,5(\bar{u} - \hat{u})^2$, $\bar{u} - \hat{u} \sim \Delta \cdot \nabla^2 \bar{u}$.

Обобщені моделі вихревої вязкості виконуються також на основі 2-х рівневого фільтрування. Історически першим представителем була **динамічна модель** [33] (Germano) побудована на основі тотожства Germano, зв'язуючого SGS тензори 2-х рівней фільтрування:

$$\underbrace{\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j}_{L_{ij}} = \underbrace{\overline{u_i u_j} - u_i u_j}_{T_{ij}} - \underbrace{\overline{u_i \hat{u}_j} - u_i \hat{u}_j}_{r_{ij}}$$

Тотожство Germano призводить до тензору Леонарда (розрешаємого). Далі мінімізується нев'язка.

$$\tau_{ij} = C f_{ij}(\bar{u}, \Delta); \quad T_{ij} = C f_{ij}(\hat{u}, \hat{\Delta}),$$

$$r_{ij} = L_{ij} - C f_{ij}(\hat{u}, \hat{\Delta}) + C f_{ij}(\bar{u}, \Delta) \equiv L_{ij} - C M_{ij}.$$

Умова мінімізації $\partial(r_{ij} r_{ij}) / \partial C = 0$, де $C = (L_{ij} M_{ij}) / (M_{ij} M_{ij})$, обчислюється локально. Особливості даної моделі – автоматичне зникнення SGS тензора на стінці; автоматичний перехід до DNS; відображення перехідного процесу в пограничному шарі; з моделями вихревої вязкості динамічна процедура іноді дає $C < 0$ – що може вказувати на зворотне розсіювання. Модель потребує стабілізації, розвитку моделі присвячено багато робіт. Динамічна процедура Germano використовується також для розвитку багатопараметричних моделей.

Структурне моделювання тензора SGS напружень заключається в найкращій апроксимації тензора по оцінці поля швидкостей або на основі формального розкладу в ряди. Данна стратегія не використовує апріорного знання про природу взаємодії SGS і розрешуваних масштабів.

Основна класифікація моделей в структурному моделюванні: а) моделі, отримані формальним розкладом тензора в ряди вблизи відсічення; б) моделі, що використовують гіпотезу подібності масштабів на різних рівнях фільтрування; в) змішані моделі, засновані на лінійній комбінації функціональних і структурних підходів; г) моделі на основі рівнянь переносу компонентів SGS тензора без урахування механізмів взаємодії.

Моделі наближеного звернення оператора фільтра розвиває школа [1] Berselli, et al., з різним порядком апроксимації. При цьому 6-й порядок вносить труднощі реалізації, але містить зворотний каскад.

6. Особливості фільтрування NSE на реальних сітках. Операція взяття частинної похідної від осередненого параметра по просторовій координаті в загальному випадку не комутативна [1]:

$$\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x} - \overline{\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}} = \int \psi(\xi, t) \frac{G(x - \xi)}{\partial x} d\xi.$$

Поэтому розглядаються два підходи:

1) фільтрування NSE в декартових координатах і наступне перетворення відфільтрованих рівнянь в обобщену систему координат призводить до комутуючих фільтрів з помилкою в похідних порядку $O(\Delta)$. Даний підхід поширюється на довільний порядок схеми при спеціальному виборі фільтра.

2) запис NSE в обобщених координатах і наступне фільтрування формально показує збереження апроксимації, але вносить проблеми незалежності метрики сітки.

Загальна теорія найкращої апроксимації і вибору характерного радіуса фільтра відсутня. Оптимізація LES рішення може бути також досягнута зміною констант в підсіткової моделі; перебудовою розрахункової сітки.

Висновок. Моделювання великих вихрей в турбулентності бурно розвивається і вже дає вагомі результати в додатках [15, 30, 36].

К нерешеним проблемам LES поряд з розвитком моделей SGS замикають слід звернути увагу на усунення чисельних ефектів, зв'язаних з анізотропією сіток, підвищення порядку точності різностіжних схем при оптимальному виборі типу апроксимації, рішення проблеми постановки граничних умов, зокрема моделі стінки. Особливою темою є моделювання SGS замикають для плазми, термодинамічних систем з хімічними реакціями і фазовими переходами.

Список літератури. 1. Berselli L. Mathematics of LES of Turbulent Flows / L. Berselli, T. Iliescu, W. Layton. – SC : Springer, 2006. – 348 p. 2. Berselli L. C. A higher-order subfilter-scale model for large eddy simulation / L. C. Berselli, T. Iliescu // J. Comput. Appl. Math. – 2003. – № 159 (2). – P. 411–430. 3. Blazek J. Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications / J. Blazek. – Elsevier, 2001. – 435 p. 4. Hinze J. O. Turbulence / J. O. Hinze – New-York : McGraw-Hill, 1975. – 790 p. 5. Kim J. Turbulent statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number / J. Kim, P. Moin, R. Moser // Journ. Fluid Mech. – 1987. – № 177. – P. 133–166. 6. Klebanoff P. S. Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient / P. S. Klebanoff // NACA Tech. Note, 3178. – 1956. 7. Lele S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution / S. K. Lele // Journal of Computational Physics. – 1992. – № 103. – P. 16–42. 8. Leonard A. Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows / A. Leonard // Adv. in Geophysics. – 1974. – № 18A. P. 237–248. 9. Moin P. Numerical investigation of turbulent channel flow / P. Moin, J. Kim // Journ. Fluid Mech. – 1982. – № 118. – P. 341–377. 10. Moin P. Dynamic Subgrid-Scale Model for Compressible Turbulence and Scalar Transport / P. Moin, K. Squires, W. Cabot [et al.] // Physics of Fluids. – 1991. № A3 (11). – P. 2746–2757. 11. Piomelli U. Wall-layer models for large-eddy simulations / U. Piomelli, E. Balaras // Annual Review of Fluid Mechanics. – Palo Alto, California : Annual Reviews. – 2002. – Vol. 34. – P. 349–374. 12. Piomelli U. Large-Eddy Simulation : Present State and Future Directions / U. Piomelli // AIAA Paper 98-0534. – 1998. 13. Pope S. Turbulent Flows / S. Pope. – Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 770 p. 14. Sagaut P. Large eddy simulation for incompressible flows. Scientific Computation / P. Sagaut. – Berlin :

Springer-Verlag. – 2001 p. **15.** Schlatter P. Large-eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow / P. Schlatter // PhD Thesis. – Zürich. – 2005. – ETH № 16000. **16.** Truesdell C. A. Precise upper limit for the correctness of the Navier-Stokes theory with respect to the kinetic theory / C. A. Truesdell // Journ. of Statistic. Phys. – 1969. – Vol. 1, № 2. – P. 313. **17.** Yoshizawa A. Subgrid-scale modeling with a variable length scale / A. Yoshizawa // Phys. Fluids. – 1989. № A1 (7). – P. 1293–1295. **18.** Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса / А. Н. Колмогоров // ДАН СССР. – Москва : АН СССР. – 1941. – Т. 30. – С. 299–303. **19.** Ландау Л. Теоретическая физика / Л. Ландау, Е. Лившиц. – Москва : Наука, 1986. – Т. 6. – 736 с. **20.** Монин А. С. Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. – М. : Наука, 1965. – Ч. I. – 640 с. – 1967. – Ч. II. – 720 с. **21.** Van Dyke M. An Album of Fluid Motion / M. Van Dyke. – Stanford : Parabolic Press, 1982. – 180 p. **22.** Солодов В. Г. Моделирование турбулентных течений. Расчет больших вихрей / В. Г. Солодов. – Харьков : ХНАДУ, 2011. – 167 с. **23.** Drikakis D. Simulation of implicit LES / D. Drikakis, C. Fureby, F. F. Grinstein [et al.] // Journal of Computational Physics. – 2006. – № 213. – P. 413–436. **24.** Moin P. DIRECT NUMERICAL SIMULATION: A Tool in Turbulence Research / P. Moin, K. Mahesh // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1998. – Vol. 30. – P. 539–578. **25.** Herbert T. Secondary instability of boundary layers / T. Herbert // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1988. – Vol. 20. P. 487–526. **26.** Berlin S. Numerical and experimental investigations of oblique boundary layer transition / S. Berlin, M. Wiegel, D. S. Henningson // Journ. Fluid Mech. – 1999. – № 393. – P. 23–57. **27.** Jeong J. In the identification of a vortex / J. Jeong, F. Hussein // Journ. Fluid Mech. – 1995. – № 285. – P. 69–94. **28.** Ducros F. Large-eddy simulation of shock/homogeneous turbulence interaction / F. Ducros, V. Ferrand, F. Nicoud [et al.] // Journ. Comp. Physics. – 1999. – № 152. – P. 517–549. **29.** Garnier E. A class of explicit ENO filters with application to unsteady flows / E. Garnier, P. Sagaut, M. Deville // Journ. Comp. Physics. – 2001. – № 170. – P. 184–204. **30.** Boris J. P. New insights into large-eddy simulation / J. P. Boris, F. F. Grinstein, E. S. Oran [et al.] // Fluid Dynamics Research. – 1992. – № 10. – P. 199–228. **31.** Nicoud F. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor / F. Nicoud, F. Ducros // Flow, Turbulence and Combustion. – 1993. – Vol. 62, № 3. – P. 183–200. **32.** Sagaut P. Large-Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction / P. Sagaut. – Berlin : Springer-Verlag. – 2002. **33.** Germano M. Turbulence : The filtering approach / M. Germano // Journ. Fluid Mech. – 1992. – № 238. – P. 325–336. **34.** Kachanov Y. S. Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition / Y. S. Kachanov // Annual Review of Fluid Mechanics. – Vol. 26. – P. 411–482. **35.** Klebanoff P. S. The three-dimensional nature of boundary layer instability / P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom, L. M. Sargent // Journ. Fluid Mech. – 1962. – № 187. P. 61. **36.** Wagner C. Large-Eddy Simulation for Acoustics / C. Wagner, T. Hüttl, P. Sagaut. – New-York : Cambridge University Press, 2007. – 441 p. **37.** Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations / J. Smagorinsky // Monthly Weather Review. – 1963. – Vol. 91, № 3. – P. 99–165.

References. **1.** Berselli, L., T. Iliescu and W. Layton. *Mathematics of LES of Turbulent Flows*. SC: Springer, 2006. Print. **2.** Berselli, L. C., and T. Iliescu. "A higher-order subfilter-scale model for large eddy simulation." *J. Comput. Appl. Math* 159.2 (2003): 411–430. Print. **3.** Blazek, J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Elsevier, 2001. Print. **4.** Hinze, J. O. *Turbulence*. New-York : McGraw-Hill, 1975. Print. **5.** Kim, J., P. Moin and R. Moser. "Turbulent statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number." *Journ. Fluid Mech* 177 (1987): 133–166. Print. **6.** Klebanoff, P. S. "Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer

with Zero Pressure Gradient." *NACA Tech. Note* 3178. 1956. Print. **7.** Lele, S. K. "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution." *Journal of Computational Physics* 103 (1992): 16–42. Print. **8.** Leonard, A. "Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows." *Adv. in Geophysics*. No. 18A. 1974. 237–248. Print. **9.** Moin, P., and J. Kim. "Numerical investigation of turbulent channel flow." *Journ. Fluid Mech* 118 (1982): 341–377. Print. **10.** Moin, P., et al. "Dynamic Subgrid-Scale Model for Compressible Turbulence and Scalar Transport." *Physics of Fluids*. No. A3. 11. 1991. 2746–2757. Print. **11.** Piomelli, U., and E. Balaras. "Wall-layer models for large-eddy simulations." *Annual Review of Fluid Mechanics* 34 (2002): 349–374. Print. **12.** Piomelli, U. "Large-Eddy Simulation: Present State and Future Directions." *AIAA Paper* 98-0534. 1998. Print. **13.** Pope, S. *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. Print. **14.** Sagaut, P. *Large eddy simulation for incompressible flows. Scientific Computation*. Berlin: Springer-Verlag. Print. **15.** Schlatter, P. "Large-eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow." *PhD Thesis*. ETH No. 16000. Zürich. 2005. Print. **16.** Truesdell, C. A. "Precise upper limit for the correctness of the Navier-Stokes theory with respect to the kinetic theory." *Journ. of Statistic. Phys.* 1.2 (1969): 313. Print. **17.** Yoshizawa, A. "Subgrid-scale modeling with a variable length scale." *Physics of Fluids*. 1989. No. A1 (7). 1293–1295. Print. **18.** Kolmogorov, A. N. "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large Reynolds number." *Dokl. Akad. Nauk USSR*. Vol. 30. Moscow: AN USSR, 1941. 9–13. Print. **19.** Landau, L., and E. Livshits. *Theoretical physics*. Vol. 6. Moscow: Nauka, 1986. Print. **20.** Monin, A. C., and A. M. Yaglom. *Statistical Hydromechanics*. Vol. I. Moscow: Nauka, 1965. Vol. II. Moscow: Nauka, 1967. Print. **21.** Van Dyke, M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford: Parabolic Press, 1982. Print. **22.** Solodov, V. G. *Turbulent flow simulation. The calculation of large eddies*. Kharkov: HNADU, 2011. Print. **23.** Drikakis, D., et al. "Simulation of . implicit LES." *Journal of Computational Physics* 213 (2006): 413–436. Print. **24.** Moin, P., and K. Mahesh. "DIRECT NUMERICAL SIMULATION: A Tool in Turbulence Research." *Annual Review of Fluid Mechanics* 30 (1998): 539–578. Print. **25.** Herbert, T. "Secondary instability of boundary layers." *Annual Review of Fluid Mechanics* 20 (1988): 487–526. Print. **26.** Berlin, S., M. Wiegel and D. S. Henningson. "Numerical and experimental investigations of oblique boundary layer transition." *Journ. Fluid Mech.* 393 (1999): 23–57. Print. **27.** Jeong, J., and F. Hussein. "In the identification of a vortex." *Journ. Fluid Mech.* 285 (1995): 69–94. Print. **28.** Ducros, F., et al. "Large-eddy simulation of shock/homogeneous turbulence interaction." *Journ. Comp. Physics* 152 (1999): 517–549. Print. **29.** Garnier, E., P. Sagaut and M. Deville. "A class of explicit ENO filters with application to unsteady flows." *Journ. Comp. Physics* 170 (2001): 184–204. Print. **30.** Boris, J. P., et al. "New insights into large-eddy simulation." *Fluid Dynamics Research*. No. 10. 1992. 199–228. Print. **31.** Nicoud, F., and F. Ducros. "Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor." *Flow, Turbulence and Combustion* 62.3 (1993): 183–200. Print. **32.** Sagaut, P. *Large-Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 2002. Print. **33.** Germano, M. "Turbulence: The filtering approach." *Journ. Fluid Mech.* 238 (1992): 325–336. Print. **34.** Kachanov, Y. S. "Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition." *Annual Review of Fluid Mechanics* 26: 411–482. Print. **35.** Klebanoff, P. S., K. D. Tidstrom and L. M. Sargent. "The three-dimensional nature of boundary layer instability." *Journ. Fluid Mech.* 187 (1962): 61. Print. **36.** Wagner, C., T. Hüttl and P. Sagaut. *Large-Eddy Simulation for Acoustics*. New-York: Cambridge University Press, 2007. Print. **37.** Smagorinsky, J. "General circulation experiments with the primitive equations." *Monthly Weather Review* 91.3 (1963): 99–165. Print.

Надійшла (received) 10.10.2015

Солодов Валерій Григорьевич – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри «Гідрравлічні машини», г. Харків; тел.: (057) 707-66-46; e-mail: solodov.v@gmail.com.

Solodov Valeriy Grigorievich – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Professor at the Department of "Hydraulic machines", Kharkov; tel.: (057) 707-66-46; e-mail: solodov.v@gmail.com.